UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Evidenčné číslo: dc5a64f9-6e59-4e08-8fc8-d1cd941419cc

PANJEROVE REKURZIE V NEŽIVOTNOM POISTENÍ

2011 **Bc. Gábor Szűcs**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

PANJEROVE REKURZIE V NEŽIVOTNOM POISTENÍ

Diplomová práca

Študijný program: Pravdepodobnosť a matematická štatistika

Študijný odbor: 9.1.10 Štatistika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Andrej Náther, PhD.

Bratislava 2011 **Bc. Gábor Szűcs**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Gábor Szűcs
Študijný program: pravdepodobnosť a matematická štatistika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.10. štatistika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Panjerove rekurzie v neživotnom poistení

Cieľ: Spracovať niektoré teoretické výsledky súvisiace s výpočtom distribučnej funkcie zložených rozdelení a vytvoriť program pre niektoré typy rozdelení.

Vedúci: RNDr. Andrej Náther, PhD.

Dátum zadania: 12.11.2009

Dátum schválenia: 30.04.2011

prof. RNDr. Rastislav Potocký, PhD.
garant študijného programu

študent

vedúci

Čestné vyhlásenie:

Čestne vyhlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne, len s použitím uvedenej literatúry, pomocou vedúceho práce a s využitím svojich poznatkov.

....

Bc. Gábor Szűcs

Poďakovanie

Chcem využiť tento priestor a vysloviť úprimné poďakovanie svojmu diplomovému vedúcemu RNDr. Andrejovi Nátherovi, PhD. za odborné rady a mnohé podnetné pripomienky k práci. Taktiež by som rád poďakoval Bc. Stele Kaplockej a Bc. Gabriele Mrózovej za cenné pripomienky a mojej rodine za ich trpezlivosť a podporu.

autor

Abstrakt

SZŰCS, Gábor: Panjerove rekurzie v neživotnom poistení. Diplomová práca. Univerzita Komenského v Bratislave; Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Bratislava (2011), 57 s. Školitel: RNDr. Andrej Náther, PhD.

Táto diplomová práca sa zameriava na vyčíslenie rozdelenia celkovej výšky nárokov v modeli kolektívneho rizika. Obsahuje prehľad najdôležitejších pojmov v neživotnom poistení a modeli kolektívneho rizika, definuje odseknuté diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti. Jej súčasťou je aj prehľad Panjerových rozdelení a Panjerova rekurentná metóda. Hlavným cieľom tejto záverečnej práce je vytvorenie aplikačného programu v štatistickom softvéri $\mathcal{R}$, ktorý vyčísli pravdepodobnostné rozdelenie celkovej sumy nárokov pomocou rozšírenej Panjerovej rekurzie.

Kľúčové slová:

model kolektívneho rizika, diskretizácia spojitej náhodnej premennej, Panjerova podtrieda rozdelení počtu nárokov, Panjerova rekurzia, konvolúcia rozdelení náhodných premenných, odseknuté diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti, rozšírená Panjerova rekurzia, Schröterova trieda rozdelení

Abstract

SZŰCS, Gábor: Panjer's Recursion in Non-Life Insurance. Master Thesis. Faculty of mathematics, physics and informatics. Comenius University, Bratislava (2011), 57 p. Supervisor: RNDr. Andrej Náther, PhD.

This final thesis focuses on quantifying the distibution of total claims in collective model of risk theory. It also summarizes the most important concepts in non-life insurance and collective model of risk theory, defines the truncated discrete probability distributions. Moreover it includes an overview of the Panjer's class of claim number distributions and Panjer's recursion. The main aim of this master thesis is to create an application program in the statistical software $\mathcal{R}$ which calculates the probability distribution of total claims through extended Panjer's recursion.

Keywords:

collective model of risk theory, discretization of continuous random variables, Panjer's class of claim number distributions, Panjer's recursion, convolution of probability distributions, truncated discrete probability distributions, extended Panjer's recursion, Schröter's class of distributions

Predhovor

Teória neživotného poistenia patrí medzi mladšie vedecké disciplíny. Jej praktický rozvoj sa začal až začiatkom 20. storočia, keď švédsky štatistik Filip Lundberg publikoval svoju prácu o teórii rizika. Ďaľším priekopníkom v tejto oblasti bol štatistik Harald Cramér, ktorý zaviedol do poistnej matematiky zdokonalené metódy teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

Súčasťou spomínanej teórie rizika je aj takzvaný model kolektívneho rizika, pri ktorom predpokladáme, že celkové nároky za určité obdobie vzniknú nasčítaním jednotlivých nárokov, pričom aj počet, aj výšky nárokov modelujeme pomocou teoretických rozdelení pravdepodobnosti. Na numerické vyčíslenie rozdelenia celkových nárokov existuje viacero postupov. Jeden z nich je takzvaná Panjerova rekurzia, ktorú zverejnil kanadský matematik Harry H. Panjer.

V tejto práci sa sústredíme na spomínanú rekurentnú metódu. Uvedieme jej matematický zápis a rozšírenie, potom vytvoríme aplikačný program, ktorý numericky vyčísli rozdelenie celkových nárokov v modeli kolektívneho rizika.

Obsah

Úvod 10

1. Model kolektívneho rizika 11

1.1 Základné pojmy v poisťovníctve 11

1.2 Model kolektívneho rizika 12

1.3 Pravdepodobnostné rozdelenia počtu nahlásených nárokov 14

1.4 Pravdepodobnostné rozdelenia výšky nahlásených nárokov
Diskretizácia spojitej náhodnej premennej 14

1.5 Vlastnosti modelu kolektívneho rizika 15

2. Panjerove triedy rozdelení. Panjerova rekurzia 20

2.1 Definícia Panjerovho rozdelenia 20

2.2 Panjerova podtrieda stupňa nula 20

2.3 Panjerova rekurzia 23

2.4 Panjerova podtrieda stupňa jedna 26

2.5 Panjerova podtrieda stupňa k 30

3. Rozšírenie Panjerovej rekurzie 32

3.1 Rozšírená Panjerova rekurzia 32

3.2 Modifikácia Panjerovej triedy rozdelení 35

4. Aplikačný program 37

4.1 Motivácia 37

4.2 Pomocné funkcie 37

4.3 Panjerova rekurzia v softvéri $\mathcal{R}$ 40

5. Praktická úloha 42

Záver 45

Literatúra 46

Prílohy 48

Úvod

Neživotné poistenie je dôležitou súčasťou poisťovníctva a národného hospodárstva každej vyspelej krajiny. Dejiny moderného neživotného poistenia siahajú až do 19. storočia. Výrazný rozvoj tohto poistného odvetvia nastal koncom 20. storočia, kedy sa začali používať vysokovýkonné počítače.

Základnou úlohou poistenia je nahrádzať škody, ktoré spôsobili náhodné udalosti, pričom cieľom každej poisťovne je tvoriť zisk a byť úspešný na poistnom trhu. Poisťovne potrebujú nejakým spôsobom kvantifikovať tie náhodné udalosti, ktoré sú spojené s ich poisťovacou činnosťou. Na modelovanie týchto náhodných javov sa najčastejšie používajú metódy teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Jedna z používaných metód v praxi je aj tzv. model kolektívneho rizika, pri ktorom poisťovňa predpokladá, že uzavrie veľký počet poistných zmlúv a celkové nároky za určité obdobie vzniknú nasčítaním jednotlivých nárokov. Celkovú výšku nárokov za istú dobu budeme označovať symbolom S. Keďže výšky a aj počet nárokov za určité obdobie majú náhodný charakter, tak aj S bude náhodná veličina. Hlavnou úlohou v modeli kolektívneho rizika je nájsť pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej S.

Pri hľadaní rozdelenia náhodnej veličiny S si môžeme vybrať z viacerých možných postupov. Jeden z nich je takzvaná Panjerova rekurentná metóda, ktorú publikoval kanadský štatistik H. H. Panjer v roku 1980. V porovnaní s postupom, ktorý využíva konvolúciu rozdelení, Panjerova metóda je z hľadiska výpočtovej náročnosti oveľa jednoduchšia. Našim hlavným cieľom pri písaní tejto záverečnej práce je popísať Panjerove triedy rozdelení a Panjerovu rekurziu. Následne sa pokúsime vytvoriť aplikačný program v štatistickom softvéri $\mathcal{R}$ ⌊11⌋, ktorý je založený na Panjerovej metóde.

Táto diplomová práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej kapitole uvedieme definíciu a vlastnosti modelu kolektívneho rizika. V nasledujúcej kapitole podrobne popíšeme Panjerove podtriedy rozdelení a uvedieme Panjerov rekurentný vzťah. V tretej kapitole spomenieme rozšírenie a rôzne možné modifikácie spomínanej rekurentnej metódy. V ďalšej časti tejto práce popíšeme aplikačný program, ktorý počíta rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej S na základe rozšírenej Panjerovej rekurzie. V poslednej piatej kapitole uvedieme praktickú modelovú úlohu, ktorú vyriešime pomocou vytvoreného aplikačného programu v softvéri $\mathcal{R}$ ⌊11⌋.

1. Model kolektívneho rizika

1.1 Základné pojmy v poisťovníctve

Zadefinujeme si niekoľko dôležitých pojmov, ktoré budeme často používať v ďalších kapitolách.

- *poisťovníctvo* - odvetvie hospodárstva, ktoré sa zaoberá poisťovacou, zaisťovacou alebo sprostredkovateľskou činnosťou v oblasti poistenia [3]
- *poistenie* - vzťah medzi dvoma zmluvnými stranami. Prvá zmluvná strana, ktorá poisťuje, dostáva poistné od druhej zmluvnej strany. Za inkasované poistné je prvá zmluvná strana (poisťovňa) ochotná odškodniť druhú zmluvnú stranu (poisteného) v prípade poistnej udalosti
- *poisťovňa* - finančná spoločnosť, ktorá ponúka pre verejnosť rôzne druhy poistenia
- *poistený* - fyzická alebo právnická osoba uvedená v poistnej zmluve; poistený má právo na poistné plnenie, ak nastane poistná udalosť, a to bez ohľadu na to, či poistenie dohodol sám alebo iná osoba (poistník)
- *riziko* - taký druh neistoty, pri ktorom sa dá kvantifikovať pravdepodobnosť vzniku odchýlok od očakávaných výsledkov pomocou rôznych matematických a štatistických metód
- *poistná zmluva* - zmluva, ktorá sa uzatvorí medzi poisťovňou a poisteným
- *poistná udalosť* - náhodná skutočnosť, s ktorou je spojený vznik povinnosti poisťovne poskytnúť poistenému poistné plnenie
- *poistné plnenie* - suma vyplácaná pri vzniku poistnej udalosti (pri vzniku poistnej udalosi má poistený nárok na istú sumu)
- *životné poistenie* - druh poistenia osôb, ktorého predmetom a rizikom je obvykle dožitie a úmrtie poistenej osoby [3]

- *neživotné poistenie* - druh poistenia, ktorý zahŕňa poistenie úrazu, poistenie choroby, hnuteľných a nehnuteľných vecí proti rôznym rizikám, poistenie zodpovednosti za škodu spôsobenú inej osobe, poistenie úveru, kaucie a rôznych finančných strát, poistenie právnej ochrany, asistenčné služby a pod. ⌊3⌋

1.2 Model kolektívneho rizika

Základy moderného neživotného poistenia, takzvanú *teóriu rizika* položil v roku 1903 švédsky poistný analytik *Filip Lundberg* v publikácii ⌊5⌋. Teória rizika sa zaoberá vytvorením matematických modelov, ktoré popisujú výšku nahlásených poistných nárokov. Cieľom poisťovní je na základe vytvoreného modelu odhadnúť budúci zisk, resp. vyhnúť sa zruinovaniu (bankrotu) poisťovne. ⌊8⌋

Jedným z najdôležitejších modelov v neživotnom poistení je tzv. **model kolektívneho rizika** (MKR). Základom tohto modelu je to, aby poisťovňa mala veľký súbor takých poistených, ktorí majú poistenie rovnakého typu. Poistený vlastne prenáša svoje riziká na poisťovňu, ktorá je v prípade nastatia poistnej udalosti povinná zaplatiť poistnú sumu. Poisťovňa preto musí stanoviť podľa nejakého modelu výšku poistného. Ak je počet poistených dostatočne veľký a zároveň predpokladáme, že poistné udalosti sú nezávislé a majú rovnaké rozdelenie, tak poisťovňa je schopná zistiť zákonitosti rozdelenia počtu a výšky nahlásených poistných nárokov. Poisťovňa pri tomto modelovaní používa rôzne matematické formuly z teórie pravdepodobnosti, napríklad známe teoretické rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré spomenieme v ďalších podkapitách. Najprv zavedieme niektoré základné označenia, ktoré sa používajú v MKR: ⌊8⌋

- Nech $\{T_i;\ i = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť časov, $0 \le T_1 \le T_2 \le \dots$, kde T_i je v MKR tzv. *čas nahlásenia i-tej poistnej udalosti.*
- Nech $\{X_i;\ i = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených, nezáporných náhodných premenných (predchádzajúce vlastnosti postupnosti náhodných premenných X_i označme skratkou *nniid = non-negative independent identicaly distributed*). Náhodná premenná X_i sa nazýva v MKR *výška i-teho nahláseného nároku.* Nech T_i je čas nahlásenia nároku X_i; $i = 1, 2, \dots$.
- Nech postupnosti $\{T_i;\ i = 1, 2, \dots\}$ a $\{X_i;\ i = 1, 2, \dots\}$ sú navzájom nezávislé.

Z predošlej konštrukcie vidíme, že náhodné premenné X_i; $i = 1, 2, \ldots$, teda výšky nahlásených nárokov, majú z hľadiska teórie pravdepodobnosti homogénny charakter. Navyše predpokladajme, že náhodné veličiny X_i; $i = 1, 2, \ldots$ sú *spojité*. To nám umožní, aby sme v neskorších úvahách o MKR mohli aplikovať základné vety a tvrdenia o *nniid* náhodných premenných.

Definujme teraz *náhodný proces nahlásených nárokov*: $N(t) = \#\{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}$. Jednotlivé zložky tohto procesu nazývame *počet nahlásených nárokov do času t*. Z konštrukcie predchádzajúceho procesu vyplýva, že náhodné premenné $N(t)$; $\forall t \geq 0$ môžu nadobúdať len nezáporné celočíselné hodnoty.

