

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA POĽA NA NEKOMUTATÍVNEJ SFÉRE A
MATICOVÉ MODELY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2017

Bc. Mária Šubjaková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA POĽA NA NEKOMUTATÍVNEJ SFÉRE A
MATICOVÉ MODELY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Teoretická fyzika

Študijný odbor: 1160 Fyzika

Školiace pracovisko: Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky

Školiteľ: Mgr. Juraj Tekel, PhD.

2017

Bc. Mária Šubjaková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Mária Šubjaková
Študijný program: teoretická fyzika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: fyzika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Teória poľa na nekomutatívnej sfére a maticové modely
Field theory on fuzzy sphere and matrix models

Cieľ: Cieľom práce bude zoznámenie sa so základnými metódami maticových modelov v kontexte popisu teórie skalárneho poľa na nekomutatívnej sfére a ich následné použitie na študovanie fázovej štruktúry a fázového diagramu tejto teórie. Po zreprodukovaní v súčasnosti známych výsledkov pre sféru môže študent/ka zovšeobecniť tieto poznatky pre komplikovanejšie nekomutatívne priestory alebo študovať nové maticové modely, ktoré majú šancu predchádzajúce výsledky spresniť.

Anotácia: Teórie formulované na nekomutatívnych priestoroch sú v súčasnosti živou oblasťou výskumu, napriek tomu v tejto oblasti zostáva veľmi veľa nezodpovedaných otázok. Nekomutatívnosť prináša do hry fundamentálnu vzdialenosť bez straty symetrie pôvodného priestoru a študovanie teórie na najjednoduchšom nekomutatívnom priestore, nekomutatívnej sfére, dáva šancu preskúmať dôsledky nekomutatívnosti v technicky jednoduchšom prípade. Ukazuje sa, že takto formulovaná teória vedie na maticové modely, ktorých vlastnosti a dôsledky pre pôvodnú teóriu bude študent/ka študovať v diplomovej práci.

Poznámka: J. Tekel, "Phase structure of fuzzy field theories and multitrace matrix models", Acta Physica Slovaca 65, No.5, 369 – 468 (2015)

A.P. Balachandran, S. Kurkcuoglu and S. Vaidya, "Lectures on Fuzzy and Fuzzy SUSY Physics," [hep-th/0511114].

Vedúci: Mgr. Juraj Tekel, PhD.
Katedra: FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
Dátum zadania: 14.12.2015

Dátum schválenia: 15.12.2015

prof. Ing. Roman Martoňák, DrSc.
garant študijného programu



64661072

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

.....
š student

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 16. mája 2017

.....

Bc. Mária Šubjaková

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať svojmu vedúcemu práce Mgr. Jurajovi Tekelovi, PhD. za jeho pomoc, užitočné rady a cenné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

<i>Autor:</i>	Bc. Mária Šubjaková
<i>Názov práce:</i>	Teória poľa na nekomutatívnej sfére a maticové modely
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského, Bratislava
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	Mgr. Juraj Tekel, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	16. mája 2017
<i>Počet strán:</i>	63
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Diplomová práca

Abstrakt: Práca sa zaoberá štúdiom teórie skalárneho poľa na nekomutatívnej sfére. Takéto teórie poľa sa dajú opísať istou triedou hermitovských maticových modelov. V práci sa zameriavame najmä na štúdium fázovej štruktúry a fázového diagramu týchto maticových modelov a tým pádom aj fázovej štruktúry zodpovedajúcich teórií poľa. V prvej časti uvádzame riešenie základných hermitovských maticových modelov metódou sedlového bodu. V nasledujúcej časti reprodukuje známe prístupy k aproximácii maticového modelu zodpovedajúcemu skalárnej teórii a riešenia týchto približných modelov v komutatívnej limite. Na záver uvádzame nový spôsob aproximácie uvedeného modelu a prezentujeme poruchové riešenie tohto priblíženia v spomínanej limite.

Kľúčové slová: nekomutatívna sféra, teória poľa na nekomutatívnej sfére, hermitovské maticové modely

Abstract

Author: Bc. Mária Šubjaková
Title: Field theory on fuzzy sphere and matrix models
University: Comenius University, Bratislava
Faculty: Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department: Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor: Mgr. Juraj Tekel, PhD.
City: Bratislava
Date: May 16, 2017
Number of pages: 63
Type of thesis: Diploma thesis

Abstract: The thesis deals with the scalar field theories on the fuzzy sphere. These theories can be described using certain types of Hermitian matrix models. We focus mainly on studying the phase structure and the phase diagram of these matrix models and therefore on the phase structure of the corresponding scalar field theories. In the first part, we present the solution techniques for the basic Hermitian models using the saddle point approximation. In next part, we reproduce the known approaches to an approximation of the matrix model corresponding to the scalar field theory and solution of these approximate models in the commutative limit. Finally, new approximation of the mentioned matrix model is presented as well as its perturbative solution in the commutative limit.

Key words: fuzzy sphere, field theory on fuzzy sphere, Hermitian matrix models

Predhovor

Nekomutatívne priestory hrajú dôležitú úlohu v mnohých oblastiach modernej fyziky a teórie poľa na nich definované poskytujú užitočný nástroj na skúmanie ich vlastností.

V práci budeme študovať skalárne teórie poľa definované na najjednoduchšom nekomutatívnom priestore- nekomutatívnej sfére. Ukazuje sa, že takéto teórie sa dajú popísať istými hermitovskými maticovými modelmi. V práci najprv uvedieme spôsob riešenia základných hermitovských maticových modelov metódou sedlového bodu. Následne sa budeme venovať maticovému modelu zodpovedajúcemu spomínanej skalárnej teórie a ukážeme aproximatívne spôsoby riešenia tohto modelu v komutatívnej limite. Uvedieme aj nový spôsob aproximácie tohto maticového modelu, spolu s poruchovým riešením takéhoto priblíženia v uvedenej limite.

Obsah

Predhovor	ix
Úvod	1
1 Skalárna kvantová teória na nekomutatívnej sfére	3
1.1 Nekomutatívna sféra	4
1.2 Euklidovská skalárna teória poľa na nekomutatívnej sfére	6
1.2.1 UV/IR mixing	10
2 Riešenie maticových modelov v limite veľkého N	12
2.1 Aproximácia sedlového bodu	12
2.2 Príklady	16
2.2.1 Kvadratický potenciál	16
2.2.2 Kvartický symetrický potenciál	17
3 Skalárna teória poľa ako maticový model	22
3.1 Poruchové riešenie maticového modelu zodpovedajúceho skalárnej teórii poľa	22
3.2 Aproximácia sedlového bodu pre multistopové modely	24
3.3 Neporuchový prístup k riešeniu uvažovaného maticového modelu	26
3.3.1 Feynmanové diagramy	26
3.3.2 Voľná teória	29
3.3.3 Všeobecný potenciál	32
3.4 Fázový priestor symetrickej kvarticej skalárnej teórie	35
3.4.1 Maticový model s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhého momentu $F(t_2)$	35

3.4.2	Maticový model s efektívnym účinkom aproximovaným známymi členmi multistopového rozvoja	38
4	Aproximácia efektívneho účinku párovou interakciou vlastných hodnôt	42
4.1	Párová aproximácia efektívneho účinku	42
4.2	Extremálne rovnice predchádzajúcich maticových modelov ako Riemann-Hilbertov problém	46
4.2.1	Homogénny Riemann- Hilbertov problém	48
4.2.2	Nehomogénny Riemann- Hilbertov problém	50
4.3	Poruchové riešenie rovnice pre model s párovou aproximáciou efektívneho účinku	51
4.3.1	Kvadratický potenciál	53
4.3.2	Kvartický potenciál	56
4.4	Nekomutatívne CP^n priestory	58
	Záver	60
	Literatúra	62

Úvod

V tejto práci budeme študovať najjednoduchší nekomutatívny priestor, nekomutatívnu sféru a na nej definovanú skalárnu teóriu poľa. Pôvodnou motiváciou na uvažovanie nekomutatívnych priestorov bola myšlienka navrhnutá Heisenbergom, že priestoročasová nekomutatívnosť dokáže odstrániť divergencie v kvantových teóriách poľa, pričom takýto priestor zostane Lorentzovsky invariantný. Od tejto myšlienky sa upustilo, keďže renormalizácia sa ukázala byť efektívnou cestou na odstránenie týchto divergencií.

Nekomutatívne priestory však vystupujú v mnohých oblastiach fyziky, ako napríklad v opise kvantového Hallovho javu alebo ako riešenia v maticových formuláciách teórie strún. Navyše, očakáva sa že spojenie gravitácie s kvantovou teóriou zavedie nejakú netriviálnu štruktúru na krátkych vzdialenostiach (Planckovej škále) [2]. Nekomutatívne priestory takú štruktúru na krátkych vzdialenostiach vykazujú, pričom zachovávajú symetrie pôvodného priestoru.

Kvantové teórie poľa definované na nekomutatívnych priestoroch poskytujú užitočný pohľad do štruktúry a vlastností samotných týchto priestorov. V práci sa budeme zaoberať euklidovskou skalárnou teóriou poľa definovanou na nekomutatívnej sfére, ktorá sa ukáže byť ekvivalentná istému maticovému modelu. Budeme študovať najmä fázovú štruktúru modelu zodpovedajúcej symetrickej kvartetickej skalárnej teórii v komutatívnej limite. Uvedieme známe analytické aproximatívne prístupy k riešeniu tohto problému, aj ich nedostatky. Práve pre tieto nedostatky je užitočné skúšať hľadať iné, neporuchové spôsoby aproximácie spomínanej skalárnej teórie, ktoré prinesú nové informácie o jej vlastnostiach a fázovej štruktúre. V práci ukážeme nový spôsob približného riešenia maticových modelov zodpovedajúcich skalárnym teóriám na nekomutatívnej sfére v určitej časti fázového priestoru.

V prvej kapitole zavedieme objekt nekomutatívna sféra a definujeme na ňom euklidovskú skalárnu teóriu. Ukážeme si, že táto teória je ekvivalentná hermitovskému

maticovému modelu.

V druhej kapitole budeme študovať metódu riešenie základných hermitovských modelov v limite, v ktorej ide rozmer matíc do nekonečna, metódu sedlového bodu.

V tretej kapitole sa pozrieme na maticový model zodpovedajúci skalárnej teórii poľa na nekomutatívnej sfére. Zovšeobecnením metódy, uvedenej v predchádzajúcej kapitole, ukážeme aproximatívne metódy riešenia tohto problému v komutatívnej limite. Komutatívna limita zodpovedá limite, v ktorej ide rozmer matíc v príslušnom maticovom modeli do nekonečna. Týmito metódami budeme študovať fázovú štruktúru symmetrickej kvartickej teórie.

V záverečnej štvrtej kapitole si uvedieme nový spôsob aproximácie modelu zodpovedajúcemu skalárnej teórii na nekomutatívnej sfére a jeho poruchové riešenie v komutatívnej limite v určitej časti fázového priestoru. Na záver ešte túto aproximáciu zovšeobecníme pre prípad vyšších nekomutatívnych priestorov $\mathbb{C}P^n$.

Kapitola 1

Skalárna kvantová teória na nekomutatívnej sfére

Ľubovoľnú varietu môžeme zadať algebrou funkcií definovaných na tejto variete. V takejto algebre bude skrytá celá informácia o variete a takisto platí aj tvrdenie, že každá komutatívna asociatívna algebra je algebrou funkcií na nejakej variete. Máme teda:

komutatívna asociatívna algebra \leftrightarrow varieta.

Teraz sa môžeme pýtať, čo v prípade nekomutatívnej asociatívnej algebry? Existuje nejaký objekt, ktorý môžeme písať na pravú stranu v predchádzajúcom výraze, keď na ľavej strane máme nekomutatívnu algebru?

nekomutatívna asociatívna algebra \leftrightarrow ???

Na pravú stranu rozhodne nemôžeme písať žiadnu varietu, keďže funkcie na variete medzi sebou vždy komutujú, môžeme však zdefinovať nový objekt, ktorý tam potom napíšeme. Pozrieme sa ako sú v algebre funkcií zakódované vlastnosti variety a zavedieme nový objekt- nekomutatívnu varietu, ktorý má analogicky kódované vlastnosti v nekomutatívnej asociatívnej algebre. Dostaneme teda priestor, ktorého súradnicové funkcie nebudú medzi sebou komutovať, pre súradnice môžeme teda písať nekomutatívny vzťah:

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, \quad (1.1)$$

kde θ_{ij} určuje o aký priestor sa jedná.

V tejto kapitole sa najprv bližšie pozrieme na objekt nekomutatívna sféra, ktorý bude hlavným predmetom štúdia v celej práci a potom na tomto objekte definujeme euklidovskú skalárnu teóriu poľa, nástroj na štúdium vlastností nekomutatívnej sféry. Viac o definícii nekomutatívnej sféry, ako aj vyšších nekomutatívnych priestoroch sa dá nájsť v [1]. Poznatky o skalárnej kvantovej teórii poľa v Minkowského priestore, ktoré využívame pri zavádzaní tejto teórie na nekomutatívnej sfére sa dajú nájsť napríklad v [13].

1.1 Nekomutatívna sféra

Algebru komplexných funkcií na obyčajnej sfére S^2 tvoria funkcie $f(\vartheta, \varphi)$:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (1.2)$$

kde Y_l^m sú sférické harmoniky, dané:

$$Y_l^m = N_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta), \quad (1.3)$$

P_l^m označujú pridružené Legendorvé polynómy a N_l^m sú normalizačné faktory.