Zavedieme aj ďaľší náhodný proces $S(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i;\ t \geq 0 \right\}$, ktorý nazývame *proces celkových súčtov nahlásených nárokov.* [8]

Tento všeobecný model teraz zjednodušíme a to tak, že zafixujeme čas t. Nech teda $t = t_0$, kde t_0 nejaký pevný časový okamih, ktorý jednoznačne určí *časové obdobie* $T = [0; t_0]$. V praxi môže byť časové obdobie T napríklad *jeden týždeň* , *jeden mesiac* alebo *jeden rok* (prípadne aj iné).

Označme $N(T) \triangleq N$; $S(T) \triangleq S$. Potom náhodná premenná S sa dá vyjadriť v tvare:

$$S(T) = \sum_{i=1}^{N(T)} X_i \iff \mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X_i} \tag{1}$$

Tiež sa používa označenie $S \triangleq S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde $\mathbf{S_N}$ je **celková suma nahlásených nárokov** (za časové obdobie T), $\mathbf{N}$ je počet nahlásených nárokov, $\mathbf{X_i}$ sú výšky jednotlivých nárokov, pričom náhodné premenné N a X_i sú nezávislé $\forall i = 1, 2, \ldots, N$. Celková výška nahlásených nárokov S_N vznikne ako súčet náhodných premenných, pričom počet sčítancov je tiež náhodná premenná. Hovoríme, že náhodná veličina S má tzv. **zložené rozdelenie**, označujeme $S \sim C(N, X)$.

V nasledujúcich podkapitolách tejto práce budeme podrobne analyzovať model (1) a uvedieme jeho vlastnosti. Spomenieme si tiež na tie rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré sa v praxi najčastejšie používajú na modelovanie počtu nahlásených nárokov N, respektíve výšky nárokov X_i.

1.3 Pravdepodobnostné rozdelenia počtu nahlásených nárokov

V predchádzajúcej podkapitole sme uviedli, že náhodná premenná N, ktorá vyjadruje počet nahlásených nárokov, je diskrétna náhodná veličina s nezápornými hodnotami. Práve preto na modelovanie náhodného počtu nárokov v MKR sa najčastejšie používa Poissonovo, geometrické, binomické alebo negatívne binomické rozdelenie. Okrem spomínaných rozdelení sa v praxi používajú aj tzv. odseknuté analógie spomenutých distribúcií, ale aj iné typy rozdelení, ktoré uvedieme v ďalších kapitolách.

1.4 Pravdepodobnostné rozdelenia výšky nahlásených nárokov. Diskretizácia spojitej náhodnej premennej

Výšky nahlásených nárokov najčastejšie modelujeme pomocou exponenciálneho, log-normálneho, Paretovho, Burrovho, Weibullovho a gama rozdelenia. Označme symbolom $F_X(\cdot)$ distribučnú funkciu náhodnej premennej X. Potom platí:
(viď v ⌊6⌋ a ⌊13⌋)

- ak $X \sim Exp(\lambda)$, potom $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $x \in \langle 0; \infty)$; $\lambda = rate > 0$
- ak $X \sim \ln\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, potom $F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$; $x \in \langle 0; \infty)$;
  $\mu = meanlog \in \mathbb{R}$; $\sigma = sdlog > 0$
  Pozn.: $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia.
- ak $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$, potom $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}$; $x \in \langle \beta; \infty)$;
  $\alpha = shape > 0$; $\beta = scale > 0$
- ak $X \sim Burr(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$, potom $F_X(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha_2}\right)^{-\alpha_1}$; $x \in (0; \infty)$;
  $\alpha_1 = shape1 > 0$; $\alpha_2 = shape2 > 0$; $\beta = scale > 0$
- ak $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, potom $F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}$; $x \in \langle 0; \infty)$;
  $\alpha = shape > 0$; $\beta = scale > 0$
- ak $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, potom $F_X(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1}\, e^{-u/\beta}\, du$;
  $x \in \langle 0; \infty)$; $\alpha = shape > 0$; $\beta = scale > 0$

Ako sme už spomenuli, všetky predchádzajúce rozdelenia sú spojité. V praxi sú však výšky nahlásených nárokov diskrétne desatinné čísla s nanajvýš dvomi desatinnými miestami (napr. výška nároku nemôže byť 23,97120876... Eur, výška nároku sa zaokruhlí na 24,00 Eur). Problém nastáva vtedy, keď hľadáme pravdepodobnosť $P(X_i = 24)$, kde X_i má nejaké spojité rozdelenie zo spomínaných rozdelení, pretože v takomto prípade bude $P(X_i = 24) = 0$. Na riešenie tohto nedostatku používame tzv. *metódu diskretizácie spojitej náhodnej premennej.*

Označme symbolom $\tilde{X}$ diskrétnu náhodnú premennú, ktorá vznikne diskretizáciou spojitej náhodnej veličiny X. Predpokladajme pritom, že náhodná premenná X nadobúda len nezáporné hodnoty. Rozdelenie premennej $\tilde{X}$ definujeme vzťahom:

$$P(\tilde{X} = k) = P(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $F_X(\cdot)$ je distribučná funkcia premennej X.

Takto definovanú diskretizovanú náhodnú veličinu $\tilde{X}$ budeme používať v nasledovných kapitolách tejto práce.

1.5 Vlastnosti modelu kolektívneho rizika

Spomeňme si na model (1) z podkapitoly 1.2: $\quad S \triangleq S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
V predchádzajúcich odsekoch sme už analyzovali náhodné premenné N a X_i. Teraz uvedieme vlastnosti náhodnej veličiny S_N.

Tvrdenie 1. Nech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sú *nniid* náhodné premenné, ktoré nadobúdajú len celočíselné hodnoty. Nech $G_X(\cdot)$ je vytvárajúca funkcia náhodnej premennej X_1. Nech N je náhodná premenná, ktorá nadobúda len kladné celočíslené hodnoty a má vytvárajúcu funkciu $G_N(\cdot)$. Nech navyše N a X_i sú nezávislé $\forall i = 1, ..., N$. Potom $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ má vytvárajúcu funkciu

$$G_S(z) \triangleq G_{S_N}(z) = G_N\left(G_X(z)\right)$$

Dôkaz 1. Dôkaz nájdeme v ⌊7⌋.

Poznámka 1. *Nech Y je náhodná premenná, ktorá nadobúda len nezáporné celočíslené hodnoty. Vytvárajúca funkcia náhodnej premennej Y sa definuje vzťahom*

$G_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) z^k$, *kde z je komplexné číslo.* ⌊12⌋

Tvrdenie 2. Nech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sú *nniid* náhodné premenné s momentovou vytvárajúcou funkciou $M_X(\cdot)$. Nech N je náhodná premenná, ktorá nadobúda len kladné celočíslené hodnoty a má momentovú vytvárajúcu funkciu $M_N(\cdot)$. Nech navyše N a X_i sú nezávislé $\forall i = 1, ..., N$. Potom $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ má momentovú vytvárajúcu funkciu

$$M_S(t) \triangleq M_{S_N}(t) = M_N\left(\ln M_X(t)\right)$$

Poznámka 2. *Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej Y sa definuje vzťahom $M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right]$.*

Dôkaz 2. *(Dôkaz Tvrdenia 2.)*

Počítajme:

$M_S(t) = E\left[e^{tS}\right] = |$Používame vetu o úplnej strednej hodnote (viď v ⌊12⌋, str. 197)$|$

$$= E_N\left(E\left[e^{tS}/N = n\right]\right) = E_N\left(E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{N} X_i\right\} / \ N = n\right]\right)$$

Teraz budeme využívať, že $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé:

$$M_S(t) = E_N\left(\prod_{i=1}^{N} E\left[\exp\left\{tX_i\right\} / \ N = n\right]\right) = E_N\left(\prod_{i=1}^{N} M_{X_i}(t)/ \ N = n\right) =$$

$= |X_1, \ldots, X_n$ sú rovnako rozdelené$| = E_N\left(NM_X(t)/ \ N = n\right) = E_N\left(\exp\left\{n \ln M_X(t)\right\}\right)$

Potom teda dostaneme: $\qquad M_S(t) = M_N\left(\ln M_X(t)\right) \qquad \square$

Tvrdenie 3. Nech platia všetky predpoklady z Tvrdenia 2. Nech $F_X(\cdot)$ je distribučná funkcia náhodnej premennej X_1. Predpokladajme navyše, že náhodné premenné X_1, $\ldots$, X_n nadobúdajú len kladné celočíslené hodnoty. Označme symbolom $F_S(\cdot)$ distribučnú funkciu náhodnej premennej S_N. Platí:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \ P(N = n)$$

kde $F^{*n}(\cdot)$ je konvolučná distribučná funkcia, ktorá zodpovedá náhodnej premennej

$X_1 + \cdots + X_n$ a je definovaná nasledovným spôsobom:

$$F^{*n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 0 \wedge x = 0 \\ 0 & \text{ak } n = 0 \wedge x \in \mathbb{N} \\ \sum_{c=1}^{x} F^{*(n-1)}(x-c)\ F_X(c) & \text{ak } n > 0 \wedge x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dôkaz 3. Počítajme:

$P(S < x) = |$Používame vetu o úplnej pravdepodobnosti$| =$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(S < x \wedge N = n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S < x \wedge N = n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S < x / N = n\right) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)\ P(N = n) \qquad \square$$

Tvrdenie 4. Nech platia všetky predpoklady z Tvrdenia 2. Navyše ak existujú konečné momenty $E(N), E(N^2), E(X), E(X^2)$, tak platia takzvané Waldove identity:

$$E[S] \triangleq E[S_N] = E[N]\, E[X_1]$$

$$D[S] \triangleq D[S_N] = E[N]\, D[X_1] + D[N]\, E^2[X_1]$$

Dôkaz 4. Budeme používať Tvrdenie 2., Poznámku 2. a základné vlastnosti vytvárajúcich funkcií. Počítajme:

$$E[S_N] = \frac{dM_S(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{dM_N\left(\ln M_X(t)\right)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{dM_N(t)}{dt}\Big|_{t=\ln M_X(0)} \quad \frac{1}{M_X(0)} \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{dM_N(t)}{dt}\Big|_{t=\ln E(e^{0X_1})} \quad \frac{1}{E(e^{0X_1})} \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{dM_N(t)}{dt}\Big|_{t=0} \quad \frac{1}{1} \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} \quad \Rightarrow$$

$E[S_N] = E[N]\, E[X_1]$

Počítajme teraz:

$$E\left[S_N^2\right] = \frac{d^2 M_S(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2 M_N\left(\ln M_X(t)\right)}{dt^2}\Big|_{t=0}$$

$$E\left[S_N^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{dM_N(\ln M_X(t))}{dt} \quad \frac{1}{M_X(t)}\frac{dM_X(t)}{dt}\right]_{|t=0} =$$

$$= \frac{d^2M_N(t)}{dt^2}|_{t=0} \quad \left[\frac{1}{M_X(t)}\frac{dM_X(t)}{dt}|_{t=0} \quad \right]^2 -$$

$$- \frac{dM_N(t)}{dt}|_{t=0} \quad \left[\frac{dM_X(t)}{dt}\frac{1}{M_X^2(t)}\right]_{|t=0} \frac{dM_X(t)}{dt}|_{t=0} +$$

$$+ \frac{dM_N(t)}{dt}|_{t=0} \ \frac{1}{M_X(0)}\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}|_{t=0}$$

$$E\left[S_N^2\right] = \frac{d^2M_N(t)}{dt^2}|_{t=0} \quad \left[\frac{dM_X(t)}{dt}|_{t=0} \quad \right]^2 -$$

$$- \frac{dM_N(t)}{dt}|_{t=0} \quad \left[\frac{dM_X(t)}{dt}|_{t=0}\right]^2 + \frac{dM_N(t)}{dt}|_{t=0} \ \frac{d^2M_X(t)}{dt^2}|_{t=0}$$

$$E\left[S_N^2\right] = E\left[N^2\right]E^2\left[X_1\right] - E\left[N\right]E^2\left[X_1\right] + E\left[N\right]E\left[X_1^2\right]$$

Používame vzťah $D\left[S_N\right] = E\left[S_N^2\right] - E^2\left[S_N\right]$:

$$D\left[S_N\right] = E\left[N^2\right]E^2\left[X_1\right] - E\left[N\right]E^2\left[X_1\right] + E\left[N\right]E\left[X_1^2\right] - E^2\left[N\right]E^2\left[X_1\right] =$$

$$= E\left[N\right]\left(E\left[X_1^2\right] - E^2\left[X_1\right]\right) \quad + \quad E^2\left[X_1\right]\left(E\left[N^2\right] - E^2\left[N\right]\right)$$

$$D\left[S_N\right] = E\left[N\right]D\left[X_1\right] + D\left[N\right]E^2\left[X_1\right] \qquad \square$$

Tvrdenie 5. Nech platia všetky predpoklady z Tvrdenia 2. Navyše predpokladajme, že náhodné premenné $X_1, \ldots, X_n, \ldots, S \triangleq S_N$ nadobúdajú len celočíselné nezáporné hodnoty. Potom pre $P(S = s)$ platí:

$$P(S = s) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{P(N = n)\sum_{x=1}^{s} P(X_n = x) \ P(X_1 + \cdots + X_{n-1} = s - x)\right\}$$

Dôkaz 5. Budeme používať vetu o úplnej pravdepodobnosti a Bayesov vzorec pre podmienenú pravdepodobnosť:

$$P(S = s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = s \wedge N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(S = s/N = n)$$

$$P(S=s)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\ P(X_1+X_2+\cdots+X_n=s)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\ \sum_{x=1}^{s}P(X_1+X_2+\cdots+X_n=s\wedge X_n=x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\ \sum_{x=1}^{s}P(X_n=x)P(X_1+X_2+\cdots+X_n=s/X_n=x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\ \sum_{x=1}^{s}P(X_n=x)P(X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}=s-x) \qquad \square$$

Poznámka 3. *Tvrdenie 5. nám dáva návod na to, ako vypočítať pravdepodobnosti* $P(S=s)$ *v modeli kolektívneho rizika. Dostaneme teda pravdepodobnosť, s ktorou celková výška nahlásených nárokov nadobúda nejakú konkrétnu hodnotu. Takáto metóda je ale neefektívna a výpočtovo náročná, keďže sa v nej počítajú nekonečné sumy. Práve preto bola odvodená alternatívna a efektívnejšia metóda na výpočet* $P(S=s)$*, ktorú nazývame Panjerova rekurzia.*

2. Panjerove triedy rozdelení. Panjerova rekurzia

2.1 Definícia Panjerovho rozdelenia

Panjerove rozdelenia sú diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré sa používajú na modelovanie počtu nárokov. Niektoré distribúcie počtu nahlásených nárokov sme už spomenuli v podkapitole 1.3. Teraz uvedieme presnú definíciu Panjerovho rozdelenia a distribúcie, ktoré patria do Panjerovej triedy rozdelení.

Definícia 1. Pre $k \in \mathbb{N}_0$ definujme množinu $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq k\}$. ⌊4⌋

<u>Poznámka</u>. Množina $\mathbb{N}_k$ je podmnožinou množiny nezáporných celých čísel:
$\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$ *pre nejaké* $k \in \mathbb{N}_0$.

Definícia 2. Nedegenerované diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti $Q = \{p_n\}_{p \in \mathbb{N}_0}$, ktoré je definované len pre celočíselné nezáporné hodnoty, nazývame *Panjerove rozdelenie stupňa <u>k</u>* s parametrami $a, b \in \mathbb{R}$, ak spĺňa lineárnu diferenčnú rovnicu

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \tag{2}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}_k / \{k\}$ a s počiatočnými podmienkami $p_m = 0 \ \ \forall m \in \mathbb{N}_0 / \mathbb{N}_k$.
Pre práve definované rozdelenie budeme používať označenie $Panjer(a, b, k)$. ⌊4⌋

Definícia 3. Množinu všetkých Panjerových rozdelení stupňa <u>k</u> budeme nazývať *Panjerova podtrieda stupňa <u>k</u>*, označíme symbolom $\mathbb{P}_k$.

<u>Poznámka</u>. Panjerova podtrieda stupňa <u>k</u> je totožná s tzv. *(a,b,k)-podtriedou rozdelení.*

2.2 Panjerova podtrieda stupňa nula

V tejto podkapitole uvedieme všetky rozdelenia pravdepodobnosti patriace do podtriedy $\mathbb{P}_0$. Podľa Definície 2. tieto distribúcie musia spĺňať rekurentný vzťah

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \tag{3}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}_0 / \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$, kde $p_n = P(N = n)$; $n \in \mathbb{N}_0$ pre nejakú náhodnú premennú $N \sim Panjer(a, b, 0)$.

Veta 1. Do Panjerovej podtriedy stupňa nula ($\mathbb{P}_0$) patrí práve Poissonovo, binomické a negatívne binomické rozdelenie.

Dôkaz vety 1. Dôkaz môžeme nájsť v ⌊10⌋.

Panjerove rozdelenia stupňa nula:

- **Poissonovo rozdelenie**:

$$N \sim Po(\lambda); \qquad p_n = P(N=n) = \frac{\lambda^n \, e^{-\lambda}}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$E\,[N] = \lambda; \qquad D\,[N] = \lambda; \qquad G_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Platí: $$p_n = \frac{\lambda^n \, e^{-\lambda}}{n!} = \frac{\lambda}{n} \, \frac{\lambda^{n-1} \, e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \frac{\lambda}{n} \, p_{n-1}$$

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{0} + \frac{\lambda}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{0}, \; \mathbf{b} = \lambda$$

(parametre Panjerovho rozdelenia)

Platí: $$N \sim Po(\lambda) \qquad \Longleftrightarrow \qquad N \sim Panjer\,(0, \lambda, 0)$$

- **Binomické rozdelenie**:

$N \sim Bin(m,p)$; $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0;1)$

$$p_n = P(N=n) = \tbinom{m}{n} \, p^n (1-p)^{m-n}; \quad n \in \{0, 1, \dots, m\}$$

$$E\,[N] = mp; \qquad D\,[N] = mp(1-p); \quad G_N(z) = (1 + p(z-1))^m$$

Platí: $$p_n = \tbinom{m}{n} \, p^n (1-p)^{m-n} =$$

$$= \frac{m-(n-1)}{n} \, \tbinom{m}{n-1} \, p \, p^{n-1} (1-p)^{-1} (1-p)^{m-(n-1)}$$

$$= \frac{m-n+1}{n} \frac{p}{1-p} \, p_{n-1}$$

$$p_n = \left(-\frac{p}{1-p} + (m+1) \frac{p}{(1-p)n}\right) p_{n-1} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1-p}}; \quad \mathbf{b} = (\mathbf{m+1})\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1-p}} \quad \text{(parametre Panjerovho rozdelenia)}$$

Platí: $N \sim Bin(m,p) \iff N \sim Panjer\left(-\frac{p}{1-p},\ (m+1)\frac{p}{1-p},\ 0\right)$

- **Negatívne binomické rozdelenie**:

$N \sim NegBin(r,q);\ r \in \mathbb{N}\ ,\ q \in (0;1)$

$$p_n = P(N=n) = \binom{r+n-1}{n} q^n (1-q)^r; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$E\left[N\right] = \frac{r}{q}; \qquad D\left[N\right] = r\frac{q}{(1-q)^2}; \quad G_N(z) = \left(\frac{1-qz}{1-q}\right)^{-r}$$

Platí: $p_n = \binom{r+n-1}{n} q^n (1-q)^r =$

$$= \frac{r+n-1}{n} \binom{r+n-2}{n-1} q\ q^{n-1}(1-p)^r$$

$$= q\ \frac{r+n-1}{n}\ p_{n-1}$$

$$p_n = \left(q + q\ \frac{r-1}{n}\right) p_{n-1} \qquad \Rightarrow$$

$\mathbf{a} = \mathbf{q}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{q}(\mathbf{r-1})$ (parametre Panjerovho rozdelenia)

Platí: $N \sim NegBin(r,q) \iff N \sim Panjer\left(q,\ q(r-1),\ 0\right)$

Poznámka.

Špeciálnym prípadom negatívneho binomického rozdelenia je takzvané **geometrické rozdelenie** *, ak $r=1$. Platí teda:*

$$N \sim Geom(q) \iff N \sim Panjer\left(q,\ 0,\ 0\right)$$

2.3 Panjerova rekurzia

Vráťme sa teraz k modelu (1): $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. V nasledujúcej vete uvedieme tzv. *Panjerov rekurentný vzťah*, ktorý platí v prípade, že N má Panjerovo rozdelenie stupňa nula.

Veta 2. *(Panjerova veta)*
Nech $S \sim C(N, X)$, nech $X_i;\ i = 1, 2, \dots$ sú nezávislé a rovnako rozdelené (*independent identicaly distributed = iid*) náhodné premenné, ktoré nadobúdajú len kladné celočíselné hodnoty. Nech N má nedegenerované Panjerovo rozdelenie, ktoré patrí do $\mathbb{P}_0$. Potom platí:

$$\mathbf{P(S = s)} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{s}} \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{bj}}{\mathbf{s}}\right) \mathbf{P(X_1 = j)}\ \mathbf{P(S = s - j)}; \qquad s = 1, 2, \dots \tag{4}$$

$$P(S = 0) = P(N = 0) = p_0$$

<u>*Poznámka.*</u> Ak $N \sim Po(\lambda)$, tak $p_0 = e^{-\lambda}$.

Ak $N \sim Bin(m, p)$, tak $p_0 = (1 - p)^m$.

Ak $N \sim NegBin(r, q)$, tak $p_0 = q^r$.

Pri dôkaze Vety 2 budeme používať pomocné tvrdenie, ktoré je udevené v $\lfloor 2 \rfloor$:

Tvrdenie 6. Uvažujme model $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde $N \sim Panjer(a, b, 0)$. Nech $X_i;\ i = 1, 2, \dots$ sú *iid* náhodné premenné, ktoré nadobúdajú len nezáporné celočíselné hodnoty a majú vytvárajúcu funkciu $G_X(\cdot)$. Označme symbolom $G_S(\cdot)$ vytvárajúcu funkciu náhodnej veličiny S. Potom platí:

$$G'_S(z) = aG_X(z)G'_S(z) + (a + b)G'_X(z)G_S(z) \tag{5}$$

kde $G'_X(\cdot)$, $G'_S(\cdot)$ sú prvé derivácie príslušných vytvárajúcich funkcií.

Dôkaz 6. Dôkaz nájdeme v $\lfloor 2 \rfloor$.

Za predpokladov predošlého tvrdenia tiež platí (viď v Poznámke 1.):

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_1 = k) \qquad G'_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} P(X_1 = k) \qquad (*)$$

$$G_S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(S=j) \qquad G'_S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j z^{j-1} P(S=j) \qquad (**)$$

Dôkaz vety 2. Dosaďme vzťahy $(*)$ a $(**)$ do rovnice (5):

$$G'_S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j z^{j-1} P(S=j) = a \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_1 = k) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} j z^{j-1} \ P(S=j) \right) +$$

$$+ (a+b) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} \ P(X_1 = k) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j P(S=j) \right)$$

Po vynásobení rovnice premennou z dostaneme:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j z^j P(S=j) = a \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_1 = k) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} j z^j \ P(S=j) \right) +$$

$$+ (a+b) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^k \ P(X_1 = k) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j P(S=j) \right) \qquad (\triangle)$$

Chceme vyjadriť pravdepodobnosti $P(S = s)$ pre $s = 1, 2, 3, \ldots$. Na pravej, aj na ľavej strane predošlej rovnice máme mocninový rad premennej z. Mocninový rad na ľavej strane rovnice $(\triangle)$ sa bude rovnať mocninovému radu na pravej strane rovnice $(\triangle)$ práve vtedy, keď koeficienty mocnín $z^0, z^1, z^2, \ldots$ budú rovnaké. Po rozpísaní a následnom upravení koeficientov dostaneme: $\lfloor 2 \rfloor$

$$sP(S=s) = a \sum_{k=0}^{s} (s-k) P(X_1 = k) P(S = s-k) +$$

$$+ (a+b) \sum_{k=0}^{s} k P(X_1 = k) P(S = s-k) \qquad \text{(viď v } \lfloor 2 \rfloor)$$

Používame teraz predpoklad Vety 2., že X_i; $i = 1, 2, \ldots$ sú *iid* náhodné premenné, ktoré nadobúdajú kladné celočíselné hodnoty. Z toho vyplýva, že $P(X_1 = 0) = 0$. Potom teda platí:

$$sP(S=s) = a \sum_{k=1}^{s} (s-k) P(X_1 = k) P(S = s-k) +$$

$$+ (a+b) \sum_{k=1}^{s} k P(X_1 = k) P(S = s-k)$$

$$sP(S=s) = \sum_{k=1}^{s} [\ a(s-k) + (a+b)k\ ]\ \ P(X_1 = k)P(S = s-k) \qquad \Rightarrow$$

$$P(S=s) = \sum_{k=1}^{s} \left[a + \frac{bk}{s}\right] P(X_1 = k)P(S = s-k); \qquad s = 1, 2, \ldots \qquad \square$$

Panjerov rekurentný vzťah nám dáva návod na to, ako vypočítať pravdepodobnosti $P(S = s)$ pre $s = 1, 2, 3, \ldots$ Z hľadiska výpočtovej náročnosti je Panjerova rekurzia oveľa jednoduchšia ako metóda z Tvrdenia 5. Jedným z hlavných cieľov tejto práce je totiž naprogramovať funkciu v jazyku $\mathcal{R}$ ⌊11⌋, ktorá zo vstupných parametrov vypočíta $P(S = 0),\ P(S = 1),\ P(S = 2),\ \ldots.$

Panjerova veta má niekoľko dôsledkov. Jeden z nich je tzv. *De Prilov rekurentný vzťah* (podrobnosti o tejto rekurzii nájdeme v ⌊7⌋).

Tvrdenie 7. *(hlavný dôsledok De Prilovej rekurzie)*
Nech $N \sim Panjer(a, b, 0)$. Potom pre strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej N platí:

(a) $\quad E[N] = \dfrac{a+b}{1-a}$

(b) $\quad D[N] = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

(c) $\quad \dfrac{D[N]}{E[N]} = \dfrac{1}{1-a}$

Dôkaz 7. Dôkaz nájdeme v ⌊7⌋.

Predošlý vzťah (c) sa v praxi využíva ako orientačné kritérium. Poisťovne na základe nazbieraných dát dokážu odhadnúť strednú hodnotu a disperziu počtu nahlásených nárokov N. Cieľom poisťovní je vytvorenie matematického modelu pre budúce obdobia, ktorý najlepšie fituje nazbierané dáta. Ako sme už uviedli v predošlých kapitolách, na modelovanie rozdelenia počtu nahlásených nárokov sa používajú Panjerove rozdelenia. Poisťovňa si môže vybrať to najvhodnejšie rozdelenie pre N na základe týchto pravidiel:

- Ak $D[N] < E[N]$, t.j. ak $a < 0$, tak pre N zvolíme **binomické rozdelenie**

- Ak $D[N] = E[N]$, t.j. ak $a = 0$, tak pre N zvolíme **Poissonovo rozdelenie**
- Ak $D[N] > E[N]$, t.j. ak $a > 0$, tak pre N zvolíme **negatívne binomické rozdelenie**

2.4 Panjerova podtrieda stupňa jedna

Z Definície 2. vyplýva, že Panjerove rozdelenia stupňa jedna musia spĺňať vzťah

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \tag{6}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}_1 / \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$, kde $p_n = P(N = n)$; $n \in \mathbb{N}_1$ pre nejakú náhodnú premennú $N \sim Panjer(a, b, 1)$.

Veta 3. Do Panjerovej podtriedy stupňa jedna ($\mathbb{P}_1$) patria práve tieto distribúcie: odseknuté Poissonovo, binomické a negatívne binomické rozdelenie rádu 1, logaritmické rozdelenie a rozšírené odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu 1.

Dôkaz vety 3. Náznak dôkazu môžeme nájsť v $\lfloor 7 \rfloor$.

Panjerove rozdelenia patriace do podtriedy $\mathbb{P}_1$:

- **odseknuté Poissonovo rozdelenie rádu 1, odseknuté binomické rozdelenie rádu 1, odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu 1**

  Tieto distribúcie vzniknú modifikáciou pôvodných rozdelení tak, že položíme prvú pravdepodobnosť, t.j. $p_0 \triangleq P(N = 0)$ rovnú nule. Následne upravíme ostatné pravdepodobnosti $p_1 \triangleq P(N = 1)$, $p_2 \triangleq P(N = 2), \ldots$ tak, aby ich súčet bol rovný jednej.