Nekomutatívne variety sa zvyčajne dostávajú určitou deformáciou komutatívnych variét. Takto potom dostaneme nekomutatívny priestor, ktorého komutatívna limita dá pôvodný priestor, s ktorého sme vychádzali.

V prípade sféry, nekomutatívnu sféru dostaneme urobením dvoch krokov. Prvým krokom bude obmedzenie sa v l v rozvoji (1.2), teda vezmeme iba funkcie:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (1.4)$$

Takto dostaneme konečnorozmerný priestor komplexných funkcií s rozmerom N^2 , kde $N = L + 1$, pričom sme stratili citlivosť na štruktúry na krátkych vzdialenostiach ($\delta x \sim \frac{1}{N}$). Body na sfére, ktoré boli zakódované ako delta funkcie, prestali existovať.

Keďže priestor takýchto funkcií nie je uzavretý vzhľadom na pobodový súčin, druhým krokom bude definovať medzi týmito funkciami nový súčin. Zobraziť funkcie do $N \times N$ komplexných matíc. V priestore týchto matíc máme definovanú reprezentáciu

lieovej grupy $SU(2)$ cez reprezentáciu jej algebry $su(2)$:

$$\rho_{L_i} : M \rightarrow [L_i, M], \quad (1.5)$$

kde L_i sú generátory grupy $SU(2)$ v j - spinovej reprezentácii, $N = 2j + 1$. Komutátor $[L_i, \cdot]$ teda zodpovedá zmene pri infinitezimálnej rotácii a je to nekomutatívny analóg derivácie na sfére. Na túto $su(2)$ reprezentáciu v N^2 rozmernom priestore matíc sa môžeme pozeráť ako na tenzorový súčin dvoch N -rozmerných $su(2)$ reprezentácií \underline{N} . Potom ju vieme rozložiť na ireducibilné reprezentácie:

$$\underline{N} \otimes \underline{N} = \underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \dots, \quad (1.6)$$

N^2 rozmerný priestor matíc teda vieme rozložiť na invariantné podpriestory, do ktorých zobrazíme podpriestory sférických harmoník:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{1} & \oplus & \underline{3} & \oplus & \underline{5} & \oplus & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Y_0^0 & \oplus & \{Y_1^m\} & \oplus & \{Y_2^m\} & \oplus & \dots \end{array}$$

Reálne funkcie na nekomutatívnej sfére tvoria podpriestor komplexných funkcií, ktorý môžeme zapísať pomocou sférických harmoník v reálnej báze. Nech teda funkcia f je reálnou funkciou na sfére, potom:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.7)$$

kde c_{lm} sú v takomto prípade reálne konštanty a Y_{lm} sú definované:

$$Y_{lm} = \begin{cases} \frac{i}{2}(Y_l^m - (-1)^m Y_l^{-m}), & \text{ak } m < 0, \\ Y_l^0, & \text{ak } m = 0, \\ \frac{1}{2}(Y_l^{-m} + (-1)^m Y_l^m), & \text{ak } m > 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Reálne funkcie v uvažovanom zobrazení zobrazíme do hermitovských matíc.

Hermitovské matice, do ktorých sa zobrazia sférické harmonické funkcie $Y_{lm} \rightarrow T_{lm}$ spĺňajú analogické vzťahy, aké platia pre tieto harmoniky:

$$\sum_{i=1}^3 [L_i, [L_i, T_{lm}]] = l(l+1)T_{lm}, \quad (1.9)$$

$$\text{Tr}(T_{lm} T_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (1.10)$$

$$\sum_m (T_{lm})_{ik} (T_{l'm'})_{nj} = \frac{2l+1}{N^2} \delta_{ll'} \delta_{ij} \delta_{kn}. \quad (1.11)$$

Funkcie na nekomutatívnej sfére teda vieme jednoznačne zobrazit' do $N \times N$ komplexných matíc a využijúc toto zobrazenie vieme definovať uzavretý súčin medzi týmito funkciami ako súčin príslušných hermitovských matíc:

$$f \star g = \Phi^{-1} \left(\Phi(f) \Phi(g) \right), \quad (1.12)$$

kde \star označuje náš nový súčin a Φ uvažované zobrazenie funkcií na nekomutatívnej sfére do hermitovských matíc. Takýto súčin je nekomutatívny a teda sme zadefinovali nekomutatívnu sféru. Dá sa ukázať, že v limite $N \rightarrow \infty$ takto definovaná nekomutatívna sféra prejde na obyčajnú sféru.

Výhodou nekomutatívnych priestorov oproti iným spôsobom, ktoré tiež zavádzajú štruktúru na krátkych vzdialenostiach (ako napr. mriežka) je, že nekomutatívne priestory zachovávajú všetky symetrie pôvodného priestoru, čo sme mali možnosť vidieť v prípade sféry a jej rotačnej symetrie.

1.2 Euklidovská skalárna teória poľa na nekomutatívnej sfére

Kvantová teória poľa je zadaná svojim lagrangiánom. V prípade skalárnej teória pole v minkovského priestore, teda v priestore \mathbb{R}^4 s metrikou $(+, -, -, -)$, má hustota lagrangiánu pre reálne pole tvar:

$$L = L_0 - L_{int}, \quad (1.13)$$

kde L_0 označuje voľnú časť lagrangiánu a L_{int} interakčnú časť:

$$L_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

$$L_{int} = \sum_{n>2} g_n \phi^n.$$

Pre nás bude dôležitá formulácia QFT pomocou dráhových integrálov, kde sa stredné hodnoty funkcionálov skalárneho poľa ϕ rátajú nasledovným dráhovým integrálom:

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{iS[\phi]} F[\phi], \quad (1.14)$$

kde normalizačný faktor Z a účinok S zodpovedajú:

$$Z = \int D\phi e^{iS[\phi]}, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (L_0 - L_{int}), \\ &= S_0 - S_{int}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Skalárnu teóriu poľa v Euklidovskom priestore dostaneme z príslušnej teórie v Minkowského priestore Wickovou rotáciou $t \rightarrow -it$. Touto transformáciou získame z Minkowského priestoru priestor s Euklidovskou metrikou, teda priestor \mathbb{R}^4 s metrikou $(+, +, +, +)$. Inegrál (1.14) prejde na:

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S[\phi]} F[\phi], \quad (1.17)$$

$$Z = \int D\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.18)$$

a v účinku S (1.16) prejde rozdiel medzi voľnou a interakčnou časťou na súčet. Dostávame analógiu so štatistickou fyzikou. Máme teda skalárnu teóriu poľa v euklidovskom priestore a vložení sféry do tohto priestoru:

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \\ y &= R \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \\ z &= R \cos(\vartheta), \end{aligned}$$

získame skalárnu teóriu na sfére.

Teóriu poľa na nekomutatívnej sfére dostaneme nahradením obyčajných súčinov v účinku S novými hviezdičkovými súčinnami:

$$S[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi + L_{int}(\cdot \rightarrow \star) \right]. \quad (1.19)$$

Ako sme videli, reálne polia môžeme zobrazit' na hermitovské matice. Predchádzajúci integrál potom pri takomto zobrazení prejde na maticový integrál. Priestoročasový integrál v účinku, ktorý definuje skalárny súčin v priestore funkcií na sfére:

$$\langle f, g \rangle = \int d^4x (f.g),$$

prejde na stopu matíc, ktorá zodpovedá skalárnemu súčinu v priestore matíc:

$$\langle f, g \rangle \rightarrow \langle M, N \rangle \sim Tr(M.N) \quad (1.20)$$

a derivácia prejde na komutátor s L_i , generátormi $SU(2)$. Dostávame teda:

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int dM e^{-S[M]} F[M], \quad (1.21)$$

$$Z = \int dM e^{-S[M]}, \quad (1.22)$$

kde integrujeme cez všetky hermitovské matice. Máme teda N^2 rozmerný integrál:

$$dM = \prod_{i=1}^n dM_{ii} \prod_{i<j} d(\operatorname{Re}M_{ij})d(\operatorname{Im}M_{ij}),$$

kde $(\operatorname{Re}M_{ij})$ značí reálnu zložku mimodiagonálneho prvku M_{ij} a $(\operatorname{Im}M_{ij})$ jeho imaginárnu zložku. Účinok S prejde na:

$$S = \frac{4\pi R^2}{N} \operatorname{Tr} \left[-\frac{1}{2R^2} [L_i, M][L_i, M] + \frac{1}{2} r M^2 + \sum_{n>2} g_n M^n \right], \quad (1.23)$$

kde R označuje polomer sféry. Kinetickú časť účinku ešte prepíšme nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \operatorname{const} \operatorname{Tr} \left[-[L_i, M][L_i, M] \right], \\ &= \operatorname{const} \operatorname{Tr} \left[M[L_i, [L_i, M]] \right], \\ &= \operatorname{const} \operatorname{Tr} \left[M \mathcal{K} M \right], \end{aligned} \quad (1.24)$$

kde sme označili:

$$\mathcal{K}M = [L_i, [L_i, M]]$$

Dostávame teda, že euklidovská skalárna teória poľa je ekvivalentná maticovému modelu, t.j. ensámblu náhodných matíc s pravdepodobnostným rozdelením $e^{-S[M]}$.

Prevedme ešte integrál (1.21), kde integrujeme cez všetky hermitovské matice, na integrál cez vlastné hodnoty matíc a cez prvky unitárnych matíc. Každú hermitovskú maticu môžeme priviesť na diagonálny tvar pomocou unitárnej matice:

$$M = U \Lambda U^\dagger,$$

kde Λ je diagonálna matica s vlastnými hodnotami na diagonále:

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

a U je $N \times N$ unitárna matica. Zrátajme jakobián takejto substitúcie:

$$dM = J d\Lambda dU, \quad (1.25)$$

$$dM = dU \Lambda U^\dagger + U d\Lambda U^\dagger + U \Lambda d(U^\dagger). \quad (1.26)$$

Využijúc platnosť:

$$d(UU^\dagger) = (dU)U^\dagger + U(dU^\dagger) = d(\mathbb{I}) = 0,$$

dostaneme:

$$dM = dU\Lambda U^\dagger + U d\Lambda U^\dagger - U\Lambda U^\dagger d(U)U.$$

Keďže integrujeme cez všetky hermitovské matice, miera dM musí byť invariantná voči zámene $M \rightarrow U M U^\dagger$. Jakobián, ktorý teda závisí iba od vlastných hodnôt, môžeme rátať pre ľubovoľné U . Zvoľme preto U rovné jednotkovej matici a dostaneme:

$$dM = dU\Lambda + d\Lambda - \Lambda dU.$$

Vyjadrené cez prvky matíc:

$$dM_{ij} = \delta_{ij}d\lambda_i + (\lambda_i - \lambda_j)dU_{ij}.$$

Vidíme teda, že zámena premenných:

$$\begin{aligned} M_{ii} &\rightarrow \lambda_i, \\ \operatorname{Re}M_{ij} &\rightarrow \operatorname{Re}U_{ij}, \quad \text{pre } i < j, \\ \operatorname{Im}M_{ij} &\rightarrow \operatorname{Im}U_{ij}, \quad \text{pre } i < j, \end{aligned}$$

je diagonálna a jakobián je tvorený iba súčinom prvkov na diagonále. Máme teda:

$$dM = \left(\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \right) \left(\prod_{i=1}^N d\lambda_i \right) dU. \quad (1.27)$$

Jakobián môžeme vyhodiť do exponentu:

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 = e^{2 \log(\lambda_i - \lambda_j)}$$

a zahrnúť do účinku S . Integrál (1.21) teda prejde do tvaru:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod d\lambda_i F(\Lambda) \int dU e^{-N^2 S}, \quad (1.28)$$

kde:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i < j} \log |\lambda_i - \lambda_j| + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(M \kappa M), \quad (1.29)$$

s potenciálom V tvaru:

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2} r \lambda_i^2 + \sum_{n > 2} g_n \lambda_i^n. \quad (1.30)$$

Vo vzťahu (1.28) predpokláame, že funkcia $F[M]$ závisí iba od vlastných hodnôt. Definícia účinku (1.29) sa líši od účinku, ktorý bol definovaný v (1.23). Ako sa spomína vyššie do účinku (1.29) sme zahrnuli aj jakobián zámenny súradníc. Takisto sme preškálovali maticu M a parametre r a g_n v potenciály V tak, aby v limite veľkého N , ktorá nás bude zaujímať, prispievali všetky členy v účinku. Keďže člen pochádzajúci z jakobiánu obsahuje dve sumy cez vlastné hodnoty, rastie ako N^2 . Tento faktor sme vytiahli v integráli (1.28) pred účinnok, do definície účinku ho teda nezahŕňame. Spomínaním preškálovaním rád N , v ktorom prispieva tento logaritmický člen nezmeníme, iba pripočítame k účinku nezaujímavú konštantu, ktorá sa pri rátaní stredných hodnôt aj tak vykrátí, takže ju nebudeme vôbec písať. Potrebujeme dosiahnuť aby aj zvyšné členy v účinku boli rovnakého rádu. Škálovaním:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow MN^{\theta_m}, \\ r &\rightarrow rN^{\theta_r}, \\ g_n &\rightarrow g_n N^{\theta_{g_n}}, \end{aligned}$$

$$1 + \theta_r + 2\theta_m - 1 = 2, \quad 1 + \theta_{g_n} + n\theta_m - 1 = 2, \quad (1.31)$$

zabezpečíme, aby členy v účinku závisiace iba od vlastných hodnôt boli rádu N^2 . Škálovanie (1.31) nie je jednoznačné. Správanie kinetického člena v limite veľkého N nie je teraz vôbec jasné, ale očakávame, že zahrnutím požiadavky, aby aj tento člen bol rádu N^2 stratíme voľnosť v (1.31) a teda dostanme škálovanie, ktoré už bude jednoznačné. Takisto konštanty vystupujúce v (1.23) sa dajú odstrániť preškálovaním, preto sa v definícii účinku (1.29) už nevyskytujú. Ďalej budeme pracovať s touto definíciou účinku (1.29).