  Zavedieme technické označenia a odvodíme pravdepodobnosti p_i; $i = 1, 2, \ldots$:

  1. Nech náhodná premenná N má *odseknuté Poissonovo rozdelenie rádu 1*, ozn. $N \sim Po(\lambda, 1)$; $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pre ktoré platí:

     $$p_0 = 0; \quad p_1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}; \quad \ldots \quad p_j = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}; \quad j = 1, 2, \ldots$$

     Platí: $\quad N \sim Po(\lambda, 1) \quad \Longleftrightarrow \quad N \sim Panjer(0, \lambda, 1) \quad (\star)$

Poznámka. Pre odseknuté Poissonovo rozdelenie rádu t; $t \in \mathbb{N}$ budeme používať označenie $Po(\lambda, t)$.

2. Nech náhodná premenná N má *odseknuté binomické rozdelenie rádu 1*, ozn. $N \sim Bin(m, p, 1)$; $m \in \mathbb{N}$; $p \in (0; 1)$. Potom platí:

$$p_0 = 0; \quad p_1 = \frac{1}{1-(1-p)^m}\binom{m}{1}p(1-p)^{m-1}; \quad \dots$$

$$p_j = \frac{1}{1-(1-p)^m}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j}; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Platí: $N \sim Bin(m, p, 1) \iff N \sim Panjer\left(-\frac{p}{1-p},\ (m+1)\frac{p}{1-p},\ 1\right) \quad (\star)$

Poznámka. V prípade odseknutého binomického rozdelenie rádu t; $t \in \mathbb{N}$ používame označenie $Bin(m, p, t)$.

3. Nech náhodná premenná N má *odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu 1*, ozn. $N \sim NegBin(r, q, 1)$; $r \in \mathbb{R}^+$; $q \in (0; 1)$. Pre náhodnú veličinu N potom platí:

$$p_0 = 0; \quad p_1 = \frac{1}{1-(1-q)^r}\binom{r}{1}q(1-q)^r; \quad \dots$$

$$p_j = \frac{1}{1-(1-q)^r}\binom{r+j-1}{j}q^j(1-q)^r; \quad j = 1, 2, \dots$$

Platí ekvivalencia:

$N \sim NegBin(r, q, 1) \quad \Leftrightarrow \quad N \sim Panjer\,(q,\ q(r-1), 1)\,; \ \ r \in \mathbb{R}^+ \quad (\star)$

Poznámka. V prípade odseknutého negatívne binomického rozdelenie rádu t; $t \in \mathbb{N}$ budeme používať označenie $NegBin(r, q, t)$.

Poznámka. *Všimnime si, že parameter negatívneho binomického rozdelenia (parameter r) sme definovali na množine kladných reálnych čísel. Potom symboly* $\binom{r}{1}$ *a* $\binom{r+j-1}{j}$ *označujú tzv. zovšeobecnený binomický koeficient, ktorý je definovaný vzťahom:*

$$\binom{\alpha}{j} = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\alpha - i}{m - i} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ , \ m \in \mathbb{N}_0$$

navyše ak $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}_0$, *tak platí:*

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha) j!},$$

kde $\Gamma(\cdot)$ *je tzv.* $\Gamma - funkcia$.

Poznámka 4. *Odseknutie pravdepodobnosti* p_0 *nemá vplyv na parametre Panjerovho rozdelenia. V prípade odseknutých rozdelení* $Po(\lambda, 1)$, $Bin(m, p, 1)$, $NegBin(r, q, 1)$ *by sme dostali tie isté koeficienty* **a**, **b**, *ktoré sme už odvodili v podkapitole 2.2. Z toho vyplýva, že platia vzťahy označené ako* $(\star)$.

- **Logaritmické rozdelenie**

Nech $N \sim Log(q)$. Potom $p_n = P(N = n) = \dfrac{q^n}{-n \ \ln(1-q)}$; $n \in \mathbb{N}$; $q \in (0; 1)$.

$$E[N] = \frac{q}{-(1-q) \ \ln(1-q)}; \qquad D[N] = \frac{-q(q + \ln(1-q))}{(1-q)^2 (\ln(1-q))^2};$$

$$G_N(z) = \frac{\ln(1 - qz)}{\ln(1-q)} \qquad \text{pre} \quad |z| < \frac{1}{q}$$

Platí: $$p_n = \frac{q^n}{-n \ \ln(1-q)} = q \ \frac{q^{n-1}}{-n \ \ln(1-q)} \ \frac{n-1}{n-1} =$$

$$= q \ \frac{n-1}{n} \ \frac{q^{n-1}}{-(n-1) \ \ln(1-q)} = q \ \frac{n-1}{n} \ p_{n-1} \ ; \quad q \in (0; 1); \ n \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{q}, \ \mathbf{b} = -\mathbf{q}$$

(parametre Panjerovho rozdelenia)

Platí: $N \sim Log(q) \iff N \sim Panjer\,(q, -q, 1)$

- **Rozšírené odseknuté negatívne binomické rozdelenie**

  Najprv zadefinujeme všeobecné rozšírené odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu t (*extended truncated negative binomial distribution* = *ETNB*):

  Nech $N \sim ETNB(r, q, t); \quad t \in \mathbb{N}; \quad r \in (-t, -t+1); \quad q \in (0; 1\rangle$.

  Potom $\quad p_n = P(N = n) = \dfrac{\dbinom{r+n-1}{n} q^n}{(1-q)^{-r} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{r+j-1}{j} q^j};$

  $\quad n \in \{t,\ t+1,\ t+2, \dots\};$

  Vytvárajúca funkcia: $\quad G_N(z) = \dfrac{(1-qz)^{-r} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{r+j-1}{j} q^j}{(1-q)^{-r} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{r+j-1}{j} q^j}$

  Ako sme už spomenuli, do podtriedy $\mathbb{P}_1$ patrí ETNB-rozdelenie rádu 1. Položme teda $t = 1$. Potom platí:

  $$p_n = \frac{\dbinom{r+n-1}{n} q^n}{(1-q)^{-r} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{r+j-1}{j} q^j} = q \frac{r+n-1}{n} \frac{\dbinom{r+(n-1)-1}{n-1} q^{n-1}}{(1-q)^{-r} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{r+j-1}{j} q^j}$$

  $$p_n = q \, \frac{r+n-1}{n} \, p_{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}_2; \quad r \in (-1, 0); \quad q \in (0; 1\rangle$$

  $$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q(r-1)}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a = q}, \quad \mathbf{b = q(r-1)}$$

  (parametre Panjerovho rozdelenia)

  Platí: $\quad N \sim ETNB(r, q, 1) \quad \Leftrightarrow \quad N \sim Panjer\,(q, q(r-1), 1)\,; \quad r \in (-1, 0)$

  Poznámka. Podobne ako pri odseknutom negatívne binomickom rozdelení, aj pri ETNB-rozdelení používame tzv. zovšeobecnený binomický koeficient, ktorý sme definovali vyššie.

V praxi sa najčastejšie používajú tie Panjerove rozdelenia, ktoré patria do podtriedy $\mathbb{P}_0$ alebo $\mathbb{P}_1$. Poisťovne pomocou týchto rozdelení dokážu modelovať náhodný počet nahlásených nárokov v modeli kolektívneho rizika. Praktický príklad, v ktorom sa aplikujú Panjerove rozdelenia a Panjerova rekurzia, uvedieme v poslednej kapitole.

2.5 Panjerova podtrieda stupňa k

Panjerove rozdelenie stupňa $\underline{k}$ a *Panjerovu triedu stupňa $\underline{k}$* sme už zadefinovali v podkapitole 2.1 v Definícii 2. resp. v Definícii 3. Na tomto mieste vedieme krátky prehľad tých distribúcií, ktoré patria do $\mathbb{P}_k$. Pre všeobecnú podtriedu $\mathbb{P}_k$; $k \in \mathbb{N}_2$ platia podobné pravidlá ako pre podtriedu $\mathbb{P}_1$ (rozdelenia $Panjer(a, b, k)$ dostaneme zovšeobecnením rozdelení $Panjer(a, b, 1)$).

- **Odseknuté Poissonovo rozdelenie rádu k**

  $Po(\lambda, k) \quad \Longleftrightarrow \quad Panjer(0, \lambda, k); \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$

- **Odseknuté binomické rozdelenie rádu k**

  $Bin(m, p, k) \quad \Longleftrightarrow \quad Panjer\left(-\frac{p}{1-p},\ (m+1)\frac{p}{1-p},\ k\right);$

  $m \in \mathbb{N}, \quad p \in (0;1); \quad k < m$

- **Odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu k**

  $NegBin(r, q, k) \quad \Longleftrightarrow \quad Panjer\left(q, q(r-1),\ k\right); \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad q \in (0;1)$

<u>Poznámka</u>. Predchádzajúce odseknuté rozdelenia vzniknú z príslušných základných rozdelení tak, že položíme $p_0 = 0,\ p_1 = 0,\ \ldots,\ p_{k-1} = 0$ a ostatné pravdepodobnosti $p_k, p_{k+1}, p_{k+2} \ldots$ upravíme tak, aby platilo $\sum_{j=k}^{\omega} p_j = 1$, kde $\omega = \infty$ v prípade Poissonovho a negatívne binomického rozdelenia; $\omega = m$ v prípade binomického rozdelenia.

- **Rozšírené odseknuté negatívne binomické rozdelenie rádu k**

  $ETNB(r, q, k) \quad \Longleftrightarrow \quad Panjer\left(q, q(r-1),\ k\right); \quad r \in (-k, -k+1),\ q \in (0;1\rangle$

- **Rozšírené odseknuté logaritmické rozdelenie rádu k**

  Rozšírené odseknuté logaritmické rozdelenie (*extended truncated logarithmic distribution = ETLog*) môžeme definovať podobným spôsobom ako sme definovali ETNB-rozdelenie v predchádzajúcej podkapitole: prvých $\underline{k}$ pravdepodobností odsekneme a ostatné pravdepodobnosti $p_k, p_{k+1}, \ldots$, upravíme tak, aby v súčte dávali jednotku.

Pre náhodnú premennú $N \sim ETLog(q,k)$; $q \in (0;1\rangle,\ k \in \mathbb{N}_2$ platí: $\lfloor 7 \rfloor$

$$p_n = P(N=n) = \frac{\binom{n}{k}^{-1} q^n}{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}^{-1} q^j} \qquad \text{pre} \quad n = k,\ k+1,\ k+2, \ldots$$

Vytvárajúca funkcia:
$$G_N(z) = \frac{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}^{-1} (qz)^j}{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}^{-1} q^j}$$

Platí:
$$p_n = \frac{\binom{n}{k}^{-1} q^n}{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}^{-1} q^j} = q\ \frac{n-k}{n} \frac{\binom{n-1}{k}^{-1} q^{n-1}}{\sum\limits_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k}^{-1} q^j} = q\ \frac{n-k}{n} p_{n-1}$$

$$\mathbf{p_n} = \left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{kq}}{\mathbf{n}}\right) \mathbf{p_{n-1}} \qquad \text{pre} \quad n \in \mathbb{N}_{k+1}; \quad k \in \mathbb{N}_2; \quad q \in (0;1\rangle$$

Parametre Panjerovho rozdelenia sú: $\mathbf{a} = \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{kq}$

Platí teda ekvivalencia:

$$ETLog(q,k) \iff Panjer\,(q, -kq,\ k); \qquad k \in \mathbb{N}_2; \quad q \in (0;1\rangle$$

3. Rozšírenie Panjerovej rekurzie

3.1 Rozšírená Panjerova rekurzia

H. H. Panjer v publikácii [9] definoval rekurentný vzťah (4) len pre prípad, keď rozdelenie počtu nárokov je z podtriedy $\mathbb{P}_0$, teda keď počet nárokov má Poissonovo, binomické, negatívne binomické alebo geometrické rozdelenie. Ako sme už spomínali, práve tieto rozdelenia pravdepodobnosti sa najčastejšie používajú v praxi. Panjerove rozdelenia vyšších rádov sa v praxi využívajú najmä pri zaistení. Zaisťovňa plní svoj záväzok voči poisťovni iba v takom prípade, keď počet nahlásených nárokov za určité časové obdobie prekročí stanovený počet K. Pre zaisťovňu je vhodným riešením, ak v takejto situácii používa na modelovanie náhodného počtu nárokov odseknuté rozdelenia pravdepodobnosti z triedy $\mathbb{P}_K$, teda Panjerove rozdelenia K-teho rádu. Takto teda môžeme zdôvodniť potrebu rozšírenia Panjerovej rekurzie aj pre Panjerove podtriedy vyššieho rádu.

Uvažujme model (1) z prvej kapitoly: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde náhodná premenná N vyjadruje počet nahlásených nárokov za určité časové obdobie, X_i; $i = 1, 2, \dots$ sú výšky jednolivých nárokov a náhodná veličina S vyjadruje celkovú výšku nahlásených nárokov za určité časové obdobie. Ďalej nech platia všetky predpoklady z podkapitoly 1.2. Zavedieme nasledovné označenia:

(a) Nech výšky nárokov X_i; $i = 1, 2, \dots$ sú z rozdelenia $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Označme symbolom $F^{*j} = \left\{f_n^{*j}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ rozdelenie súčtu $\sum_{i=1}^{j} X_i$. Predpokladajme, že $\forall i, j \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$f_n^{*j} = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \wedge n = 0 \\ 0 & \text{ak } j = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \\ \displaystyle\sum_{c=1}^{n} f_{n-c}^{*j-1}\ f_c & \text{ak } j > 0. \end{cases}$$

(b) Označme rozdelenie počtu nárokov $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ a navyše predpokladajme, že $Q \in \mathbb{P}_k$; pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$. Nech náhodná veličina N má rozdelenie Q.

(c) Položme $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ a nech $H = \{h_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ je rozdelenie náhodnej premennej S. Hovoríme, že S má zložené rozdelenie: $H = Comp(Q, F)$, kde $Comp(Q, F)$ sa definuje vzťahom:

$$Comp(Q, F) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} q_j f^{*j} \right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Veta 4. *(Rozšírená Panjerova rekurzia)*
Nech platia predchádzajúce označenia. Predpokladajme, že $Q = Panjer(a, b, k)$; $k \in \mathbb{N}_0$. Ak $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je rozdelenie veľkosti nárokov, ktoré spĺňa $f_0 = 0$ a ak $H = \{h_s\}_{s\in\mathbb{N}_0} = Comp(Q, F)$, potom:

- $h_s = 0 \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0/\mathbb{N}_k$
- $h_s = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \left(a + \frac{bj}{s}\right) h_{s-j}\ f_j + q_k f_s^{*k} \qquad \forall s \in \mathbb{N}_k.$

Pri dôkaze tejto vety budeme používať nasledovné pomocné tvrdenie, ktoré je uvedené v článku [4] ako Veta 4.2:

Tvrdenie 8. Uvažujme rozdelenia $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $F^{*k} = \left\{f_n^{*k}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ a $H = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ku ktorým patria vytvárajúce funkcie $G_F(\cdot)$, $G_{F^{*k}}(\cdot)$ $G_Q(\cdot)$ resp. $G_H(\cdot)$. Pre $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ a pre nedegenerované rozdelenie počtu nárokov $Q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a/ Q = Panjer(a,b,k)

b/ Pre všetky rozdelenia veľkosti nárokov $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pre ktoré $f_0 = 0$ a $\forall d \in \mathbb{N}$, $G_H(t)$ spĺňa diferenciálnu rovnicu

$$(1 - aG_F(t))\, G_H^{(d)}(t) = \sum_{j=1}^{d} \binom{d}{j} \left(a + b\frac{j}{d}\right) G_H^{(d-j)}(t)\ G_F^{(j)}(t) + q_k\ G_{F^{*k}}^{(d)}(t)$$

pre $t \in \langle 0; 1)$ a so začiatočnými podmienkami $G_H^{(r)}(0) = 0$; $\forall r \in \mathbb{N}_0/\mathbb{N}_k$, kde $G_H^{(r)}(\cdot)$, $G_F^{(r)}(\cdot)$ resp. $G_{F^{*k}}^{(r)}(\cdot)$ označuje r-tú deriváciu príslušných vytvárajúcich funkcií ($r \in \mathbb{N}$).

Dôkaz 8. Pri dôkaze sa využívajú vzťahy

$$G_H(t) = G_Q\left(G_F(t)\right); \qquad G'_H(t) = G'_Q\left(G_F(t)\right) G'_F(t)$$

a Veta 2.1 z článku ⌊4⌋. Podrobný dôkaz viď v publikácii ⌊4⌋.

Dôkaz vety 4. Nech Y je diskrétna náhodná veličina, ktorá nabodúda len nezáporné hodnoty. Potom platí nasledovný prevodový vzťah medzi rozdelením pravdepodobnosti a vytvárajúcou funkciou náhodnej premennej Y: ⌊13⌋

$$P(Y = n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_Y(z)|_{z=0} \triangleq \frac{G_Y^{(n)}(0)}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}_0 \qquad (i)$$

Z Tvrdenia 8. poznáme, že ak $Q = Panjer(a, b, k)$, tak $G_H^{(s)}(0) = 0;\ \forall s \in \mathbb{N}_0/\mathbb{N}_k$. Zo vzťahu (i) vyplýva, že aj $h_s = 0\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0/\mathbb{N}_k$ (prvá časť dôkazu je spravená). Položme $t = 0$ a počítajme diferenciálnu rovnicu z Tvrdenia 8:

$$(1 - aG_F(0))\, G_H^{(s)}(0) = \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j} \left(a + b\frac{j}{s}\right) G_H^{(s-j)}(0)\ G_F^{(j)}(0) + q_k\ G_{F^{*k}}^{(s)}(0)$$

$$G_H^{(s)}(0) = \sum_{j=1}^{s} \frac{s!}{j!(s-j)!} \left(a + b\frac{j}{s}\right) G_H^{(s-j)}(0)\ G_F^{(j)}(0) + q_k\ G_{F^{*k}}^{(s)}(0)$$

$$\frac{G_H^{(s)}(0)}{s!} = \sum_{j=1}^{s} \left(a + b\frac{j}{s}\right) \frac{G_H^{(s-j)}(0)}{(s-j)!}\ \frac{G_F^{(j)}(0)}{j!}\ +\ q_k \frac{G_{F^{*k}}^{(s)}(0)}{s!}$$

Po aplikovaní vzťahu (i) dostaneme:

$$P(S = s) = \sum_{j=1}^{s} \left(a + b\frac{j}{s}\right) P(S = s - j)\ P(X = j)\ +\ q_k P(X_1 + \cdots + X_k = s)$$

$$h_s = \sum_{j=1}^{s} \left(a + b\frac{j}{s}\right) h_{s-j}\ f_j\ +\ q_k f_s^{*k} \qquad \forall s \in \mathbb{N}_k \qquad \square$$

3.2 Modifikácia Panjerovej triedy rozdelení

Uvažujme rozdelenie pravdepodobnosti $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, ktoré spĺňa diferenčnú rovnicu

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} + \frac{c}{n} p_{n-2}; \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{7}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sú konštatny a $p_{-1} = 0$. Označme symbolom $\mathbb{S}$ triedu tých distribúcií, ktoré spĺňajú rovnicu (7). Trieda $\mathbb{S}$ sa nazýva *Schröterova trieda rozdelení*, jej prvky budeme označovať zápisom $Schroter(a, b, c)$.

Veta 5. Nech $N_1 \sim Panjer(\alpha, \beta, 0)$, $N_2 \sim Po(\lambda)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Položme $N = N_1 + N_2$. Potom $N \sim Schroter(a, b, c)$, kde $a = \alpha$, $b = \beta + \lambda$, $c = -\lambda\alpha$.

Dôkaz vety 5. Dôkaz môžeme nájsť v $\lfloor 2 \rfloor$.

Pre Schröterovu triedu rozdelení môžeme odvodiť podobný vzťah, aký sme uviedli v podkapitole 2.3. Nasledujúce tvrdenie je analógiou Tvrdenia 6.

Tvrdenie 9. Uvažujme model $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde $N \sim Schroter(a, b, c)$. Nech X_i; $i = 1, 2, \dots$ sú *iid* náhodné premenné, ktoré nadobúdajú len nezáporné celočíselné hodnoty a majú vytvárajúcu funkciu $G_X(\cdot)$. Označme symbolom $G_S(\cdot)$ vytvárajúcu funkciu náhodnej veličiny S. Potom platí:

$$G'_S(z) = aG_X(z)G'_S(z) + \Big(a + b + cG_X(z)\Big)\, G'_X(z)G_S(z) \tag{8}$$

kde $G'_X(\cdot)$, $G'_S(\cdot)$ sú prvé derivácie príslušných vytvárajúcich funkcií.

Dôkaz 9. Dôkaz nájdeme v $\lfloor 2 \rfloor$.

Keďže Schröterova trieda rozdelení vznikla modifikáciou Panjerovej triedy, tak aj pre rozdelenia $Schroter(a, b, c) \in \mathbb{S}$ by mala platiť podobná rekurentná formula, akú sme uviedli vo Vete 2. (Panjerova rekurzia) resp. vo Vete 4. (rozšírená Panjerova rekurzia).

Veta 6. *(rekurentný vzorec pre Schröterove rozdelenia)*
Nech platí model $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Predpokladajme, že $N \sim Schroter(a, b, c)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sú dané parametre. Nech $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je rozdelenie veľkosti nárokov X_i; $i = 1, 2, \dots$, ktoré spĺňa $f_0 = 0$. Označme symbolom $H = \{h_s\}_{s \in \mathbb{N}_0}$ rozdelenie náhodnej premennej S. Potom platí:

- $h_s = \sum_{j=1}^{s} \left[\left(a + \frac{bj}{s} \right) f_j + \frac{cj}{2s} f_j^{*2} \right] h_{s-j} \qquad$ pre $s = 1, 2, 3, \ldots$
- $h_0 = G_N(0)$,

kde $G_N(\cdot)$ je vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny N a $F^{*2} = \{f_n^{*2}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je konvolučné rozdelenie druhého stupňa, ktoré vznikne z distribúcie $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Dôkaz vety 6. Pri dôkaze sa využíva rovnica (8) z Tvrdenia 9. a vlastnosti konvolučného rozdelenia. Podrobný dôkaz je uvedený v [2].

Ako sme už spomínali, Schröterove rozdelenia sa v praxi používajú na modelovanie počtu nárokov. V niektorých prípadoch tieto distribúcie lepšie opisujú skutočnosť ako Panjerove rozdelenia. Z toho vyplýva, že ak používame rekurentný vzťah z Vety 6., tak dostaneme presnejšie rozdelenie náhodnej premennej S ako pri Panjerovej rekurentnej metóde (Veta 2.). Jedinou nevýhodou „Schröterovej rekurzie" je ťažší výpočet, pri ktorom musíme počítať aj konvolúciu rozdelení výšky nárokov.

4. Aplikačný program

4.1 Motivácia

Zovšeobecnený Panjerov vzorec, ktorý sme uviedli vo Vete 4., je z hľadiska výpočtovej zložitosti náročná úloha, preto sme na výpočet pravdepodobností $P(S = s)$; $s \in \mathbb{N}_k$ vytvorili aplikačný program v prostredí štatistického softvéru $\mathcal{R}$ ⌊11⌋. Program $\mathcal{R}$ sme zvolili z toho dôvodu, lebo všetky potrebné teoretické rozdelenia pravdepodobnosti sú v ňom naprogramované a ľahko použiteľné.

V praxi, ak chceme zostaviť vhodný model pre celkovú výšku nárokov S, tak potrebujeme nejaké dáta z minulosti. Na základe minulých dát odhadneme rozdelenie počtu N a výšky nárokov X_i; $i = 1, 2, \ldots$. Z teoretických distribúcií pravdepodobnosti vyberieme tie, ktoré najlepšie opisujú (fitujú) naše dáta o počte a výške nárokov.

Poznámka.
Počet nárokov modelujem pomocou Panjerovho rozdelenia, kým na modelovanie výšky nárokov používam tie distribúcie, ktoré som uviedol v podkapitole 1.4.

Po vhodnom zvolení rozdelenia náhodnej veličiny N a rozdelenia náhodných premenných X_i budeme simulovať celkovú výšku nárokov S. Výstupom z aplikačného programu bude vektor pravdepodobností:

$$PS = \Big(P(S = 0), P(S = 1), P(S = 2), \ldots\Big)' = \Big(g_0, g_1, g_2, \ldots\Big)'.$$

Keď je už nasimulovaný vektor PS známy, dajú sa riešiť rôzne úlohy teórie rizika, napríklad hľadanie neznámej $\underline{t}$, pre ktorú platí: $P(S < t) = 0,99$ (podrobnejší popis tejto úlohy uvedieme v praktickej časti).

4.2 Pomocné programy

K aplikačnému programu sme potrebovali vytvoriť nasledovné tri pomocné programy: *diskretizacia()*, *odseknutie()* a *konvolucia()*. Všetky funkcie sme naprogramovali v prostredí softvéru $\mathcal{R}$ ⌊11⌋. Zdrojové kódy programov sú uvedené v Prílohe č. 1., Prílohe č. 2. resp. v Prílohe č. 3. Teraz uvedieme stručný popis týchto funkcií.

- *diskretizacia(method, ...)*

  → Táto funkcia zdiskretizuje spojité náhodné premenné, používame ju pri modelovaní výšky nárokov. Postup diskretizácie sme podrobne popísali v podkapitole 1.4. Pomocou tohto programu môžeme zdiskretizovať exponenciálne, gamma, Paretovo, Weibullovo, log-normálne a Burrovo rozdelenie. Výstupom funkcie je vektor pravdepodobností

  $$PX = \Big(P(\tilde{X}=0), P(\tilde{X}=1), P(\tilde{X}=2), \dots\Big)' = \Big(f_0, f_1, f_2, \dots\Big)',$$

  kde $\tilde{X}$ je diskretizovaná náhodná premenná modelujúca výšku nárokov.

  → Do parametra '*method*' môžeme zadať typ spojitého rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré chceme zdiskretizovať.
  Možné hodnoty parametra: `"pexp"`, `"pgamma"`, `"ppareto"`, `"pweibull"`, `"plnorm"`, `"pburr"`.

  → Argument '...' obsahuje parametre spomínaných rozdelení. V prípade exponenciálneho rozdelenia zadávame parameter `"rate"`; pri gamma, Paretovom a Weibullovom rozdelení očakáva program parametre `"shape"` a `"scale"`; pri log-normálnej distribúcii potrebujeme zadať `"meanlog"` a `"sdlog"`; v prípade Burrovho rozdelenia zadávame argumenty `"shape1"`, `"shape2"` a `"scale"`.

  `Príklady:`

```
DX1<-diskretizacia("pweibull", shape=0.5, scale=1.5)
DX2<-diskretizacia("pburr", shape1=1.5, shape2=6, scale=1.5)
DX3<-diskretizacia("pgamma", shape=23, scale=0.9)
```

- *odseknutie(method, ..., trun)*

  → Program vytvorí odseknuté rozdelenia pravdepobodnosti k-teho rádu, ktoré využívame pri modelovaní počtu nárokov. Metódu odseknutia (*truncate*) sme detailne popísali v podkapitole 2.5. Funkcia *odseknutie()* vytvorí odseknuté Poissonovo, binomické, negatívne binomické, rozšírené negatívne binomické a rozšírené logaritmické rozdelenie. Výstupom programu je vektor pravdepodobností

$$PQ = \Big(P(N=0),\ P(N=1),\ \dots\Big)' = \Big(0,\ \dots,\ 0,\ q_k,\ q_{k+1},\dots\Big)',$$

kde $N \sim Panjer(a,b,k)$.

→ Do parametra '*method*' môžeme zadať rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré patrí do triedy $\mathbb{P}_k$. Možné hodnoty parametra: `"ppois"`, `"pbinom"`, `"pnbinom"`, `"ETNB"`, `"ETLog"`.

→ Argument '...' obsahuje parametre uvedených rozdelení. V prípade Poissonovho rozdelenia zadávame parameter `"lambda"`; pri binomickom a negatívne binomickom rozdelení očakáva program parametre `"size"` a `"prob"`; pri ETNB-rozdelení potrebujeme zadať argumenty `"r"` a `"q"`; v prípade ETLog-rozdelenia zadávame parameter `"q"`.

→ Do parametra '*trun*' zadávame rád odseknutia: $trun = k$, kde k je rád požadovaného odseknutého rozdelenia a tiež stupeň príslušnej Panjerovej triedy.