1.2.1 UV/IR mixing

Spomeňme ešte jednu dôležitú vlastnosť nekomutatívnych teórií. Túto vlastnosť ďalej potrebovať nebudeme, uvádzame ju však pre úplnosť. Vďaka nelokálnosti nekomutatívnych teórií, procesy na krátkych vzdialenostiach ovplyvňujú procesy na dlhých škálach a naopak. Toto sa nazýva UV/IR mixing. Kvôli tomuto miešaniu škál sú nekomutatívne teórie nererenormalizovateľné.

Zaujímavé je, že UV/IR mixing prežije aj komutatívnu limitu a teda dostávame teóriu s veľmi odlišnou limitou ako pôvodná teória, s ktorej sme vychádzali. To zna-

mená, že aj keď nekomutatívny priestor prejde na pôvodný komutatívny, teória na ňom vybudovaná si nekomutatívu pamätá.

Kapitola 2

Riešenie maticových modelov v limite veľkého N

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že teória skalárneho poľa na nekomutatívnej sfére zodpovedá maticovému modelu:

$$\langle F[M] \rangle = \frac{1}{Z} \int dM e^{-N^2 S[M]} F[M],$$

s účinkom S tvaru (1.29), pričom uvažujeme funkcie $F[M]$ závislé iba od vlastných hodnôt.

Kľúčovým problémom takéhoto maticového modelu je práve kinetický člen v účinku. Bez tohto člena je to dobre známy maticový model, ktorý je v limite veľkého N analyticky riešiteľný. V tejto kapitole sa pozrieme na metódu, ktorou sa takýto maticový model, zadaný účinkom (1.29) bez kinetickej časti, rieši, pričom budeme vychádzať z [1], [3] a [4].

2.1 Aproximácia sedlového bodu

Máme teda maticový model zadaný účinkom:

$$S = \left[\frac{1}{N} \sum_i V(\Lambda_i) - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \right]. \quad (2.1)$$

V limite veľkého N je integrál $\langle F \rangle$, (1.28), dominovaný takou konfiguráciou vlastných hodnôt λ_i^E , ktorá minimalizuje účinok S . Pre funkciu vlastných hodnôt F , ktorá je tvaru:

$$F = \sum_{i=1}^N f(\lambda_i),$$

bude potom stredná hodnota $\langle F \rangle$ v limite veľkého N daná vzťahom:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i^E) \rightarrow \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda). \quad (2.2)$$

A našim cieľom je určiť extrémálne rozdelenie vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$.

Hľadáme teda extrém účinku S :

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = 0, \quad (2.3)$$

čo dáva rovnicu:

$$V'(\lambda_i^E) = \frac{2}{N} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_i^E - \lambda_j^E}. \quad (2.4)$$

Účinok (2.1) zodpovedá 2D Coulombskému odpudzovaniu častíc v potenciály V . Vlastné hodnoty si teda môžeme predstaviť ako častice v potenciáli V , ktoré sa vzájomne odpudzujú a my hľadáme rovnovážnu konfiguráciu takýchto častíc.

Definujme teraz funkciu $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i^E} \rightarrow \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda}. \quad (2.5)$$

Funkcia $\omega(z)$ má rez na supporte rozdelenia $\rho(\lambda)$. Cauchyho identita nám dáva spôsob, ako zistiť toto rozdelenie, ak poznáme $\omega(z)$:

$$\omega(\lambda + i\epsilon) - \omega(\lambda - i\epsilon) = -2\pi i \rho(\lambda), \quad \lambda \in \text{supp } \rho(\lambda) \quad (2.6)$$

Upravme teraz nasledovný výraz:

$$\begin{aligned} \omega(z)^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \frac{1}{z - \lambda_i^E} \frac{1}{z - \lambda_j^E} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_i \frac{1}{(z - \lambda_i^E)^2} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \frac{1}{z - \lambda_i^E} \frac{1}{z - \lambda_j^E} \\ &= -\frac{1}{N} \omega'(z) + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i^E - \lambda_j^E} \left(\frac{1}{z - \lambda_i^E} - \frac{1}{z - \lambda_j^E} \right) \\ &= -\frac{1}{N} \omega'(z) + \frac{2}{N^2} \left(\sum_i \frac{1}{z - \lambda_i^E} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i^E - \lambda_j^E} \right) \\ &= -\frac{1}{N} \omega'(z) + \frac{1}{N} \sum_i \frac{V'(\lambda_i^E)}{z - \lambda_i^E} \\ &= -\frac{1}{N} \omega'(z) + \frac{1}{N} \sum_i \frac{V'(z)}{z - \lambda_i^E} - \frac{1}{N} \sum_i \frac{V'(z) - V'(\lambda_i^E)}{z - \lambda_i^E} \\ &= -\frac{1}{N} \omega'(z) + \omega(z) V'(z) - P(z), \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde $P(z)$ je polynóm tvaru:

$$P(z) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{V'(z) - V'(\lambda_i^E)}{z - \lambda_i^E}. \quad (2.8)$$

V limite veľkého N môžeme člen rádu $\frac{1}{N}$ zanedbať. Pre $\omega(z)$ potom dostávame kvadratickú rovnicu s neznámym polynómom $P(z)$:

$$\omega^2(z) - \omega(z)V'(z) + P(z) = 0 \quad (2.9)$$

a riešenie tejto rovnice je tvaru:

$$\omega(z) = \frac{1}{2}(V'(z) \pm \sqrt{V'(z)^2 - 4P(z)}). \quad (2.10)$$

Z definície funkcie $\omega(z)$ (2.5) je zrejmé, že v limite veľkého $|z|$ platí:

$$\omega(z) \sim \frac{1}{z}. \quad (2.11)$$

Riešenie (2.10) dáva správnu limitu iba so záporným znamienkom pred odmocninou:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{V'(z)^2 - 4P(z)} \right) \sim \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{V'(z)^2 - 4\frac{V'(z)}{z}} \right) \sim \\ &\sim \frac{1}{2} \left(V'(z) - V'(z) \left(1 - 2\frac{1}{zV'(z)} \right) \right) \sim \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Máme teda rovnicu pre $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} (V'(z) - \sqrt{V'(z)^2 - 4P(z)}) \quad (2.12)$$

s neznámym polynómom $P(z)$. Nespojitosť $\omega(z)$ pozdĺž supportu extrémálneho rozdelenia vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$ je vo výraze (2.12) skrytá v časti s odmocninou. Keďže odmocnina má rez v našej konvencii pozdĺž zápornej reálnej osi, funkcia $\omega(z)$ môže mať viac rezov s okrajovými bodmi danými koreňami polynómu pod odmocninou. Tieto rezy potom tvoria support rozdelenia $\rho(\lambda)$. Maximálny počet týchto rezov tvoriacich support je daný stupňom potenciálu V . Ak máme potenciál V kvadratický, t.j. len s jednou potenciálovou jamou, support musí byť tvorený jedným súvislým intervalom $[a, b]$. V prípade, že potenciál má jám viac, support rozdelenia môže byť tvorený viacerými intervalmi, maximálne však toľkými, koľko je potenciálových jám.

Predpokladajme najprv, že support rozdelenia $\rho(\lambda)$ je tvorený jedným intervalom $[a, b]$. Polynóm pod odmocninou vo vzťahu (2.12) musí mať v takomto prípade dva

jednoduché (prípadne s nepárnou násobnosťou) koreňe a a b , zvyšné korene musia mať párnú násobnosť. Je teda tvaru:

$$V'(z)^2 - 4P(z) = M^2(z)(z - a)(z - b), \quad (2.13)$$

kde $M(z)$ je polynóm. Pre $\omega(z)$ potom dostávame:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{M^2(z)(z - a)(z - b)} \right) \quad (2.14)$$

s neznámym polynómom $M(z)$ a takisto neznámymi okrajmi supportu a, b . Urobením limity veľkého $|z|$ dostaneme z predchádzajúcej rovnice (2.14) tvar polynómu $M(z)$:

$$\frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{M^2(z)(z - a)(z - b)} \right) = \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (2.15)$$

$$M^2(z) = \text{Pol} \frac{V'^2(z)}{(z - a)(z - b)}, \quad (2.16)$$

kde Pol značí polynomiálnu časť. Okraje rezu a, b získame takisto z podmienky (2.15). Nech potenciál V je stupňa $d + 1$, potom polynóm M je stupňa $d - 1$ a teda podmienka (2.15) nám dáva $d + 1$ rovníc pre $d + 1$ parametrov.

Z Cauchyho identity (2.6) a zo vzťahu (2.15) dostaneme rozdelenie $\rho(\lambda)$ v tvare:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{M^2(\lambda)(\lambda - a)(\lambda - b)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{M^2(\lambda)(\lambda - a)(b - \lambda)}. \quad (2.17)$$

V prípade dvoch a viac rezov je situácia trochu zložitejšia. Rovnica (2.14) má v prípade dvoch rezov tvar:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{M^2(z)(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)} \right) \quad (2.18)$$

a analogicky pre viac rezov. Teraz máme neznámych parametrov $d + 2$ (v prípade n rezov je parametrov $d + n$), ale z analogickej podmienky ako bola podmienka (2.11) v prípade jedného rezu, dostaneme len $d + 1$ rovníc. Zvyšné rovnice dostaneme minimalizovaním voľnej energie F_0 :

$$F_0 = -\frac{1}{N^2} \log(Z), \quad (2.19)$$

kde Z je normalizačný faktor:

$$Z = \int d\lambda e^{-N^2 S[\lambda]}.$$

V limite veľkého N potom dostávame pre voľnú energiu výraz:

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{1}{N^2} \log \left[\exp \left(-N^2 \int_a^b d\lambda V(\lambda) \rho(\lambda) + 2N^2 \int_a^b d\lambda \int_a^b d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \log |\lambda - \lambda'| \right) \right] \\ &= \int_a^b d\lambda V(\lambda) \rho(\lambda) - \int_a^b d\lambda \int_a^b d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \log |\lambda - \lambda'| \end{aligned}$$

A to riešenie, ktoré minimalizuje voľnú energiu F bude v limite veľkého N dominovať, keďže má najväčšiu pravdepodobnosť. Dá sa ukázať, že s touto dodatočnou podmienkou už máme jednoznačné riešenie.

2.2 Príklady

2.2.1 Kvadratický potenciál

Uvažujme v účinku (2.1) iba kvadratický potenciál V . Majme teda účinok tvaru:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} r \lambda_i^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \quad (2.20)$$

a nájdime rozdelenie vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$ podľa postupu uvedenom v minulom paragrafe.

Zo vzťahu (2.16) dostaneme polynóm $M(z)$, ktorý je v tomto prípade rovný konštante r . Support rozdelenia $\rho(\lambda)$ musí byť teraz tvorený iba jedným intervalom. Pre $\omega(z)$ potom dosadením za M do (2.15) dostávame:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} (rz - r\sqrt{(z-a)(z-b)}). \quad (2.21)$$

A z podmienky (2.11) dostaneme pre okrajové body a, b rovnice:

$$\frac{r}{4}(a+b) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{r}{a}ab = 1, \quad (2.23)$$

z ktorých dostávame:

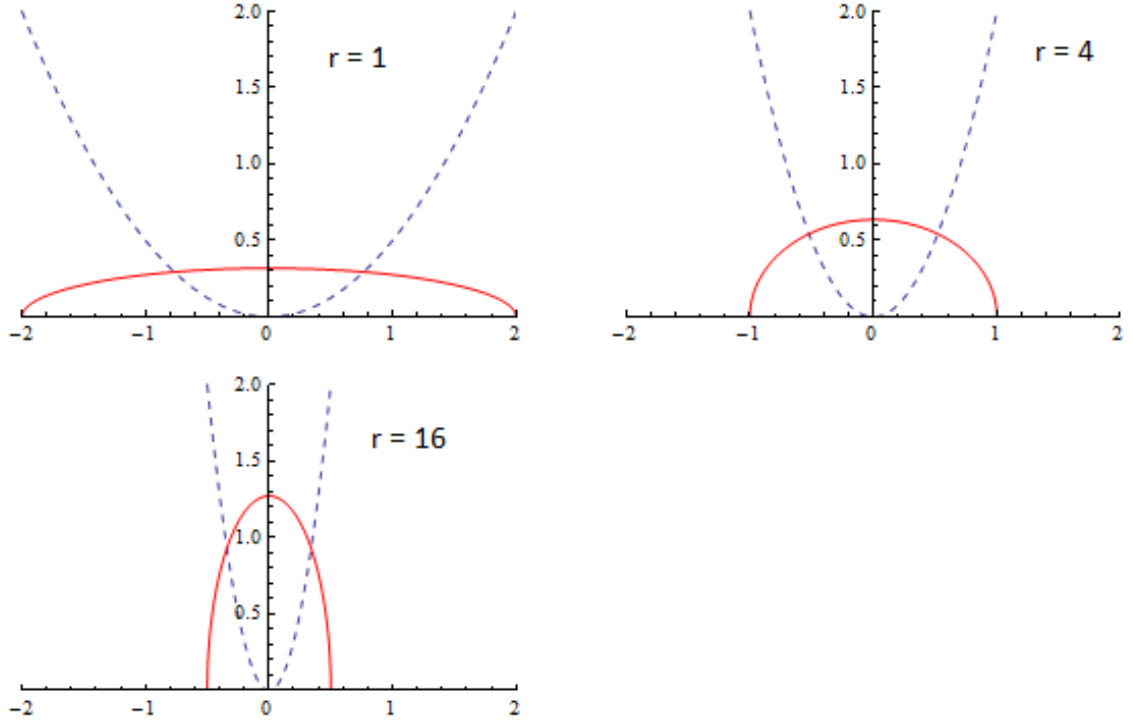
$$a = -b = \frac{2}{\sqrt{r}}. \quad (2.24)$$

Dosadením do (2.17) získame rozdelenie vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$:

$$\rho(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{r} - \lambda^2}, \quad \lambda^2 < \frac{4}{r}. \quad (2.25)$$

Dostali sme symetrické rozdelenie vlastných hodnôt, čo nás vôbec neprekvapuje, keďže máme symetrický potenciál.