Príklady:

```
Q1<-odseknutie("ppois",lambda=11,trun=4)
Q2<-odseknutie("pbinom",size=14,prob=0.3,trun=1)
Q3<-odseknutie("pnbinom",size=14,prob=0.3,trun=5)
Q4<-odseknutie("ETNB",r=-7.2,q=0.3,trun=8)
Q5<-odseknutie("ETLog",q=0.8,trun=6)
```

○ *konvolucia(j, DX, od=1, do=1000)*

→ Funkcia vypočíta konvolučnú distribučnú funkciu j-teho rádu, ktorá zodpovedá súčtu $X_1 + X_2 + \cdots + X_j$. Program používame pri rozšírenej Panjerovej rekurzii (viď vo Vete 4.). Predpokladáme pritom, že pre náhodné premenné $X_1, \dots, X_j$ platia všetky predpoklady, ktoré sme uviedli v podkapitole 1.5. Do argumentu '*j*' zadáme stupeň konvolúcie, parameter '*DX*' obsahuje rozdelenie náhodných premenných $X_i;\ i = 1, \dots, j$:

$$DX = \Big(P(X=0),\ P(X=1),\ P(=2),\ \dots \Big)'$$

<u>Poznámka</u>. *Vektor DX dostaneme napr. pomocou funkcie* diskretizacia().

Ďalšie podrobnosti o konvolučnej distribučnej funkcii nájdeme v [7].

→ Do argumentu '*od*' a '*do*' zadáme dolnú resp. hornú hranicu výpočtov. Výstupom funkcie je vektor pravdepodobností

$$\Big(P(X_1 + \dots + X_j = \underline{od} - 1),\ \dots,\ P(X_1 + \dots + X_j = \underline{do} - 1) \Big).$$

<u>`Príklady:`</u>

```
K1<-konvolucia(j=15, DX=DX3, od=1, do=300)
K2<-konvolucia(j=6,diskretizacia("pweibull",shape=0.5,scale=1.5))
```

4.3 Panjerova rekurzia v softvéri $\mathcal{R}$

Hlavný aplikačný program s názvom <u>Panjer.in.R(method,...,n,fx,k)</u> spočíta pravdepodobnosti $P(S = s);\ s = 0, 1, 2, \dots, n$ na základe rozšírenej Panjerovej rekurzie, ktorú sme uviedli vo Vete 4. Predpokladajme, že platia všetky označnenia a predpoklady z tretej kapitoly a z Vety 4.

Do parametra '*method*' zadáme rozdelenie náhodnej premennej $N \sim Panjer(a, b, k)$. Možné hodnoty parametra '*method*' sú: `"Po"`, `"Bin"`, `"NegBin"`, `"ETNB"`, `"ETLog"`. Argument '...' obsahuje parametre vyššie uvedených distribúcií. V prípade Poissonovho rozdelenia zadávame parameter `"lambda"`; pri binomickom a negatívne binomickom rozdelení očakáva program parametre `"size"` a `"prob"`; pri ETNB-rozdelení potrebujeme zadať argumenty `"r"` a `"q"`; v prípade ETLog-rozdelenia zadávame parameter `"q"`.

Do ďaľšieho parametra '<u>n</u>' zadáme hornú hranicu výpočtov. Výstupom z programu bude vektor obsahujúci pravdepodobnosti $P(S = 0),\ P(S = 1), \dots, P(S = n)$.

Do argumentu '*fx*' napíšeme rozdelenie náhodnej premennej X, ktorá vyjadruje v modeli kolektívneho rizika výšku nárokov. Program očakáva toto rozdelenie v tvare vektora *fx* $= (f_0 = 0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \dots)'$, čo je v súlade s predpokladmi Vety 4.

Posledný parameter '<u>k</u>' obsahuje stupeň Panjerovej triedy $\mathbb{P}_k$. Predvolená hodnota tohto parametra je $k = 0$, teda program štandardne počíta pravdepodobnosti $P(S = s);\ s = 0, 1, 2, \ldots, n$ na základe klasickej Panjerovej rekurzie. Ak zadáme nejaké číslo $k \in \mathbb{N}$, tak bude $P(S = 0) = P(S = 1) = \cdots = P(S = k - 1) = 0$, a ďalšie pravdepodobnosti $P(S = k),\ P(S = k + 1),\ \ldots$ vypočíta program podľa rozšírenej Panjerovej rekurzie.

Aplikačný program *Panjer.in.R()* využíva viacero pomocných funkcií. Okrem tých programov, ktoré som popísal v podkapitole 4.2, som naprogramoval v softvéri $\mathcal{R}$ aj ďalšie pomocné funkcie: *panjer.poisson(), panjer.binom(),panjer.negbin(), panjer.ETNB(), panjer.ETLog()*. Tieto aplikácie nám spočítajú pravdepodobnosti $P(S = s);\ s = 0, 1, 2, \ldots, n$ pomocou rekurentnej metódy. V skutočnosti náš hlavný program *Panjer.in.R()* len „pozbiera" potrebné parametre od užívateľa, zavolá potrebné pomocné funkcie a vypíše výsledný vektor pravdepodobností. Zdrojové kódy týchto programov a zdrojový kód hlavnej aplikácie sú uvedené v Prílohe č. 4.

Príklady:

```
DX.gamma<-diskretizacia("pgamma", shape=1.4, scale=2.54)
PX0<-DX.gamma[1]; DX.gamma[1]<-0; DX<-DX.gamma/(1-PX0)
lambda<-20; n<-300; k<-1
POIS<-Panjer.in.R(method="Po", lambda=lambda ,n=n, fx=DX, k=k)

DX.W<-diskretizacia("pweibull",shape=1.4,scale=2.54)
PX0<-DX.W[1]; DX.W[1]<-0; DX<-DX.W/(1-PX0)
size<-20; prob<-0.78; n<-200; k<-5
BIN<-Panjer.in.R(method="Bin", size=size, prob=prob, n=n, fx=DX, k=k)

DX.LN<-diskretizacia("plnorm",meanlog=2.21,sdlog=0.51)
PX0<-DX.LN[1]; DX.LN[1]<-0; DX<-DX.LN/(1-PX0)
r<-8.11; q<-0.55; n<-250; k<-9
ETNB<-Panjer.in.R(method="ETNB", r=r, q=q, n=n, fx=DX, k=k)
```

5. Praktická úloha

Zadanie úlohy

Poisťovňa ponúka svojim klientom určitý typ neživotného poistenia, ktoré sa prevádzkuje už 20 rokov. Na základe dlhoročných skúseností poisťovňa zistila, že výšky nahlásených nárokov majú modifikované Paretovo rozdelenie s parametrami $\alpha = 4$ a $\beta = 3$, kým počty nárokov za jednotlivé roky majú Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda = 10$.

Poznámka. Modifikované Paretovo rozdelenie vytvoríme tak, že po diskretizácii originálneho Paretovho rozdelenia položíme prvú pravdepodobnosť $P(\tilde{X} = 0)$ rovnú nule a následne upravíme ostatné pravdepodobnosti $P(\tilde{X} = 1),\ P(\tilde{X} = 2), \ldots$ tak, aby ich súčet bol rovný jednej.

Vývoj výšok a počtu nárokov v budúcom roku modelujeme pomocou spomínaných distribúcií (modifikovaným Paretovým resp. Poissonovým rozdelením).

(a) Použitím Panjerovej rekurzie nájdime rozdelenie celkového počtu nárokov v budúcom roku a 95-percentný kvantil tohto rozdelenia.

(b) Predpokladajme, že celková výška nárokov má asymptoticky normálne rozdelenie. Pomocou 1. a 2. Waldovej identity nájdime 95-percentný kvantil rozdelenia celkovej výšky nárokov.

Riešenie úlohy

Zoberieme označenia, ktoré sme zaviedli v prvej kapitole tejto práce:

- $X_i;\ i = 1, 2, \ldots$ označujú výšky poistných nárokov
- N je počet nahlásených nárokov (za jeden rok)
- $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ označuje celkovú výšku nárokov (za jeden rok)

(a) Pri riešení úlohy používame hlavný aplikačný program Panjer.in.R(). Nech premenná 'DX' obsahuje rozdelenie náhodných premenných $X_i;\ i = 1, 2, \ldots$:

```
DX.pareto<-diskretizacia("ppareto",shape=4,scale=3)
PX0<-DX.pareto[1]; DX.pareto[1]<-0; DX<-DX.pareto/(1-PX0)
```

Zadáme aj ostatné premenné:

```
lambda<-10; n<-200; k<-0
```

Zavoláme hlavný aplikačný program a vypíšeme výsledný vektor v prehľadnej forme:

```
PS<-Panjer.in.R(method="Po",lambda=lambda,n=n,fx=DX,k=k)
  PSS<-rep(0,times=202)
  for(i in 1:201) PSS[i]<-paste("P(S =",i-1,") = ")
write.table(matrix(c(PSS,PS),ncol=2),file="PS.txt")
```

Výsledný vektor pravdepodobností $P(S = s);\ s = 0, \ldots, n$ je uvedený v Prílohe č. 5.

Teraz budeme hľadať 95-percentný kvantil rozdelenia náhodnej premennej S. Chceme teda, aby platilo $P(S < t) = 0.95$. Neznámu veličinu t nájdeme pomocou funkcie panjer.kvantil(), ktorú sme naprogramovali v softvéri $\mathcal{R}$. Spomínaná funkcia je uvedená v Prílohe č. 6.

```
t1<-panjer.kvantil(PS,alfa=0.95)
```

Po zavolaní pomocného programu sme dostali výsledok (95%-ný kvantil): $t_1 = 34$.

(b) Predpokladáme teraz, že S má asymptoticky normálne rozdelenie. Platí teda vzťah:

$$P(S < t_2) = P\left(\frac{S - E[S])}{\sqrt{D[S]}} < \frac{t_2 - E[S]}{\sqrt{D[S]}}\right) = \Phi\left(\frac{t_2 - E[S]}{\sqrt{D[S]}}\right), \qquad (**)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$.

Neznáme veličiny $E[S]$ a $D[S]$ nájdeme použitím 1. a 2. Waldovej identity, ktoré sme odvodili v podkapitole 1.5 (viď v Tvrdení 4.):

$$E[S] = E(N)E(X_1) \qquad D[S] = E(X_1)^2 D(N) + D(X_1)E(N)$$

$E(X), D(X), E(N), D(N)$ hľadáme simulačnou metódou v softvéri $\mathcal{R}$.

Naprogramovali sme pomocnú funkciu s.simulation(n, lam, sha, sc):

- '*n*' je počet simulácií,
- '*lam*' je parameter Poissonovho rozdelenia,
- '*sha*' a '*sc*' sú argumenty upraveného Paretovho rozdelenia.

Výstupom z funkcie je vektor (EX, EN, DX, DN).
Pomocný program s.simulation() je uvedený v Prílohe č. 7.

Spustíme spomínanú funkciu, aplikujeme Waldove identity a rovnicu (∗∗). Následne vypíšeme 95-percentný kvantil rozdelenia náhodnej premennej S.

```
n<-240; lambda<-10; shape<-4; scale<-3;
sim1<-s.simulation(n=n,lam=lambda,sha=shape,sc=scale)
ES<-sim1$EN*sim1$EX
DS<-sim1$EX*sim1$EX*sim1$DN + sim1$DX*sim1$EN
t2<-sqrt(DS)*qnorm(0.95)+ES
t2
```

Pri tejto konkrétnej simulácii sme dostali 95%-ný kvantil $t_2 = 29,5$.

Porovnanie výsledkov

Všimnime si, že pri Panjerovej rekurentnej metóde sme dostali väčší 95-percentný kvantil ako pri aproximácii náhodnej veličiny S normálnym rozdelením $(34 > 29,5)$. V praxi sa teda ukázalo, že aproximácia celkovej výšky nárokov normálnym rozdelením nie je najvhodnejším riešením, lebo normálny model podceňuje veľké hodnoty náhodnej premennej S (môžeme taktiež hovoriť, že „pravý chvost krivky normálneho rozdelenia príliš rýchlo klesá k nule"). V teórii neživotného poistenia je pritom veľmi dôležité, aby sme efektívne odhadli aj odľahlé hodnoty náhodnej veličiny S. V praxi sa potvrdilo, že Panjerova rekurzia je vo väčšine prípadov vhodnou metódou na modelovanie celkovej výšky nárokov.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo popísať Panjerove podtriedy rozdelení a Panjerovu rekurziu. V prvej kapitole sme zadefinovali model kolektívneho rizika, spomenuli sme jeho konštrukciu a vlastnosti. Potom sme uviedli tie rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré sa v praxi používajú na modelovanie počtu a výšky nahlásených nárokov. V ďalšej časti sme definovali Panjerove podtriedy rozdelení a napísali sme aj Panjerovu vetu o spomínanej rekurentnej metóde. Keďže základná Panjerova rekurzia sa dá použiť len v prípade, keď počet nárokov má Poissonovo, binomické alebo negatívne binomické rozdelenie, rozšírili sme rekurentnú metódu aj pre iné distribúcie. Zadefinovali sme odseknuté verzie Poissonovho, binomického a negatívneho binomického rozdelenia, popísali sme rozšírené odseknuté logaritmické a rozšírené odseknuté negatívne binomické rozdelenie.

V tretej kapitole je uvedená a dokázaná veta o rozšírenej Panjerovej rekurzii. Následne sme vytvorili aplikačný program v softvéri $\mathcal{R}$, ktorý vyčísli rozdelenie celkovej sumy nárokov práve pomocou spomínanej rekurentnej metódy. K hlavnému programu sme potrebovali naprogramovať aj niekoľko pomocných funkcií, ktoré spočítajú konvolučné, zdiskretizované resp. odseknuté rozdelenia. V poslednej kapitole sme úspešne vyriešili modelovú praktickú úlohu použitím hlavného aplikačného programu. V rámci praktického príkladu sme porovnali Panjerovu metódu s normálnou aproximáciou celkovej sumy nárokov, na základe čoho sme dospeli k záveru, že v praxi je Panjerova rekurzia vhodnejšia na modelovanie celkovej výšky nárokov ako asymptoticky normálny model.

Literatúra

⌊1⌋ ANDĚL, J. 2007. *Základy matematickej štatistiky.* 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. 18-27 s. ISBN 80-7378-001-1

⌊2⌋ DICKSON, D. 2005. *Insurance. Risk and Ruin.* Cambridge: Cambridge Univesity Press, 2005. 64-89 p. ISBN 0-521-84640-4

⌊3⌋ EUROEKONÓM.SK: *Ekonomická príručka moderného ekonóma,* ⌊online⌋. Vybrané heslá dostupné na: <http://www.euroekonom.sk/poradna/ekonomicky-slovnik/>

⌊4⌋ HESS, K. - LIEWALD, A. - SCHMIDT, K. 2002. *An Extension of Panjer's Recursion.* Dresden: Technische Universität Dresden, 2002. 1-13 p.

⌊5⌋ LUNDBERG, F. 1903. *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Aterförsäkring av kollektivrisker.* Uppsala: Akad. Afhandling. Almqvist och Wiksell, 1903. 7-9 p.

⌊6⌋ MATHWAVE.COM: *Data analysis and simulation.* ⌊online⌋. Vybrané heslá dostupné na: <http://www.mathwave.com/help/easyfit/html/ analyses/distributions/burr.html>

⌊7⌋ MIKO, T. 2007. *Rozšírenie Panjerovej rekurzie v modeli kolektívneho rizika.* Diplomová práca. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2007.

⌊8⌋ MIKOSCH, T. 2006. *Non-Life Insurance Mathematics.* Copenhagen: Springer, University of Copenhagen, 2006. 7-11 p. ISBN 10 3-540-40650-6

⌊9⌋ PANJER, H. H. 1981. *Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions.* Astin Bulletin 12, 1981, 22-26 p.

⌊10⌋ PANJER, H. H. - WILLMOT, G. E. 1992. *Insurance Risk Models.* Society of actuaries, AERF, 1992. ISBN 10 0-938-95925-5

⌊11⌋ R Development Core Team. 2011. *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

⌊12⌋ RÉNYI, A. 1972. *Teórie pravděpodobnosti.* 1. vyd. Praha: Academia, 1972. čj. 29005/69 - III/2

⌊13⌋ WIKIPEDIA.ORG: *On-line encyklopédia,* ⌊online⌋. Vybrané heslá dostupné na:

a; <http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution>

b; <http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution>

c; <http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution>

d; <http://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution>

e; <http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution>

f; <http://en.wikipedia.org/wiki/Probability-generating_function>

Prílohy

Príloha č. 1. - diskretizacia()

```
diskretizacia<-function(method,...)
{ par<-list(...)
if(method=="pexp") {
  if (!"rate" %in% names(par)) stop("Chyba parameter 'rate'.")
    lambda<-par$rate
  if (lambda<0 | lambda==0)
            stop("Parameter 'rate' musi byt vacsi ako nula.")
  k<-as.array(seq(from=1,to=1000+lambda,by=1))
  l<-as.array(seq(from=0,to=999+lambda,by=1))
    horna<-apply(k,1,method,rate=lambda)
    dolna<-apply(l,1,method,rate=lambda)
  disk.nah.prem<-(horna-dolna)
  }
if(method=="pgamma" | method=="ppareto" | method=="pweibull") {
   if (!all(c("shape","scale") %in% names(par)))
     stop("Chyba niektory z pozadovanych parametrov 'shape' a 'scale'.")
  sha<-par$shape; sca<-par$scale;
    if (sha<0 | sha==0 | sca<0 | sca==0)
       stop("Parametere 'shape' a 'scale' musia byt vacsie ako nula.")
  k<-as.array(seq(from=1,to=1000+sha,by=1))
  l<-as.array(seq(from=0,to=999+sha,by=1))
    if(method=="pgamma") {
      horna<-apply(k,1,method,shape=sha,scale=sca)
      dolna<-apply(l,1,method,shape=sha,scale=sca)
      }
    if(method=="ppareto") {
      library(actuar)
      horna<-apply(k,1,method,shape=sha,scale=sca)
      dolna<-apply(l,1,method,shape=sha,scale=sca)
      }
    if(method=="pweibull") {
      library(stats)
      horna<-apply(k,1,method,shape=sha,scale=sca)
      dolna<-apply(l,1,method,shape=sha,scale=sca)
      }
 disk.nah.prem<-(horna-dolna)
}
if(method=="plnorm") {
    if (!all(c("meanlog","sdlog") %in% names(par)))
     stop("Chyba niektory z pozadovanych parametrov 'meanlog' a 'sdlog'.")
  mean<-par$meanlog; sd<-par$sdlog;
  if (mean<0 | mean==0 | sd<0 | sd==0)
     stop("Parametere 'meanlog' a 'sdlog' musia byt vacsie ako nula.")
  library(stats)
  k<-as.array(seq(from=1,to=1000+mean,by=1))
  l<-as.array(seq(from=0,to=999+mean,by=1))
    horna<-apply(k,1,method,meanlog=mean,sdlog=sd)
```

```
    dolna<-apply(l,1,method,meanlog=mean,sdlog=sd)
  disk.nah.prem<-(horna-dolna)
  }
if(method=="pburr") {
  if (!all(c("shape1","shape2","scale") %in% names(par)))
    stop("Chyba niektory z pozadovanych
           parametrov 'shape1', 'shape2' a 'scale'.")
  sha1<-par$shape1; sha2<-par$shape2; sca<-par$scale;
  if (sha1<0 | sha1==0 | sha2<0 | sha2==0 | sca<0 | sca==0)
    stop("Parametere 'shape1', 'shape2' a 'scale'
 musia byt vacsie ako nula.")
  library(actuar)
  k<-as.array(seq(from=1,to=1000+sha1+sha2,by=1))
  l<-as.array(seq(from=0,to=999+sha1+sha2,by=1))
    horna<-apply(k,1,method,shape1=sha1,shape2=sha2,scale=sca)
    dolna<-apply(l,1,method,shape1=sha1,shape2=sha2,scale=sca)
  disk.nah.prem<-(horna-dolna)
  }
disk.nah.prem
}
```

Príloha č. 2. - odseknutie()

```
odseknutie<-function(method,...,trun)
{ ## funkcia, ktora vypocita pravdepodobnosti P(N=n) = p_n
  ## trun = t = k: pocet odseknutych pravdepodobnosti
  ## odseknute pravdepodobnosti: p_0, p_1, ..., p_(t-1)
  ## method: zakladna teoreticka pravdepodobnost
  ## method = {"ppois","pbinom","pnbinom","ETNB","ETLog"}
par<-list(...);    k<-trun
   if (floor(trun)!=trun | trun<=0)
            stop("Paramater 'trun' musi byt prirodzene cislo.")
if(method=="ppois"){
   if (!"lambda" %in% names(par)) stop("Chyba parameter 'lambda'.")
       lambda<-par$lambda; k<-trun
   if (lambda<0 | lambda==0)
            stop("Parameter 'lambda' musi byt vacsi ako nula.")
   suma.k<-apply(as.array(k-1),1,method,lambda=lambda)
   PN<-rep(0,times=k+lambda+1000); dlz<-length(PN)
     v1<-as.array(seq(from=k,to=1000+lambda+k,by=1))
     v2<-as.array(seq(from=k-1,to=999+lambda+k,by=1))
   horna<-apply(v1,1,method,lambda=lambda)
   dolna<-apply(v2,1,method,lambda=lambda)
     for(i in 1:(dlz-k)) PN[i+k]<-horna[i]-dolna[i]
   PQ<-PN/(1-suma.k)
   }
if(method=="pbinom"){
  if (!all(c("size","prob") %in% names(par)))
     stop("Chyba niektory z pozadovanych parametrov 'size' a 'prob'.")
   size<-par$size; prob<-par$prob
   if (prob<=0 | prob>=1)
```

```
        stop("Parameter 'prob' musi byt z intervalu (0;1)")
  if (size<=k | floor(size)!=size | size<=0)
        stop("Parameter 'size' musi byt prirodzene cislo vacsie ako 'trun'.")
  suma.k<-apply(as.array(k-1),1,method,size=size,prob=prob)
  PN<-rep(0,times=size+1); dlz<-length(PN)
    v1<-as.array(seq(from=k,to=size+1,by=1))
    v2<-as.array(seq(from=k-1,to=size+1,by=1))
      horna<-apply(v1,1,method,size=size,prob=prob)
      dolna<-apply(v2,1,method,size=size,prob=prob)
    for(i in 1:(dlz-k)) PN[i+k]<-horna[i]-dolna[i]
  PQ<-PN/(1-suma.k)
  }
if(method=="pnbinom"){
  if (!all(c("size","prob") %in% names(par)))
       stop("Chyba niektory z pozadovanych parametrov 'size' a 'prob'.")
     size<-par$size; prob<-par$prob;
  if (prob<=0 | prob>=1)
          stop("Parameter 'prob' musi byt z intervalu (0;1)")
  if (size<=0)
          stop("Parameter 'size' musi byt kladny.")
  suma.k<-apply(as.array(k-1),1,method,size=size,prob=prob)
  PN<-rep(0,times=floor(size)+1000+k); dlz<-length(PN)
    v1<-as.array(seq(from=k,to=floor(size)+1000+k,by=1))
    v2<-as.array(seq(from=k-1,to=floor(size)+1000+k,by=1))
      horna<-apply(v1,1,method,size=size,prob=prob)
      dolna<-apply(v2,1,method,size=size,prob=prob)
    for(i in 1:(dlz-k)) PN[i+k]<-horna[i]-dolna[i]
  PQ<-PN/(1-suma.k)
  }
if(method=="ETNB"){
  if (!all(c("r","q") %in% names(par)))
      stop("Chyba niektory parameter z pozadovanych parametrov 'r' a 'q'.")
  if (trun<1)
          stop("Paramater 'trun' musi byt vacsie ako 0.")
  r<-par$r; q<-par$q; t<-trun
  if (q<=0 | q>1)
          stop("Parameter 'q' musi byt z intervalu (0;1>")
  if (r<=-trun | r>=-trun+1)
          stop("Parameter 'r' musi padnut do intervalu (-trun,-trun+1).")
  PN<-rep(0,times=r+1000+t); dlz<-length(PN); suma1<-0
for(j in 0:(t-1)) suma1<-suma1+ choose(r+j-1,j)*q^j
    menovatel<-(1-q)^(-r) - suma1
  for(n in t:(1000+r+t)) { PN[n+1]<- (choose(r+n-1,n)*(q^n))/menovatel }
  PQ<-PN
  }
if(method=="ETLog"){
  if (!"q" %in% names(par))
          stop("Chyba parameter 'q'.")
  if (trun<1)
          stop("Paramater 'trun' musi byt vacsie ako 0.")
```

```
   q<-par$q; t<-trun
   if (q<=0 | q>1)
            stop("Parameter 'q' musi byt z intervalu (0;1>")
   PN<-rep(0,times=1000+t); dlz<-length(PN); suma1<-0
for(j in t:(t+1000)) suma1<-suma1+(1/choose(j,t))*q^j
     menovatel<-suma1
   for(n in t:(1000+t)) { PN[n+1]<-(1/choose(n,t))*(q^n)/menovatel }
   PQ<-PN
   }
PQ
}
```

Príloha č. 3. - konvolucia()

```
konvolucia<-function(j, DX, od=1, do=1000)
{  ## stupen konvolucie: 'j'
   ## paremeter 'DX' obsahuje rozdelenie pravdepodobnosti n.p. X
 H<-do
   KX<-matrix(0,ncol=(H+1),nrow=(j+1))
   KX[1,]<- c(1,rep(0,times=H))
   for(s in 0:H) KX[2,s+1]<-DX[s+1]
 if(j>2) {
    for(jj in 3:j) {
        for(s in 0:H)   {
            for(i in 0:s)   {
               KX[jj,s+1]<- KX[jj,s+1] + KX[jj-1,s-i+1]*DX[i+1]
              }
          }
     }
  }
KX[j,od:do]
}
```