Rozdelenie (2.25) sa nazýva Wignerovo polkruhové rozdelenie. Obrázok (obr. 2.1) zachytáva toto rozdelenie pre hodnoty parametra $r = 1$, $r = 4$ a $r = 16$.



Obr. 2.1: Wignerovo polkruhové rozdelenie (červená súvislá čiara) spolu s príslušným potenciálom (v modrej farbe) postupne pre $r = 1$, $r = 4$ a $r = 16$.

2.2.2 Kvartický symetrický potenciál

Majme teraz účinok v tvare:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} r \lambda_i^2 + \frac{1}{N} \sum_i g \lambda_i^4 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \quad (2.26)$$

Uvažujeme teda kvartický symetrický potenciál $V(\lambda_i)$.

Pozrime sa najprv na prípad kladného r . Rovnako ako v predchádzajúcom príklade aj teraz je support rozdelenia $\rho(\lambda)$ tvorený jedným intervalom. Keďže máme symetrický potenciál aj teraz bude platiť:

$$a = -b = \sqrt{\delta}. \quad (2.27)$$

Zo vzťahu (2.16) dostaneme polynóm M :

$$M(z) = 4gz^2 + r + 2\delta g. \quad (2.28)$$

A podmienka pre $\omega(z)$ v limite veľkého $|z|$ (2.11) nám dá rovnicu pre δ :

$$\frac{3}{4}g\delta^2 + \frac{1}{4}r\delta = 1, \quad (2.29)$$

odkiaľ:

$$\delta = \frac{1}{6g}(\sqrt{r^2 + 48g} - r). \quad (2.30)$$

Funkcia $\omega(z)$ má teda tvar:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left[4gz^2 + rz - (4gz^2 + 2g\delta + r)\sqrt{z^2 - \delta} \right]$$

a rozdelenie $\rho(\lambda)$ vychádza zo vzťahu (2.17) v tvare:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(r + 2g\delta + 4g\lambda^2)\sqrt{\delta - \lambda^2}, \quad \lambda^2 < \delta. \quad (2.31)$$

Uvažujme teraz záporný parameter r . Potenciál V má v takomto prípade dve minimumá, preto očakávame aj riešenia s dvoma rezmi tvoriacimi support rozdelenia $\rho(\lambda)$. Nie však pre všetky hodnoty parametrov v účinku r a g , keďže vlastné hodnoty sa odpuďujú. Očakávame teda, že pre plytké potenciálové jamy bude support $\rho(\lambda)$ tvorený jedným intervalom a riešenie s dvoma intervalmi sa objaví od nejakej kritickej hĺbky miním. Rozdelenie $\rho(\lambda)$ pre prípad jedného rezu je dané tým istým vzťahom, ako v prípade $r > 0$ (2.31).

Pre určité hodnoty r , g bude toto rozdelenie pre časť supportu záporné. To naznačuje, že pre tieto hodnoty parametrov r s g , predpoklady, ktoré sme urobili o supporte rozdelenia $\rho(\lambda)$ nebudú správne. Kritická hodnota $r(g)$ je daná:

$$\begin{aligned} M(0) &= 0, \\ r + \frac{1}{3}(\sqrt{r^2 + 48g} - r) &= 0 \quad \Rightarrow \quad r = -4\sqrt{g}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nájdime teraz riešenie pre prípad supportu tvoreného dvoma rezmi. Očakávame, že vďaka symetrii potenciálu je tento support znovu symetrický voči stredú $\lambda = 0$. Táto symetria je dodatočná podmienka, ktorá zodpovedá minimalizovaniu voľnej energie F_0 . Support rozdelenia teda môžeme parametrizovať nasledovným spôsobom:

$$C = (-\sqrt{D+\delta}, -\sqrt{D-\delta}) \cup (\sqrt{D-\delta}, \sqrt{D+\delta}),$$

kde musí platiť:

$$D - \delta > 0. \quad (2.33)$$

Z (2.16) dostaneme pre polynóm M :

$$M^2(z) = 16g^2 z^2. \quad (2.34)$$

Podmienka (2.11) potom dáva:

$$\begin{aligned} 4Dg + r &= 0, \\ \delta^2 &= \frac{1}{g}. \end{aligned}$$

A z (2.33) dostávame:

$$r < -4\sqrt{g}, \quad (2.35)$$

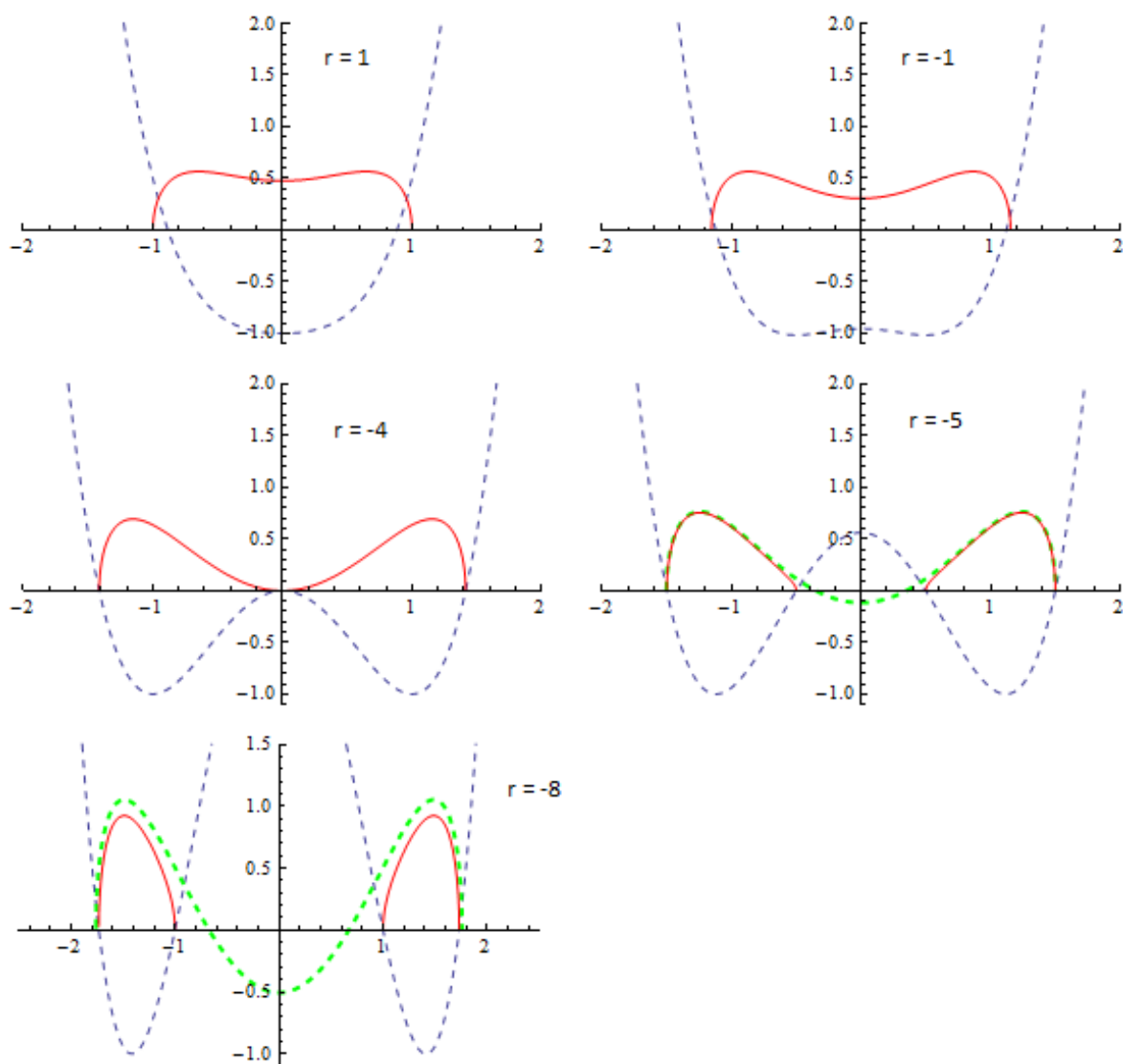
v zhode s (2.32). Rozdelenie vlastných hodnôt je potom dané vzťahom (2.17) a vychádza:

$$\rho(\lambda) = \frac{2g|\lambda|}{\pi} \sqrt{\delta^2 - (D - \lambda^2)^2}, \quad (2.36)$$

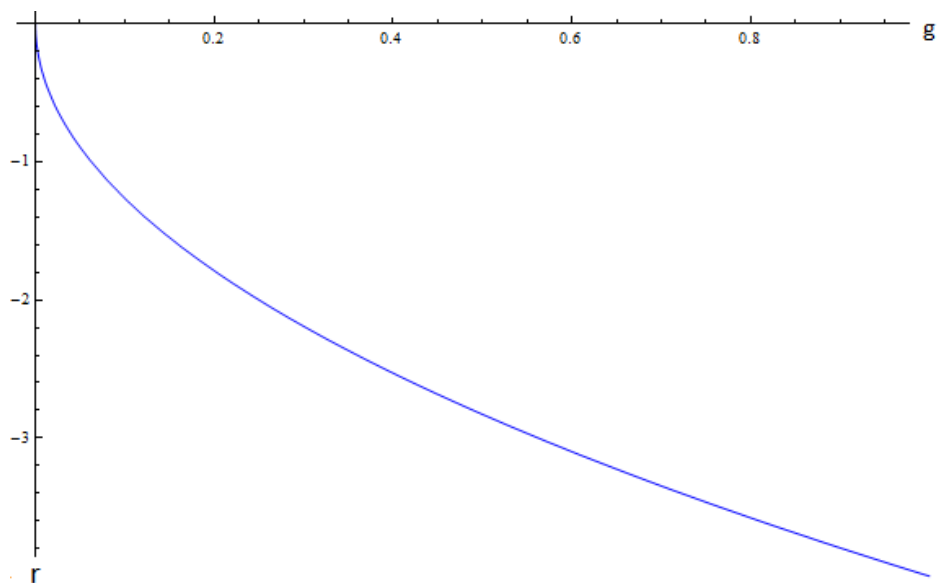
pre $\lambda \in \mathbb{C}$. Obrázok (obr. 2.2) zobrazuje rozdelenia vlastných hodnôt pre $g = 1$ a rôzne hodnoty parametra r .

Poznamenajme ešte, že pre niektoré hodnoty parametrov r , g , pri ktorých dostávame support tvorený dvoma rezmi, rovnice vyplývajúce z podmienky (2.11) umožňujú aj riešenie, kde je support tvorený jedným asymetrickým rezom, teda vlastné hodnoty sú všetky v jednom z dvoch miním potenciálu. Takéto riešenia má však vždy väčšiu voľnú energiu.

Pre kvartický potenciál teda môžeme kresliť fázový diagram s parametrami r , g , (2.3), kde kritická čiara, zodpovedajúca fázovému prechodu je daná (2.32). Pre parametre r , g zodpovedajúce bodom pod touto čiarou máme riešenie s dvoma rezmi, nad touto čiarou máme riešenie s jedným rezom.



Obr. 2.2: Rozdelenie vlastných hodnôt v prípade symetrického kvartického potenciálu. Rozdelenie je zobrazené červenou súvislou čiarou a príslušný potenciál modrou čiarou. Parameter $g = 1$. Hodnota parametra r je postupne $r = 1$, $r = -1$, $r = -4$, $r = -5$ a $r = -8$.



Obr. 2.3: Fázový diagram maticového modelu s kvartickým potenciálom. Nad kritickou krivkou $r = -4\sqrt{g}$ máme riešenie s jedným rezom, pod touto krivkou s dvomi rezmi.

Kapitola 3

Skalárna teória poľa ako maticový model

V prvej kapitole sme ukázali, že skalárna teória poľa na sfére je ekvivalentná maticovému modelu:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod d\lambda_i F(\Lambda) e^{-N^2(\frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \log |\lambda_i - \lambda_j|)} \int dU e^{-N^2 \frac{1}{2} \text{Tr}(M \kappa M)}. \quad (3.1)$$

Označme najprv integrál cez unitárne matice v (3.1) nasledovne:

$$\int dU e^{-N^2 \frac{1}{2} \text{Tr}(M \kappa M)} = \int dU e^{-N^2 S_{kin}} = e^{-N^2 S_{eff}(\Lambda)} \quad (3.2)$$

Potrebujeme teda určiť efektívny účinok S_{eff} , ktorý už závisí iba od vlastných hodnôt.

Ako sme spomínali v úvode predchádzajúcej kapitoly, maticový model (3.1) nevieme, okrem prípadu kvadratického potenciálu, riešiť v limite veľkého N analyticky. Dokážeme ho však riešiť poruchovým prístupom a takisto poznáme metódu, ktorou vieme zachytiť určitú časť efektívneho účinku S_{eff} neporuchovo.

3.1 Poruchové riešenie maticového modelu zodpovedajúceho skalárnej teórii poľa

V tomto paragrafe si ukážeme poruchový prístup k riešeniu maticového modelu (3.1), pričom budeme vychádzať z [1], [5]. Dopíšme ku kinetickej časti účinku malú konštantu

ϵ . Potrebujeme teda zrátať integrál:

$$\begin{aligned} e^{-S_{eff}} &= \int dU e^{-\epsilon \frac{1}{2} \text{Tr}(M\mathcal{K}M)} = \\ &= \int dU \left[\sum_n \frac{1}{n!} \left(-\epsilon \frac{1}{2} \text{Tr}(M\mathcal{K}M) \right)^n \right] = 1 + \sum_{n>0} \epsilon^n I_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Takýto rozvoj zodpovedá vysokoteplotnému priblíženiu v štatistickej fyzike, keďže ϵ zodpovedá inverznej teplote β . Vidíme, že čím vyšší rád, tým máme väčší počet súčinou medzi vlastnými hodnotami. Pre efektívny účinok $S_{eff}(\Lambda)$ môžeme písať:

$$\begin{aligned} e^{-S_{eff}(\Lambda)} &= e^{[\epsilon I_1 + \epsilon^2(I_2 - \frac{I_1^2}{2}) + \epsilon^3(I_3 - \frac{I_1 I_2^2}{2} + \frac{I_1^3}{6}) + \dots]} \\ S_{eff}(\Lambda) &= -[\epsilon I_1 + \epsilon^2(I_2 - \frac{I_1^2}{2}) + \epsilon^3(I_3 - \frac{I_1 I_2^2}{2} + \frac{I_1^3}{6}) + \dots] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Poruchový rozvoj (3.4) teda zodpovedá multistopovmu rozvoju efektívneho účinku $S_{eff}(\Lambda)$:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= [a_2 \text{Tr}(M^2) + a_{1,1} \text{Tr}(M) \text{Tr}(M)] + [a_3 \text{Tr}(M^3) + a_{2,1} \text{Tr}(M^2) \text{Tr}(M) + \\ &+ a_{1,1,1} \text{Tr}(M)^3] + [a_4 \text{Tr}(M^4) + a_{3,1} \text{Tr}(M^3) \text{Tr}(M) + a_{2,2} \text{Tr}(M^2)^2 + \\ &+ a_{2,1,1} \text{Tr}(M^2) \text{Tr}(M)^2] + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

V rozvoji (3.5) sme položili $\epsilon = 1$.

Ak sa nám teraz podarí nájsť diferenciálny operátor, pre ktorý platí:

$$D e^{-S_{kin}} = O(\Lambda) e^{-S_{kin}}, \quad (3.6)$$

kde $O(\Lambda)$ závisí iba od vlastných hodnôt matice M , potom bude takisto platiť:

$$\begin{aligned} D \int dU [e^{-N^2 S_{kin}}] &= O(\Lambda) \int dU [e^{-N^2 S_{kin}}] \\ D e^{-S_{eff}} &= O(\Lambda) e^{-S_{eff}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

a dostaneme podmienky na koeficienty v rozvoji (3.5).

Jeden taký diferenciálny operátor je:

$$D_1 = \sum_a \frac{\partial}{\partial M_{aa}}, \quad (3.8)$$

čo vyplýva z invariantnosti kinetického člena voči translácii $M \rightarrow M + a\mathbb{1}$. Keďže teda:

$$D_1 e^{-S_{kin}} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 e^{-S_{eff}} = 0, \quad (3.9)$$

dostávame podmienky:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -\frac{1}{N}a_2, & a_{1,1,1,1} &= -\frac{1}{2N}a_{2,1,1}, & a_{1,1,1,1,1,1} &= -\frac{1}{3N}a_{2,1,1,1,1,1}, \\ a_{3,1} &= -\frac{4}{N}a_4, & a_{2,1,1} &= -\frac{1}{2N}(3a_{3,1} + 4a_{2,2}), & \dots & \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pomocou operátorov vyšších rádov:

$$\sum_{a,b} \frac{\partial}{\partial M_{ab}} \frac{\partial}{\partial M_{ab}} \Big|_{M=0}, \quad \sum_{a,b} \frac{\partial}{\partial M_{aa}} \frac{\partial}{\partial M_{bb}} \Big|_{M=0}, \quad \sum_{a,b,c,d} \frac{\partial}{\partial M_{ab}} \frac{\partial}{\partial M_{bc}} \frac{\partial}{\partial M_{cd}} \frac{\partial}{\partial M_{da}} \Big|_{M=0}, \quad \dots, \quad (3.11)$$

dokázali autori v článku [5] určiť koeficienty v rozvoji (3.5) až po štvrtý rád:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(c_2 - c_1^2) - \frac{1}{24}(c_2 - c_1^2)^2 + \frac{1}{2880}(c_2 - c_1^2)^4 \right] - \frac{1}{432}(c_3 - 3c_1c_2 + 2c_1^3)^2 - \\ &- \frac{1}{3456} \left[(c_4 - 4c_3c_1 + 6c_2c_1^2 - 3c_1^4) - 2(c_2 - c_1^2)^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_i (\lambda_i)^n. \quad (3.13)$$

Tieto funkcie vlastných hodnôt prejdú v limite veľkého N na n -té momenty extrémálneho rozdelenia $\rho(\lambda)$:

$$c_n^E = \frac{1}{N} \sum_i (\lambda_i^E)^n \rightarrow \int d\lambda \lambda^n \rho(\lambda). \quad (3.14)$$

Efektívny účinok S_{eff} teda môžeme aproximovať jeho multistopovým rozvojom do štvrtého rádu. Takéto maticové modely sa v limite veľkého N dajú riešiť metódou sedlového bodu zovšeobecnením postupu uvedeného v predchádzajúcej kapitole [1].

3.2 Aproximácia sedlového bodu pre multistopové modely

Máme maticový model zadaný nasledovným účinkom:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} V(\lambda_i) - \sum_{i<j} \frac{2}{N^2} \log |\lambda_i - \lambda_j| + f(c_1, c_2, \dots), \quad (3.15)$$

kde potenciál $V(\lambda_i)$ je tvaru:

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2} r \lambda_i^2 + \sum_{n>2} g_n \lambda_i^n. \quad (3.16)$$

Riešme takýto model v limite veľkého N metódou sedlového bodu. Hľadáme teda extrém účinku S , (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} &= 0, \\ \sum_n \frac{\partial f}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial \lambda_i} + V'(\lambda_i) &= \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}, \\ \sum_n \frac{\partial f}{\partial c_n} n \lambda_i^{n-1} + V'(\lambda_i) &= \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ak sa pozrieme na vlastné hodnoty ako na častice v potenciáli danom účinkom S , rovnica (3.17) potom určuje rovnovážnu konfiguráciu týchto častíc. Vidíme, že multistopové členy v účinku zavádzajú novú interakciu medzi vlastnými hodnotami, ktorá však nie je štandardnou párovou interakciou ako interakcia pochádzajúca z logaritmického členu.

Prepíšme teraz rovnicu (3.17) nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_1} + \left(r + 2 \frac{\partial f}{\partial c_2} \right) \lambda_i + \sum_{n>2} n \left(g_n + \frac{\partial f}{\partial c_n} \right) \lambda_i^{n-1} &= \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}, \\ \frac{\partial f}{\partial c_1} + r_{eff} \lambda_i + \sum_{n>2} n g_{n,eff} \lambda_i^{n-1} &= \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Prepísali sme teda extrémálnu rovnicu pre multistopový maticový model na extrémálnu rovnicu pre maticový model bez multistopových členov v účinku s koeficientmi r_{eff} , $g_{n,eff}$ a s koeficientom $\frac{\partial f}{\partial c_1} = g_{0,eff}$ pred lineárnym členom v účinku. Takýto model ďalej vyriešime rovnakým postupom aký bol uvedený v predchádzajúcej kapitole, pričom koeficienty r_{eff} , $g_{n,eff}$ považujeme za konštantné parametre. Dostaneme teda extrémálne rozdelenie vlastných hodnôt v limite veľkého N :

$$\rho(\lambda, r_{eff}, g_{n,eff}) = \rho(\lambda, r, g, c_n). \quad (3.19)$$

Zo selfkonzistentných rovníc, ktoré dostávame pre momenty rozdelenia:

$$c_n = \int \lambda^n \rho(\lambda, r, g, c_n) d\lambda, \quad (3.20)$$

potom dokážeme určiť momenty rozdelenia, a teda aj samotné rozdelenie vlastných hodnôt, ako funkcie už iba pôvodných parametrov r , g .

3.3 Nepochuvový prístup k riešeniu uvažovaného maticového modelu

Ako bolo spomenuté v úvode kapitoly, je známa metóda, ktorou vieme zistiť určitú časť efektívneho účinku S_{eff} nepochuvo. Táto metóda využíva fakt, že v prípade voľnej teórie, teda maticového modelu (3.1) s kvadratickým potenciálom, analytické riešenie v limite veľkého N poznáme. V tomto paragrafe si toto riešenie voľnej teórie, ako aj nepochuvový prístup k riešeniu v prípade všeobecného potenciálu, ukážeme. Najprv sa však bude užitočné spomenúť ešte jeden spôsob poruchového riešenia maticových modelov. Táto podkapitola vychádza z článkov [1], [3].

3.3.1 Feynmanové diagramy

Majme maticový model:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int dM F[M] e^{-N^2 S[M]} \quad (3.21)$$

$$Z = \int dM e^{-N^2 S[M]} \quad (3.22)$$

$$S[M] = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} r M^2 \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} (M \kappa M) + \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\sum_{n>2} g_n M^n \right) = S_0 + S_{int}, \quad (3.23)$$

kde:

$$S_0 = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} r M^2 \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} (M \kappa M) \quad (3.24)$$

$$S_{int} = N \text{Tr} \left(\sum_{n>2} g_n M^n \right) \quad (3.25)$$

Exponenciálu s interakčným účinkom môžeme v integráli (3.22), respektíve (3.21), rozvinúť do Taylorovho radu. Dostávame teda poruchový rad:

$$Z = \sum_n \int dM e^{-N^2 S_0[M]} \frac{1}{n!} (-1)^n (N^2 S_{int})^n \quad (3.26)$$

Hermitovskú maticu M môžeme rozložiť do matíc T_{lm} zavedených v prvej kapitole:

$$M = \sum_{l,m} c_{lm} T_{lm} \quad (3.27)$$

a túto substitúciu použijeme v integráloch (3.22), (3.21). Integračná miera teda prejde na:

$$dM = J \prod_{l,m} dc_{lm} \equiv J dc, \quad (3.28)$$

kde jakobián záměny J je rovný iba súčiniami prvkov matíc T_{lm} , teda je to konštanta, ktorú ďalej nebudeme uvažovať, keďže sa aj tak pri rátaní stredných hodnôt vykrátí. Integál (3.22) teda prejde na:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \int dc e^{-N^2 S_0(c)} \frac{1}{n!} (-1)^n (N^2 S_{int}(c))^n = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \int dc (-1)^n (N^2 S_{int}(c))^n e^{-[\frac{1}{2}Nr \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} c_{l'm'} \text{Tr}(T_{lm} T_{l'm'})]} \times \\ &\quad \times e^{-[\frac{1}{2}N^2 \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} c_{l'm'} \text{Tr}(T_{lm} \mathcal{K} T_{l'm'})]}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A keďže pre matice T_{lm} platia vzťahy:

$$\mathcal{K} T_{lm} = l(l+1) T_{lm}, \quad (3.30)$$

$$\text{Tr}(T_{lm} T_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (3.31)$$

dostávame:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \frac{1}{n!} \int dc (-1)^n (N^2 S_{int}(c))^n e^{-[\frac{1}{2}Nr \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} \delta_{ll'} \delta_{mm'} c_{l'm'}]} \times \\ &\quad \times e^{-[\frac{1}{2}N^2 \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'} c_{l'm'}]} \\ Z &= \sum_n \frac{1}{n!} \int dc (-1)^n (N^2 S_{int}(c))^n e^{-[\frac{1}{2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} A_{lm,l'm'} c_{l'm'}]}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

kde:

$$A_{lm,l'm'} = [Nr + N^2 l(l+1)] \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.33)$$

Z nasledovného integrálu:

$$Z_0(b) = \int dc e^{[-\frac{1}{2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} A_{lm,l'm'} c_{l'm'} + \sum_{l,m} B_{lm} c_{lm}]}, \quad (3.34)$$

potom vieme dostať všetky nasledovné stredné hodnoty súčinov $\langle c_{l_1 m_1} \cdot c_{l_2 m_2} \cdot \dots \cdot c_{l_{2k} m_{2k}} \rangle_0$. Stredná hodnota súčinu nepárneho počtu c je nulová, pre párny počet:

$$\begin{aligned} \langle c_{l_1 m_1} \cdot c_{l_2 m_2} \cdot \dots \cdot c_{l_{2k} m_{2k}} \rangle_0 &= \frac{1}{Z} \int dc (c_{l_1 m_1} \cdot c_{l_2 m_2} \cdot \dots \cdot c_{l_{2k} m_{2k}}) e^{-\frac{1}{2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} c_{lm} A_{lm,l'm'} c_{l'm'}} = \\ &= \prod_i \frac{\partial}{\partial b_{l_i m_i}} Z_0(b) \Big|_{b=0} = \prod_i \frac{\partial}{\partial b_{l_i m_i}} (Z_0(0) e^{-\frac{1}{2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} b_{lm} A_{lm,l'm'}^{-1} b_{l'm'}}) \Big|_{b=0} = \\ &= \sum_{\substack{\text{cez všetky} \\ \text{rozličné} \\ \text{párovania } P}} A_{l_{P(1)} m_{P(1)}, l_{P(2)} m_{P(2)}}^{-1} A_{l_{P(3)} m_{P(3)}, l_{P(4)} m_{P(4)}}^{-1} \dots A_{l_{P(2k-1)} m_{P(2k-1)}, l_{P(2k)} m_{P(2k)}}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde:

$$A_{lm,l'm'}^{-1} = \frac{1}{Nr + N^2l(l+1)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.36)$$