Príloha č. 4.

```
panjer.poisson<-function(krok,n,lambda,fx,S0,QF,k)
{ if(krok==0) {W<-0}
  else { M<-0; s<-n-krok+2+sign(k)*(k-1); Z<-S0;
     for(j in 2:s) {
            M<- M + ((j-1)/(s-1))*lambda*fx[j]*Z[s+1-j]
           }
     M<-M + QF[s-k]
     W<-c(M,panjer.poisson(krok-1,n,lambda,fx,c(Z,M),QF,k))
       }
}
panjer.binom<-function(krok,n,size,prob,fx,S0,QF,k=0)
{ if(krok==0) {W<-0}
   else { M<-0; s<-n-krok+2+sign(k)*(k-1); Z<-S0
      for(j in 2:s) {
            M<- M + (-prob/(1-prob)+((j-1)/(s-1))*
                 (size+1)*prob/(1-prob))*fx[j]*Z[s+1-j] }
      M<-M + QF[s-k]
```

```
      W<-c(M,panjer.binom(krok-1,n,size,prob,fx,c(Z,M),QF,k))
   }
}
panjer.negbin<-function(krok,n,size,prob,fx,S0,QF,k=0)
{ if(krok==0) {W<-0}
  else { M<-0; s<-n-krok+2+sign(k)*(k-1); Z<-S0;
     for(j in 2:s) {
           M<- M + (prob+((j-1)/(s-1))*(size-1)*prob)*fx[j]*Z[s+1-j]
          }
     M<-M + QF[s-k]
     W<-c(M,panjer.negbin(krok-1,n,size,prob,fx,c(Z,M),QF,k))
  }
}
panjer.ETNB<-function(krok,n,r,q,fx,S0,QF,k=1)
{ if(krok==0) {W<-0}
  else { M<-0;  s<-n-krok+2+k-1; Z<-S0;
     for(j in 2:s) {
           M<- M + (q+((j-1)/(s-1))*(r-1)*q)*fx[j]*Z[s+1-j]
          }
     M<-M+QF[s-k]
     W<-c(M,panjer.ETNB(krok-1,n,r,q,fx,c(Z,M),QF,k))
  }
}
panjer.ETLog<-function(krok,n,q,fx,S0,QF,k=1)
{ if(krok==0) {W<-0}
  else { M<-0;  s<-n-krok+2+k-1; Z<-S0;
     for(j in 2:s) {
           M<- M + (q-((j-1)/(s-1))*k*q)*fx[j]*Z[s+1-j]
          }
     M<-M+QF[s-k]
     W<-c(M,panjer.ETLog(krok-1,n,q,fx,c(Z,M),QF,k))
  }
}

Panjer.in.R<-function(method,...,n,fx,k=0)
{  ## method = {"Po","Bin","NegBin","ETNB","ETLog"}
   ## ... = parametre vyssie uvedenych rozdeleni
   ## n = pocet pravdepodobnosti, ktore chceme vypocitat
   ## fx = vektor pravdepodobnosti P(X=0)=0, P(X=1), P(X=2),...
   ## k = stupen Panjerovej triedy rozdeleni
par<-list(...); krok<-n
   if (floor(k)!=k | k<0)
       stop("Paramater 'k' musi byt nezaporne cele cislo.")
   if (floor(n)!=n | n<=0)
       stop("Paramater 'n' musi byt prirodzene cislo.")
if(method=="Po"){
     if (!"lambda" %in% names(par))  stop("Chyba parameter 'lambda'.")
       lambda<-par$lambda;  DX<-fx
     if (lambda<=0) stop("Paramater 'lambda' musi byt kladne cislo.")
```

```
  if(k==0) {
     S0<-exp((-1)*(lambda))
     QF<-rep(0,times=n+k+1)
     VS<-c(S0,panjer.poisson(krok,n,lambda=lambda,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=0))
  }
  else {
     S0<-rep(0,times=k)
     QF<-odseknutie("ppois",lambda=lambda,trun=k)[k+1] *
         konvolucia(j=(k+1), DX=DX, od=k+1, do=n+k+1)
     VS<-c(S0,panjer.poisson(krok,n,lambda=lambda,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=k))
  }
}
if(method=="Bin"){
     if (!all(c("size","prob") %in% names(par)))
   stop("Chyba niektory parameter z pozadovanych parametrov 'size' a 'prob'.")
        size<-par$size; prob<-par$prob;  DX<-fx
   if (prob<=0 | prob>=1) stop("Parameter 'prob' musi byt z intervalu (0;1)")
   if (floor(size)!=size | size<=0)
       stop("Paramater 'size' musi byt prirodzene cislo.")
  if(k==0) {
     S0<-(1-prob)^size
     QF<-rep(0,times=n+k+2)
     VS<-c(S0,panjer.binom(krok,n,size=size,prob=prob,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=0))
  }
  else {
     S0<-rep(0,times=k)
     QF<-odseknutie("pbinom",size=size,prob=prob,trun=k)[k+1] *
         konvolucia(j=(k+1), DX=DX, od=k+1, do=n+k+2)
     VS<-c(S0,panjer.binom(krok,n,size=size,prob=prob,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=k))
  }
}
if(method=="NegBin"){
     if (!all(c("size","prob") %in% names(par)))
    stop("Chyba niektory parameter z pozadovanych parametrov 'size' a 'prob'.")
    size<-par$size; prob<-par$prob;  DX<-fx
     if (prob<=0 | prob>=1) stop("Parameter 'prob' musi byt z intervalu (0;1)")
     if (size<=0) stop("Paramater 'size' musi byt kladne cislo.")
  if(k==0) {
     S0<-(1-prob)^size
     QF<-rep(0,times=n+k+2)
     VS<-c(S0,panjer.negbin(krok,n,size=size,prob=prob,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=0))
  }
  else {
     S0<-rep(0,times=k)
     QF<-odseknutie("pnbinom",size=size,prob=prob,trun=k)[k+1] *
         konvolucia(j=(k+1), DX=DX, od=k+1, do=n+k+2)
     VS<-c(S0,panjer.negbin(krok,n,size=size,prob=prob,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=k))
  }
}
if(method=="ETNB"){
```

```
     if (!all(c("r","q") %in% names(par)))
  stop("Chyba niektory parameter z pozadovanych parametrov 'r' a 'q'.")
    r<-par$r; q<-par$q;  DX<-fx
  if (k<1) stop("Parameter 'k' musi byt vacsie ako 0.")
  if (q<=0 | q>1) stop("Parameter 'q' musi byt z intervalu (0;1>")
  if (r<=-k | r>=(-k+1)) stop("Paramater 'r' musi byt z intervalu (-k,-k+1).")
  S0<-rep(0,times=k)
  QF<-odseknutie("ETNB",r=r,q=q,trun=k)[k+1] *
      konvolucia(j=(k+1), DX=DX, od=k+1, do=n+k+2)
  VS<-c(S0,panjer.ETNB(krok,n,r=r,q=q,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=k))
}
if(method=="ETLog"){
     if (!"q" %in% names(par))  stop("Chyba parameter 'q'.")
         q<-par$q;  DX<-fx
     if (k<1) stop("Parameter 'k' musi byt vacsie ako 0.")
     if (q<=0 | q>1) stop("Parameter 'q' musi byt z intervalu (0;1>")
  S0<-rep(0,times=k)
  QF<-odseknutie("ETLog",q=q,trun=k)[k+1] *
      konvolucia(j=(k+1), DX=DX, od=k+1, do=n+k+2)
  VS<-c(S0,panjer.ETLog(krok,n,q=q,fx=DX,S0=S0,QF=QF,k=k))
}
VS
}
```

Príloha č. 5. - Rozdelenie náhodnej premennej S z praktickej úlohy

P(S=0)=4.53999297624849e-05	P(S=47)=0.00100368426270716
P(S=1)=0.000268041185317711	P(S=48)=0.0008518679623417
P(S=2)=0.00088753681776011	P(S=49)=0.00072389776860146
P(S=3)=0.0021668999920848	P(S=50)=0.00061601371893296
P(S=4)=0.00434222609821359	P(S=51)=0.000525030806043312
P(S=5)=0.00755481274613538	P(S=52)=0.000448258031612759
P(S=6)=0.0118080019287857	P(S=53)=0.000383426738690939
P(S=7)=0.0169582338382767	P(S=54)=0.000328627792200367
P(S=8)=0.0227375927685926	P(S=55)=0.000282256975790546
P(S=9)=0.0287974305746416	P(S=56)=0.000242967866260524
P(S=10)=0.0347601905456108	P(S=57)=0.000209631406497294
P(S=11)=0.0402680977406132	P(S=58)=0.000181301403235567
P(S=12)=0.0450210530511281	P(S=59)=0.0001571852109833
P(S=13)=0.048800193977083	P(S=60)=0.000136618916402446
P(S=14)=0.0514770672628743	P(S=61)=0.000119046399803643
P(S=15)=0.053010701313876	P(S=62)=0.000104001716271533
P(S=16)=0.0534360288673834	P(S=63)=9.10943042797041e-05
P(S=17)=0.0528473148596417	P(S=64)=7.99965919132634e-05
P(S=18)=0.0513798117089399	P(S=65)=7.04336284703507e-05
P(S=19)=0.0491921042970136	P(S=66)=6.21744214821219e-05
P(S=20)=0.0464507625241892	P(S=67)=5.50247058072213e-05
P(S=21)=0.0433181495143447	P(S=68)=4.88209124954511e-05
P(S=22)=0.0399436213284375	P(S=69)=4.34251408648252e-05
P(S=23)=0.0364579247281765	P(S=70)=3.87209681090754e-05
P(S=24)=0.0329703412603762	P(S=71)=3.46099572221992e-05
P(S=25)=0.029568007365404	P(S=72)=3.10087465835371e-05
P(S=26)=0.026316823514999	P(S=73)=2.78466236712343e-05
P(S=27)=0.0232634144652813	P(S=74)=2.50635015158197e-05
P(S=28)=0.0204376875369051	P(S=75)=2.26082300834083e-05
P(S=29)=0.0178556339386089	P(S=76)=2.04371861619524e-05
P(S=30)=0.0155221143924253	P(S=77)=1.85130948433382e-05
P(S=31)=0.0134334557368112	P(S=78)=1.68040436366891e-05
P(S=32)=0.0115797555203101	P(S=79)=1.52826568629391e-05
P(S=33)=0.00994684585555303	P(S=80)=1.39254034812001e-05
P(S=34)=0.00851790701506939	P(S=81)=1.27120160657401e-05
P(S=35)=0.00727474753409976	P(S=82)=1.16250024428357e-05
P(S=36)=0.00619878347371145	P(S=83)=1.06492346394966e-05
P(S=37)=0.00527175750589756	P(S=84)=9.77160240043625e-06
P(S=38)=0.00447624086419218	P(S=85)=8.98072068719985e-06
P(S=39)=0.00379595983546808	P(S=86)=8.26668236047707e-06
P(S=40)=0.00321598482505045	P(S=87)=7.62084872693911e-06
P(S=41)=0.00272281520516417	P(S=88)=7.03567185833591e-06
P(S=42)=0.00230438792855832	P(S=89)=6.50454360692469e-06
P(S=43)=0.00195003276483974	P(S=90)=6.021667083925e-06
P(S=44)=0.00165039230489329	P(S=91)=5.58194706667946e-06
P(S=45)=0.00139732073973012	P(S=92)=5.18089638040811e-06
P(S=46)=0.00118377191293772	P(S=93)=4.81455578242505e-06

P(S=94)=4.47942527740402e-06
P(S=95)=4.17240512574712e-06
P(S=96)=3.89074508489046e-06
P(S=97)=3.63200065502116e-06
P(S=98)=3.39399529406514e-06
P(S=99)=3.17478772844424e-06
P(S=100)=2.97264362137721e-06
P(S=101)=2.78601097385447e-06
P(S=102)=2.61349872853483e-06
P(S=103)=2.45385812673427e-06
P(S=104)=2.30596643592733e-06
P(S=105)=2.1688127218499e-06
P(S=106)=2.04148538711503e-06
P(S=107)=1.9231612386694e-06
P(S=108)=1.81309588062895e-06
P(S=109)=1.71061525803189e-06
P(S=110)=1.61510820167024e-06
P(S=111)=1.52601984509769e-06
P(S=112)=1.44284580274289e-06
P(S=113)=1.36512701326759e-06
P(S=114)=1.29244516530312e-06
P(S=115)=1.22441863381736e-06
P(S=116)=1.16069886489354e-06
P(S=117)=1.10096715488045e-06
P(S=118)=1.04493177690482e-06
P(S=119)=9.92325413789543e-07
P(S=120)=9.42902861641844e-07
P(S=121)=8.96438972882893e-07
P(S=122)=8.5272681138994e-07
P(S=123)=8.11575995799141e-07
P(S=124)=7.72811209947233e-07
P(S=125)=7.36270861975491e-07
P(S=126)=7.01805875833767e-07
P(S=127)=6.69278600852234e-07
P(S=128)=6.38561826731375e-07
P(S=129)=6.09537892772025e-07
P(S=130)=5.82097881454317e-07
P(S=131)=5.56140887601595e-07
P(S=132)=5.31573355354563e-07
P(S=133)=5.08308476050188e-07
P(S=134)=4.86265640864072e-07
P(S=135)=4.65369942748212e-07
P(S=136)=4.45551722789732e-07
P(S=137)=4.26746156640153e-07
P(S=138)=4.08892877128183e-07
P(S=139)=3.91935629579562e-07
P(S=140)=3.75821956730509e-07
P(S=141)=3.60502910444141e-07
P(S=142)=3.45932787725331e-07
P(S=143)=3.32068888784354e-07
P(S=144)=3.18871295126404e-07
P(S=145)=3.06302665845945e-07
P(S=146)=2.94328050485018e-07
P(S=147)=2.8291471697598e-07
P(S=148)=2.72031993332963e-07
P(S=149)=2.61651121885013e-07
P(S=150)=2.51745124959428e-07
P(S=151)=2.42288681027092e-07
P(S=152)=2.33258010414324e-07
P(S=153)=2.24630769769597e-07
P(S=154)=2.16385954548536e-07
P(S=155)=2.08503808847875e-07
P(S=156)=2.00965741979743e-07
P(S=157)=1.93754251232537e-07
P(S=158)=1.86852850314481e-07
P(S=159)=1.8024600302065e-07
P(S=160)=1.73919061704545e-07
P(S=161)=1.67858210171837e-07
P(S=162)=1.62050410647182e-07
P(S=163)=1.56483354494882e-07
P(S=164)=1.51145416401559e-07
P(S=165)=1.46025611753717e-07
P(S=166)=1.41113556965469e-07
P(S=167)=1.36399432531945e-07
P(S=168)=1.31873948602838e-07
P(S=169)=1.27528312887522e-07
P(S=170)=1.23354200718173e-07
P(S=171)=1.19343727111196e-07
P(S=172)=1.15489420680533e-07
P(S=173)=1.11784199268112e-07
P(S=174)=1.08221347167485e-07
P(S=175)=1.04794493826266e-07
P(S=176)=1.01497593921734e-07
P(S=177)=9.83249087121544e-08
P(S=178)=9.5270988574148e-08
P(S=179)=9.23306566435251e-08
P(S=180)=8.94989934829924e-08
P(S=181)=8.67713227058252e-08
P(S=182)=8.41431974901142e-08
P(S=183)=8.16103879231525e-08
P(S=184)=7.91688691196257e-08
P(S=185)=7.68148100619142e-08
P(S=186)=7.45445631140655e-08
P(S=187)=7.23546541648424e-08

P(S=188)=7.02417733583425e-08
P(S=189)=6.82027663736768e-08
P(S=190)=6.62346262181865e-08
P(S=191)=6.43344855010357e-08
P(S=192)=6.24996091561136e-08
P(S=193)=6.07273875853941e-08
P(S=194)=5.90153301963668e-08
P(S=195)=5.73610593086582e-08
P(S=196)=5.57623044067657e-08
P(S=197)=5.42168967172551e-08
P(S=198)=5.27227640902775e-08
P(S=199)=5.12779261665775e-08
P(S=200)=4.98804898124114e-08

Príloha č. 6. - panjer.kvantil()

```
panjer.kvantil<-function(S,alfa)
{  kv<-0
   sum.S<-sum(S)
      for(i in 1:length(S)) {
        sum.i<-sum(S[1:i])
  d<-sum.i/sum.S
  if(d<alfa) {kv<-kv+1}
  else       {return(kv)}
  }
}
```

Príloha č. 7. - s.simulation()

```
s.simulation<-function(n,lam,sha,sc)
{
m<-5*sqrt(lam)+lam   ## pomocna premenna
X<-matrix(rep(0,times=n*m),ncol=m,nrow=n)
N<-rep(0,times=n)
  N<-rpois(n,lambda=lam); j<-1
for(i in 1:n){
   while(j<=N[i]) {
    B<-rpareto(1,shape=sha,scale=sc)
     if(B>=0.5) { X[i,j]<-B; j<-j+1 }
   }
  j<-1
}
EX<-sum(X)/sum(N); EN<-mean(N)
disp<-matrix(rep(0,times=n*m),ncol=m,nrow=n)
for(i in 1:n){
   for(j in 1:N[i]) {
     if(X[i,j]!=0) disp[i,j]<-(X[i,j]-EX)^2
   }
}
DX<-sum(disp)/sum(N);  DN<-var(N)
list(EX=EX,EN=EN,DX=DX,DN=DN) }
```