Využijúc, že pre polarizačné tenzory T_{lm} platí:

$$\sum_m (T_{lm})_{ik} (T_{l'm})_{nj} = \frac{2l+1}{N^2} \delta_{ll'} \delta_{ij} \delta_{kn}, \quad (3.37)$$

potom pre stredné hodnoty súčinov prvkov matice $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle_0$ dostávame:

$$\begin{aligned} \langle M_{ik} M_{nj} \rangle_0 &= \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \langle c_{l_1 m_1} \cdot c_{l_2 m_2} \rangle_0 (T_{l_1 m_1})_{ik} (T_{l_2 m_2})_{nj} = \\ &= \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} A_{l_1 m_1, l_2 m_2}^{-1} (T_{l_1 m_1})_{ik} (T_{l_2 m_2})_{nj} = \\ &= \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \frac{1}{Nr + N^2 l_1 (l_1 + 1)} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} (T_{l_1 m_1})_{ik} (T_{l_2 m_2})_{nj} = \\ &= \sum_{l_1} \frac{1}{Nr + N^2 l_1 (l_1 + 1)} \sum_{m_1} (T_{l_1 m_1})_{ik} (T_{l_1 m_1})_{nj} = \\ &= \sum_{l_1} \frac{2l_1 + 1}{N^2 (Nr + N^2 l_1 (l_1 + 1))} \delta_{ij} \delta_{kn} \end{aligned} \quad (3.38)$$

a strednú hodnotu súčinu rôzneho párneho počtu prvkov dostaneme rovnako ako v prípade c_{lm} Wickovou vetou.

Pre celkové stredné hodnoty $\langle M_{ij} M_{kl} \dots \rangle$ potom dostávame poruchový rozvoj:

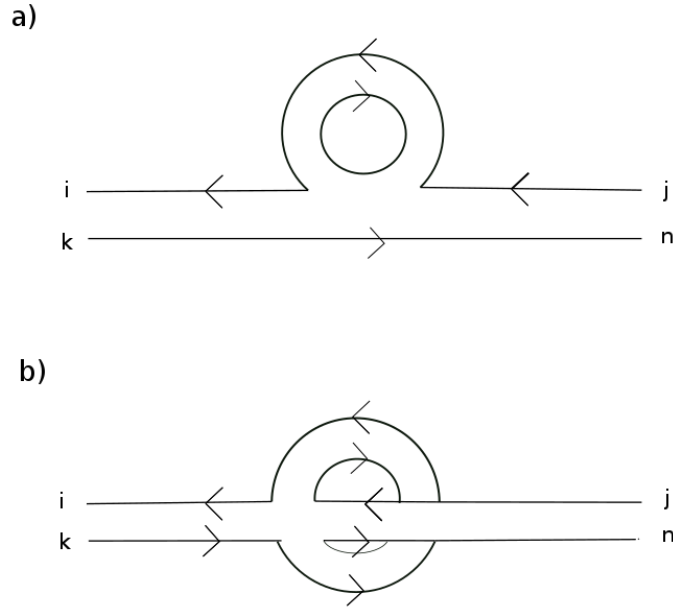
$$\begin{aligned} \langle M_{ik} M_{nj} \dots \rangle &= \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \dots \frac{1}{Z} \sum_n \int dc (c_{l_1 m_1} \cdot c_{l_2 m_2} \dots) \times \\ &\times e^{-N^2 S_0(c)} \frac{1}{n!} (-1)^n (N^2 S_{int}(c))^n (T_{l_1 m_1})_{ik} (T_{l_2 m_2})_{nj}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

ktorý môžeme graficky reprezentovať pomocou tučných Feynmanových diagramov s propagátorom:

$$\begin{array}{c} i \longleftarrow \text{-----} j \\ k \longrightarrow \text{-----} n \end{array} = \langle M_{ik} M_{nj} \rangle_0 = \sum_{l_1=1}^{N-1} \frac{2l_1 + 1}{N^2 (Nr + N^2 l_1 (l_1 + 1))} \delta_{ij} \delta_{kn}, \quad (3.40)$$

kde šípka ide vždy od pravých indexov matíc k ľavým.

Dôležitým postrehom je, že v limite veľkého N prispievajú iba rovinné feynmanove diagramy. Vezmime si ako príklad diagramy na obrázku (obr.3.1), ktoré tvoria príspevok v prvom ráde strednej hodnoty $\langle M_{ik} M_{nj} \rangle$. Všetky diagramy v rovnakom ráde majú aj rovnaký počet vertexov. Rovinné diagramy však majú vždy najväčší počet uzavretých



Obr. 3.1: Diagramy v prvom ráde $\langle M_{ik}M_{nj} \rangle$. Obrázok a) zobrazuje rovinný diagram, obrázok b) priestorový diagram.

slučiek. Za každú uzavretú slučku dostaneme vo faktore za diagram navyše jedno N , kvôli kontrakcii δ . Takže v limite veľkého N v každom ráde dominujú práve rovinné diagramy.

3.3.2 Voľná teória

Pozrime sa teraz na riešenie maticového modelu zodpovedajúcemu voľnej skalárnej teórii na nekomutatívnej sfére v limite veľkého N . Máme teda maticový model zadaný účinkom:

$$S(M) = \frac{1}{2N} r \text{Tr}(M^2) + \frac{1}{2} (M \mathcal{K} M) \quad (3.41)$$

a pokúsime sa nájsť momenty rozdelenia vlastných hodnôt v limite veľkého N . Zaujímajú nás teda stredné hodnoty $\langle \text{Tr}(M^{2m}) \rangle$, pričom vzhľadom na symetriu účinku predpokladáme, že nepárne momenty rozdelenia budú v tomto prípade nulové. Keďže uvažujeme teóriu, kde $S_{int} = 0$, tieto stredné hodnoty sú rovno $\langle \text{Tr}(M^{2m}) \rangle_0$ z predchádzajúceho paragrafu. Zrátame ich teda pomocou Wickovej vety.

Rozpíšme si $\langle \text{Tr}(M^{2m}) \rangle$ nasledovne:

$$\langle (M^{(2m-2-p')})_{il} M_{lr} (M^{p'})_{rj} M_{ji} \rangle.$$

Zkontrahujeme teraz druhý a posledný člen v predchádzajúcom súbine:

$$\langle (M^{(2m-2-p')})_{il} \overline{M_{lr} (M^p)_{rj} M_{ji}} \rangle.$$

V predchádzajúcom paragrafe sme videli, že v limite veľkého N prispievajú iba rovinné diagramy. To znamená, že nemáme žiadnu kontrakciu medzi maticou z prvého členu a maticou z tretieho členu súčiny. Dostávame teda:

$$\langle (M^{(2m-2-p')})_{il} \overline{M_{lr} (M^{p'})_{rj} M_{ji}} \rangle = \frac{f}{N} \langle \text{Tr}(M^{p'}) \rangle \langle \text{Tr}(M^{2m-2-p'}) \rangle, \quad (3.42)$$

kde f je dané (3.40):

$$f = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{2l+1}{N(Nr + N^2l(l+1))}. \quad (3.43)$$

Strednú hodnotu $\langle \text{Tr}(M^{2m}) \rangle$ dostaneme súčtom cez všetky možné kontrakcie, to znamená súčtom cez všetky možné hodnoty p' v predchádzajúcom výraze. Máme teda:

$$\langle \text{Tr}(M^{2m}) \rangle = \sum_{p'=0}^{2m-2} \frac{f}{N} \langle \text{Tr}(M^{p'}) \rangle \langle \text{Tr}(M^{2m-2-p'}) \rangle = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{f}{N} \langle \text{Tr}(M^p) \rangle \langle \text{Tr}(M^{2(m-1-p)}) \rangle, \quad (3.44)$$

kde $p = 2p'$. Pre zjednodušenie výpočtov preškálujeme teraz maticu M : $M \rightarrow \frac{M}{2\sqrt{f}}$.

Momenty rozdelenia c_{2m}^E potom prejdú na:

$$c_{2m}^E = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \left(\frac{M}{2\sqrt{f}} \right)^{2m} \right\rangle \quad (3.45)$$

a vzťah (3.44) môžeme prepísať nasledovne:

$$4c_{2m}^E = \sum_{p=0}^{m-1} c_{2p}^E c_{2(m-1-p)}^E, \quad m > 1. \quad (3.46)$$

Dostali sme teda rekurzívny vzťah pre momenty c_{2m}^E s počiatočnou podmienkou $c_0^E = \frac{\text{Tr}(\mathbb{I})}{N}$, v ktorom môžeme spoznať rekurentný vzťah pre preškálované Catalanove čísla $\mathcal{C}_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Momenty Wignerovho rozdelenia (2.25) sú dané práve preškálovanými Catalanovými číslami, takže už tu môžeme vidieť, že pridaním kinetického účinku nezmeníme tvar výsledného extrémálneho rozdelenia vlastných hodnôt, iba ho určitým spôsobom preškálujeme.

Pokračujme však ďalej. Zavedme generujúcu funkciu momentov:

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} c_{2m}^E. \quad (3.47)$$

Prenásobením rekurzného vzťahu (3.46) výrazom t^{2m} a presumovaním cez index m dostávame rovnicu pre $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{m=1}^{\infty} t^{2m} c_{2m}^E &= t^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m-1} t^{2p} c_{2p}^E t^{2(m-1-p)} c_{2(m-1-p)}^E, \\ 4 \sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} c_{2m}^E - 4 &= t^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s t^{2p} c_{2p}^E t^{2(s-p)} c_{2(s-p)}^E, \\ 4(\phi(t) - 1) &= t^2 \phi^2(t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dostali sme teda kvadratickú rovnicu, ktorej riešenie je:

$$\phi(t) = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2}, \quad (3.49)$$

kde sme vybrali riešenie so správnou limitou $\phi(t) \rightarrow 0$ pri $t \rightarrow 0$.

Keď si teraz spomenieme na definíciu funkcie $\omega(z)$ z druhej kapitoly:

$$\omega(z) = \left\langle \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle = \sum_m \frac{1}{z} \left\langle \sum_i \lambda_i^m \frac{1}{z^m} \right\rangle = \frac{1}{z} \sum_m \langle \text{Tr}(M^m) \rangle \frac{1}{z^m} = \sum_m \frac{1}{z} \frac{c_{2m}^E}{z^{2m}} \quad (3.50)$$

vidíme, že:

$$\omega(z) = \frac{1}{z} \phi(1/z). \quad (3.51)$$

Z Cauchyho identity (2.6) dostávame:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - \lambda^2} \quad (3.52)$$

a po spätnom preškálovaní modelu:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^2} \sqrt{R^2 - \lambda^2}, \quad (3.53)$$

kde polomer rozdelenia $R = 2\sqrt{f}$. A teda, ako sme spomínali, dostávame znovu Wignerovo polkruhovú rozdelenie ako v prípade maticového modelu bez kinetického členu v účinku, avšak z odlišným polomerom R . Zrátajme ešte faktor f v limite veľkého N :

$$f = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{2l+1}{Nr + N^2 l(l+1)}. \quad (3.54)$$

Zaveďme faktor x :

$$l = Nx,$$

potom v limite veľkého N dostávame:

$$f = \int_0^1 dx \frac{2Nx}{N^4x^2 + Nr} = \frac{1}{N^3} \log \left(1 + \frac{N^3}{r} \right) \quad (3.55)$$

a polomer rozdelenia vlastných hodnôt R bude rovný:

$$R^2 = \frac{4}{N^3} \log \left(1 + \frac{N^3}{r} \right). \quad (3.56)$$

Vidíme, že aby sme dostali konečné rozdelenie v limite veľkého N , musíme preškálovať parameter $r \rightarrow rN^3$ a maticu $M \rightarrow M^{-\frac{3}{2}}$. Toto škálovanie je už, tak ako sme očakávali, jednoznačné.

Dostali sme teda Wignerovo polkruhové rozdelenie vlastných hodnôt (3.53) s polomerom:

$$R^2 = 4 \log \left(1 + \frac{1}{r} \right). \quad (3.57)$$

Porovnajme teraz toto rozdelenie s rozdelením (2.25), ktoré sme dostali, keď sme nevažovali kinetický člen v účinku. Polomer tohto rozdelenia bol daný vzťahom:

$$R^2 = \frac{4}{r}. \quad (3.58)$$

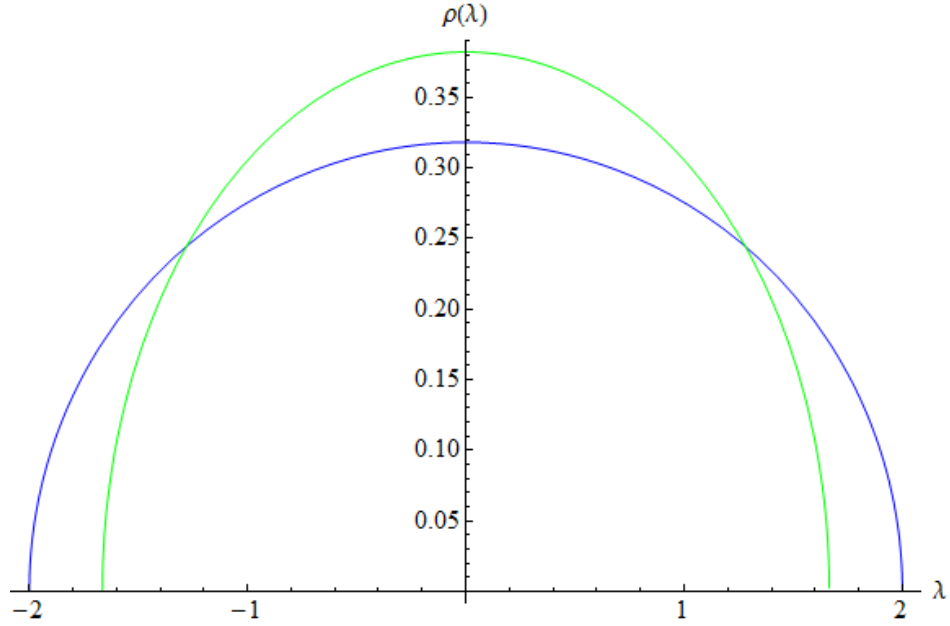
Keď rozvineme nový polomer (3.57), ktorý sme dostali:

$$R^2 = 4 \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) \approx \frac{4}{r} - \frac{2}{r^2} + \dots \quad (3.59)$$

vidíme, že tento nový polomer je menší oproti polomeru rozdelenia bez kinetického členu v účinku. Kinetický člen teda zavádza určitú príťažlivú silu medzi vlastnými hodnotami. Na obrázku (3.2) je zobrazené rozdelenie vlastných hodnôt pre maticový model s kinetickým členom aj bez tohto členu pre hodnotu parametra $r = 1$.

3.3.3 Všeobecný potenciál

V úvode kapitoly sme spomínali metódu, ktorou dokážeme časť efektívneho účinku S_{eff} , (3.2) zachytiť analyticky. Kľúčovou myšlienkou, ktorú táto metóda využíva je práve fakt, že v prípade voľnej teórie zavedenie kinetického členu do účinku nezmení tvar rozdelenia vlastných hodnôt, ale ho len preškáluje ako sme videli v predchádzajúcom paragrafe.



Obr. 3.2: Modrou farbou je zobrazené rozdelenie vlastných hodnôt pre maticový model bez kinetického členu, zelenou pre model s kinetickým členom. Parameter v účinku je v oboch prípadoch $r = 1$.

Efektívny účinok závisí už iba od vlastných hodnôt matice, môžeme ho teda písať ako funkciu momentov $c_n = \frac{1}{N} \text{Tr} M^n$. Keď teraz zavedieme translačne invariantné momenty:

$$t_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(M - \frac{1}{N} \text{Tr}(M) \right)^n, \quad (3.60)$$

efektívny účinok môžeme chápať ako funkciu týchto translačne invariantných momentov. Keďže samotný efektívny účinok je translačne invariantný, očakávame, že jeho vyjadrenie pomocou momentov t_n bude mať jednoduchšiu štruktúru, ako vyjadrenie cez c_n (čo môžeme vidieť aj v prípade multistopového rozvoja účinku S_{eff} (3.5)).

Rozdeľme efektívny účinok formálne na dve časti:

$$S_{eff} = \frac{1}{2} F(t_2) + \mathcal{R}, \quad (3.61)$$

kde $F(t_2)$ je funkcia druhého momentu t_2 , ktorú určíme v limite veľkého N analyticky a zvyšok \mathcal{R} je funkcia momentov t_n , o ktorej nám spomínaná metóda nič nepovie. Hľadáním extrému celkového účinku S v prípade voľnej teórie:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} r \lambda_i^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| + S_{eff}(\lambda) \quad (3.62)$$

dostaneme rovnicu:

$$(r + F'(t_2^E))\lambda_i^E + \sum_m \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t_m} \frac{\partial t_m}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda_i = \lambda_i^E} = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i^E - \lambda_j^E} \quad (3.63)$$

Riešením (3.63) musí byť Wignerovo polkruhové rozdelenie, ktoré sme dostali predchádzajúcim paragrafe. Funkcia $F(t_2)$ preškaluje polomer rozdelenia a výraz:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t_m}$$

musí byť v prípade voľnej teórie nulový pre každé m . Keďže v prípade voľnej teórie sú všetky nepárne momenty c_{2m+1} nulové, tým pádom sú nulové aj t_{2m+1} a pre párne momenty platí $t_{2m} = c_{2m}$. Pre momenty rozdelenia c_{2m} platí v prípade voľnej teórie rekurzívny vzťah (3.46), v ktorom, ako sme spomínali, môžeme spoznať preškálované Catalanové čísla:

$$\mathcal{C}_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \quad (3.64)$$

Dá sa ukázať, že pre Catalanové čísla platí rekurzívny vzťah:

$$\mathcal{C}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i \mathcal{C}_{n-i}, \quad \mathcal{C}_0 = 1. \quad (3.65)$$

Momenty rozdelenia c_{2m} potom musia byť rovné:

$$c_{2m} = f^m \mathcal{C}_m = c_2^m \mathcal{C}_m. \quad (3.66)$$

Funkciu \mathcal{R} teda musia tvoriť členy, ktoré obsahujú minimálne dva medzi sebou vynásobené výrazy, ktoré v prípade voľnej teórie v limite veľkého N zanikajú, teda výrazy typu $(c_{2m} - \mathcal{C}_m c_2^m)$, respektíve $(t_{2m} - \mathcal{C}_m t_2^m)$ alebo nepárne momenty t_{2m+1} .

Nový polomer rozdelenia dostaneme postupom uvedeným v časti (3.2):

$$R^2 = \frac{4}{r + F'(t_2^E)}. \quad (3.67)$$

Druhý moment rozdelenia je daný:

$$t_2^E = \frac{R^2}{4} = \frac{1}{r + F'(t_2^E)} \quad (3.68)$$

a teda:

$$F'(t_2) = \frac{1}{t_2} - r. \quad (3.69)$$

Využívajúc fakt, že:

$$t_2 = f = \log\left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad (3.70)$$

dostávame nasledovnú rovnicu pre funkciu $F(t_2)$:

$$F'(t_2) = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{e^{t_2} - 1} \quad (3.71)$$

a po zintegrování predchádzajúcej rovnice získame:

$$F(t_2) = \log\left(\frac{t_2}{1 - e^{-t_2}}\right), \quad (3.72)$$

čo keď rozvinieme do Taylorovho radu dostaneme:

$$F(t_2) = \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{24}t_2^2 + \frac{1}{2880}t_2^4 + \dots \quad (3.73)$$

v zhode s multistopovým rozvojom (3.5). Vidíme tiež, že ostatné členy v multistopovom rozvoju sú presne takého typu, akého musia byť členy v \mathcal{R} .

3.4 Fázový priestor symetrickej kvartickej skalárnej teórie

V druhej kapitole sme opísali fázový priestor maticového modelu s kvartickým potenciálom bez kinetického členu v účinku, (2.3). V tejto časti nás bude zaujímať najmä ako sa zmení krivka fázového prechodu medzi rozdelením, ktorého support je tvorený jedným symetrickým intervalom a riešením so supportom tvoreným dvomi rezmi, keď uvažujeme aj kinetický člen v účinku. Pre úplnosť však uvedieme ako sa zmení celková štruktúra fázového diagramu teórie. Keďže v predchádzajúcich častiach tejto kapitoly sme zistili, že kinetický člen zavádza príťažlivú silu medzi vlastnými hodnotami λ_i , neprekvapí nás, ak pre nejaké parametre r, g dostaneme asymetrické jednorezové riešenie. Takéto riešenie zodpovedá, ak si vlastné hodnoty predstavíme ako častice vo vonkajšom potenciály $V(\lambda_i)$ s interakciou medzi nimi danou zvyšnými členmi v účinku tomu, že všetky vlastné hodnoty sedia v jednom z dvoch miním potenciálu $V(\lambda_i)$. Celá táto časť vychádza z [1].

3.4.1 Maticový model s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhého momentu $F(t_2)$

Uvažujme najprv maticový model s efektívnym účinkom S_{eff} daným iba funkciou druhého momentu $F(t_2)$, (3.69). Keďže nás zaujíma najmä zmena krivky fázového pre-

chodu medzi dvoma rozdielnymi symetrickými fázami, hľadáme najpv symetrické riešenie s jednointervalovým supportom. Pre takéto riešenie musí platiť, že translačne invariantný moment t_2 je rovný štandardne definovanému momentu c_2 . Máme teda maticový model zadaný účinkom:

$$S = \frac{1}{2}F(c_2) + \left[\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2}r\lambda_i^2 + \frac{1}{N} \sum_i g\lambda_i^4 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \right]. \quad (3.74)$$

Takýto model môžeme riešiť postupom uvedenom v časti (3.2) o riešení multistopových modelov. Dostávame teda rozdelenie dané (2.36), kde namiesto parametra r dosadíme efektívny parameter:

$$r_{eff} = r + F'(c_2). \quad (3.75)$$

Druhý moment rozdelenia vychádza pre kvartickú teóriu:

$$c_2^E = \int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}} d\lambda \lambda^2 \rho(\lambda) = \frac{\delta}{4} + \frac{\delta^3 g}{16}, \quad (3.76)$$

s polomerom rozdelenia $\sqrt{\delta}$ daným vzťahom (2.30) s efektívnym parametrom r_{eff} namiesto r . Systém rovníc (3.75), (3.76) nedokážeme vyriešiť analyticky, nás však zaujíma najmä fázový prechod medzi týmto riešením a riešením s dvojnintervalovým supportom, ktorý je daný podľa (2.32) daný:

$$r_{eff} = -4\sqrt{g}. \quad (3.77)$$

Pre moment rozdelenia c_2 dostávame v takomto prípade jednoduché vyjadrenie:

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (3.78)$$

a teda pre fázový prechod máme:

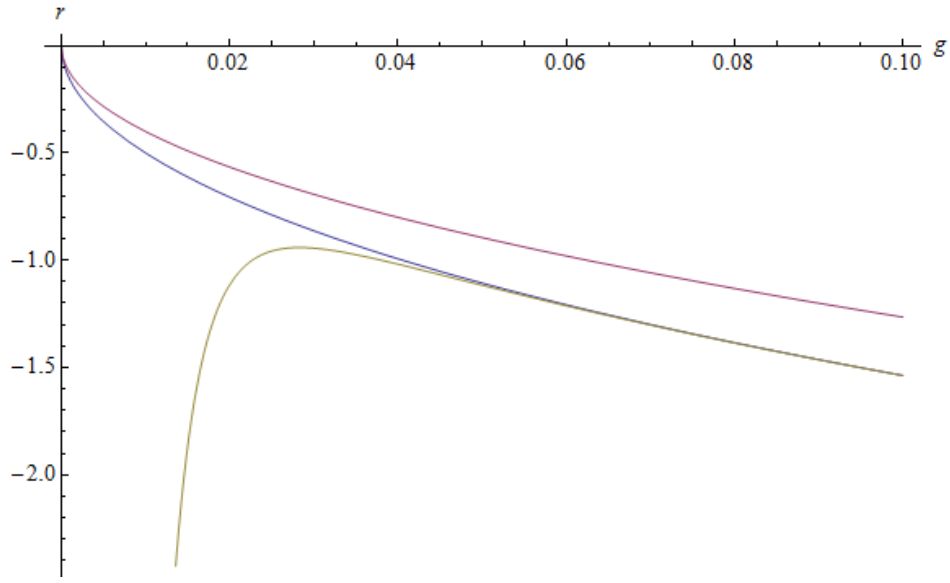
$$\begin{aligned} r + F'\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) &= -4\sqrt{g}, \\ r(g) &= -5\sqrt{g} - \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{\sqrt{g}}}}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Rozvoj funkcie $F(t_2)$ v momentoch t_2 je v prípade fázového prechodu rozvoj v $\frac{1}{\sqrt{g}}$. Takýto rozvoj je asymptotický v okolí $g = 0$, iba z prvých členov rozvoja preto okolo počiatku nedostaneme spoľahlivú krivku fázového prechodu. Obrázok (obr. 3.3) zobrazuje na porovnanie fázový prechod maticového modelu bez kinetického členu (2.32),

modelu s uvažovanou aproximáciou kinetického členu (3.79) a modelu s rozvojom funkcie $F(t_2)$ v t_2 do ôsmeho rádu:

$$F(c_2) \approx \frac{c_2}{2} - \frac{c_2^2}{24} + \frac{c_2^4}{2280} - \frac{c_2^6}{181440} + \frac{c_2^8}{9676800} + \dots$$

$$r = -4\sqrt{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12\sqrt{g}} - \frac{1}{720g^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{30240g^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{1209600g^{\frac{7}{2}}} \quad (3.80)$$



Obr. 3.3: Fialovou farbou je zobrazený fázový prechod modelu bez kinetického členu (2.32), modrou farbou fázový prechod uvažovaného modelu s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou $F(c_2)$ (3.79) a hnedou farbou fázový prechod modelu s efektívnym účinkom aproximovaným rozvojom $F(c_2)$ do ôsmeho rádu (3.80).

Mimo krivky fázového prechodu nie sme schopný vyriešiť model analyticky. Numerickým riešením rovníc analogických k (3.75), (3.76) v prípade úplnej nesymetrickej funkcie $F(t_2) = F(c_2 - c_1^2)$ a pre príslušné momenty dvojintervalovho, prípadne asymetrického jednointervalovho rozdelenia, sa ale ukázalo [1], že uvažovaný model (3.74) má aj stabilné asymetrické jednočasticové riešenie a toto riešenie má nižšiu voľnú energiu ako symetrické dvojčasticové riešenie pre všetky parametre r, g , pre ktoré je možné. Fázový diagram teda obsahuje tri fázy a krivky fázových prechodov sa stretávajú v trojnóm bode, ktorý bol v uvedenom článku určený:

$$g_c \approx 0,02 \quad r_c \approx -0,7. \quad (3.81)$$

Takýto fázový diagram je v kvalitatívnej zhode s diagramami, ktoré sa dostali numerickými prístupmi k riešeniu skalárnej teórie poľa v [6], [7], ktoré však určili trojný bod

v [6]:

$$g_c = 0,13 \pm 0,005 \quad r_c = -2,3 \pm 0,2 \quad (3.82)$$

a v [7]:

$$g_c = 0,145 \pm 0,025 \quad r_c = -2,49 \pm 0,07. \quad (3.83)$$

3.4.2 Maticový model s efektívnym účinkom aproximovaným známymi členmi multistopového rozvoja

Majme maticový model zadaný účinkom:

$$S = \frac{1}{2}F(t_2) - \frac{1}{432}t_3^2 - \frac{1}{3456}(t_4 - 2t_2^2)^2 + \left[\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2}r\lambda_i^2 + \frac{1}{N} \sum_i g\lambda_i^4 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \right] \quad (3.84)$$

a teda efektívny účinok S_{eff} aproximujeme všetkými známymi členmi jeho multistopového rozvoja. Znovu nás bude zaujímať najmä zmena krivky fázového prechodu medzi symetrickými fázami a teda nám stačí uvažovať účinok v tvare:

$$S = \frac{1}{2}F(c_2) - \frac{1}{3456}(c_4 - 2c_2^2)^2 + \left[\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2}r\lambda_i^2 + \frac{1}{N} \sum_i g\lambda_i^4 - \frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| \right]. \quad (3.85)$$

Aj v tomto prípade budeme postupovať podľa paragrafu 3.2, máme teda efektívne parametre:

$$r_{eff} = r + F'(c_2) + \frac{1}{216}c_2(c_4 - 2c_2^2), \quad g_{eff} = g - \frac{1}{1728}(c_4 - 2c_2^2). \quad (3.86)$$

A pre momenty pre symetrické jednointervalové rozdelenie dostávame:

$$c_2 = \frac{\delta}{4} + \frac{\delta^3 g}{16}, \quad (3.87)$$

$$c_4 = \frac{\delta^2}{8} + \frac{3\delta^4 g}{64}. \quad (3.88)$$

Spolu so vzťahom $r_{eff} = -4\sqrt{g}$ z (3.86) až (3.88) získame kritickú krivku:

$$r(g) = -\frac{1}{1 - e^{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{24g + \sqrt{1 + 576g^2}}}}} + \frac{2}{\sqrt{3}(24g + \sqrt{1 + 576g^2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{5\sqrt{24g + \sqrt{1 + 576g^2}}}{4\sqrt{3}}. \quad (3.89)$$

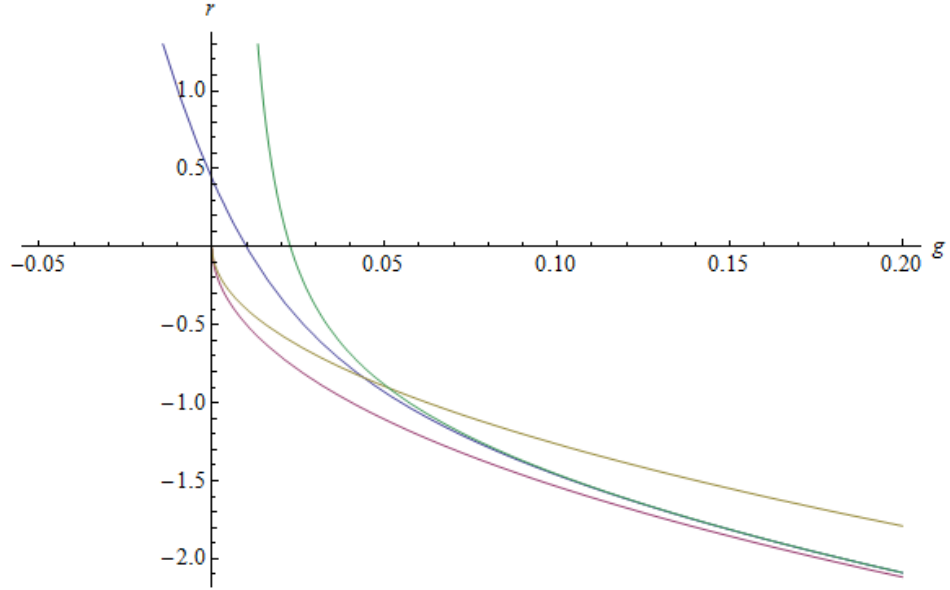
Zrátajme ešte fázový prechod v prípade, keď funkciu $F(t_2)$ v efektívnom účinku rozvineme do štvrtého rádu. V takomto prípade dostaneme konzistentný poruchový rozvoj v parametri ϵ zavedenom v (3.5). Funkciu $F(t_2)$ teda aproximujeme:

$$F(t_2) \approx \frac{t_2}{2} - \frac{t_2^2}{24} + \frac{t_2^4}{2280} \quad (3.90)$$

a z (3.86) až (3.88), spolu s $r_{eff} = -4\sqrt{g}$ v takomto prípade dostaneme:

$$r(g) = -4\sqrt{g} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12\sqrt{g}} + \frac{7}{5760g^{\frac{3}{2}}} + \frac{29}{1935360g^{\frac{5}{2}}} \quad (3.91)$$

Krivky (3.89), (3.91) sú zobrazené na obrázku (obr. 3.4), spolu s kritickou krivkou, ktorú sme dostali v predchádzajúcom paragrafe (3.79) a s kritickou krivkou pre maticový model bez kinetického členu (2.32). Vidíme, že v oboch prípadoch, aj keď



Obr. 3.4: Hnedou farbou je zobrazený fázový prechod modelu bez kinetického členu (2.32), modrou farbou fázový prechod uvažovaného modelu s efektívnym účinkom aproximovaným známymi členmi multistopového rozvoja (3.89), zelenou farbou model s efektívnym účinkom aproximovaným multistopovým rozvojom konzistentne do štvrtého rádu a fialovou farbou fázový prechod modelu s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhého momentu $F(t_2)$ (3.79).

uvažujeme $F(t_2)$ poruchovo a aj keď analyticky, krivka fázového prechodu, ktorú sme dostali, neprechádza počiatkom, tak ako to očakávame od skutočnej úplnej kritickej krivky uvažovanej skalárnej teórie, keďže z analytického riešenia v časti 3.3.2 vidíme, že pre parameter $g = 0$ a $r \leq 0$ nemáme stabilné riešenie (pre $r \rightarrow 0$ polomer rozdeľovania R (3.57) diverguje). To naznačuje, že multistopový rozvoj efektívneho účinku S_{eff} , aj keď zoberieme časť $F(t_2)$ analyticky, nie je dobrým nástrojom na skúmanie fázovej štruktúry skalárnej teórie poľa.

Mimo krivky fázového prechodu medzi dvoma symetrickými fázami nie sme znovu schopný postupovať analyticky a v prípade úplného nesymetrického účinku (3.84) a

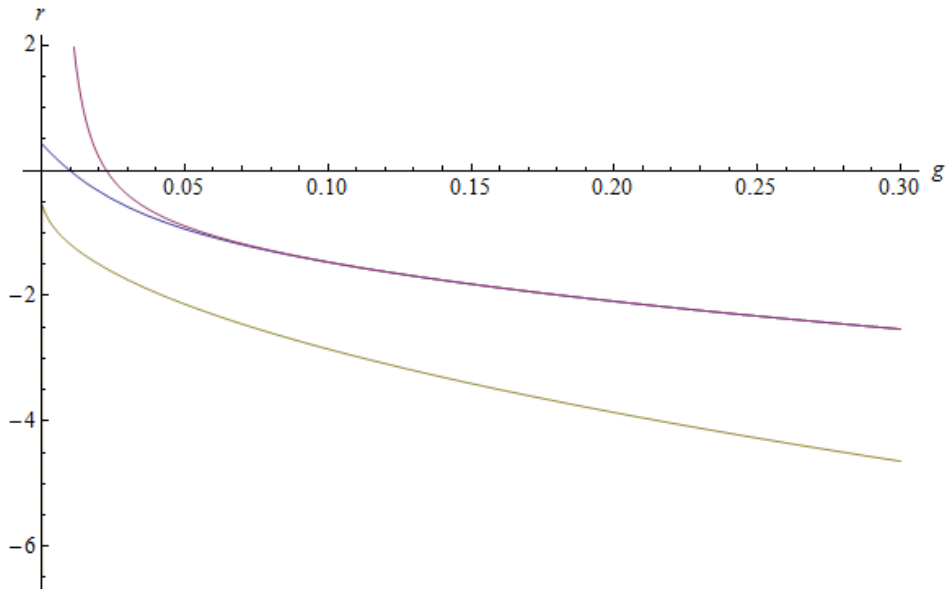
dvojintervalovho, respektíve asymetrického riešenia dostávame príliš komplikované rovnice aj pre numerický prístup. Model s úplným účinkom sa však dá analyzovať poruchovo:

$$S_{eff} \approx \epsilon A_1(c_2 - c_1^2) + \epsilon^2 A_2(c_2 - c_1^2)^2 + \epsilon^3 A_3(c_3 - 3c_1c_2 + 2c_1^3)^2 + \epsilon^4 \left[A_4(c_2 - c_1^2)^4 + B_4[c_4 - 4c_3c_1 + 6c_2c_1^2 - 3c_1^4] - 2(c_2 - c_1^2)^2 \right] \quad (3.92)$$

a krivka fázového prechodu medzi dvojintervalovým a asymetrickým riešením sa potom nájde z takéhoto modelu poruchovo do štvrtého rádu v ϵ a na záver sa položí $\epsilon = 1$. V [1] túto krivku určili:

$$r(g) = -2\sqrt{15}\sqrt{g} - \frac{2}{5} - \frac{19}{18000\sqrt{15}\sqrt{g}} + \frac{29}{1125000g} - \frac{7886183}{437400000000\sqrt{15}g^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.93)$$

Keď teraz zobrazíme kritické krivky (3.89), (3.91) a (3.93), (obr. 3.5), vidíme, že takýto poruchový model nemá trojný bod. Z výsledkov tohto paragrafu vyplýva, že štruktúra



Obr. 3.5: Modrou farbou je zobrazený neporuchová krivka fázového prechodu medzi symetrickými fázami (3.89), fialovou farbou poruchová krivka toho fázového prechodu (3.91) a hnedou farbou fázový prechod medzi symetrickým dvojintervalovým a asymetrickým rozdelením (3.93).

fázového diagramu je veľmi citlivá na členy multistopovho rozvoja a bez poznania celého tohto rozvoja do všetkých rádov toho o fázovom priestore kvartickej skalárnej teórii na nekomutatívnej sfére nevieme veľa povedať. Videli sme, že neporuchový model s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhých momentov $F(t_2)$ kvalitatívne

zreprodukoval numerické výsledky, narozdiel od poruchového modelu. Neúplný multistopový rozvoj teda nie je dobrým nástrojom na analýzu fázového priestoru spomínanej skalárnej teórie a jej zodpovedajúceho maticového modelu a môže byť užitočné hľadať iné spôsoby neporuchovej aproximácie kinetického členu v účinku.

Kapitola 4

Aproximácia efektívneho účinku párovou interakciou vlastných hodnôt

V tejto kapitole aproximujeme efektívny účinok S_{eff} , definovaný v (3.2), párovou interakciou vlastných hodnôt, teda funkciou typu:

$$S_{eff} \approx \sum_i \sum_j \tilde{f}(\lambda_i, \lambda_j) \quad (4.1)$$

a maticový model, ktorý dostaneme sa pokúsime riešiť v limite veľkého N metódou sedlového bodu, pričom nás bude zaujímať najmä krivka fázového prechodu medzi dvoma symetrickými fázami kvartického modelu.

4.1 Párová aproximácia efektívneho účinku

Hľadáme teda funkciu $\tilde{f}(\lambda_i, \lambda_j)$ tak, aby rozvoj tejto funkcie v λ_i, λ_j sedel s príslušnými členmi v multistopovom rozvoji efektívneho účinku (3.5). Naša aproximácia efektívneho účinku obsahuje iba dve stopy, to znamená, že pokrýva iba také členy multistopového rozvoja, ktoré obsahujú súčin najviac dvoch momentov c_n . Časť multistopového rozvoja, ktorá nás teda zaujíma je:

$$S_{eff} \approx \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 - \frac{1}{48}c_2^2 - \frac{1}{432}c_3^2 - \frac{1}{3456}c_4^2. \quad (4.2)$$

Keďže vidíme, že takýto rozvoj obsahuje iba druhé mocniny momentov a prvú mocninu druhého momentu c_2 , skúsme funkciu $\tilde{f}(\lambda_i, \lambda_j)$ hľadať v tvare:

$$\tilde{f}(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{4} c_2 + \frac{1}{N^2} f(\lambda_i, \lambda_j). \quad (4.3)$$

Keďže efektívny účinok je definovaný:

$$e^{-S_{eff}} = \int dU e^{-S_{kin}} = f_0(\Lambda) = e^{\log(f_0(\Lambda))}, \quad (4.4)$$

prirodzene očakávame, že vo funkcii, ktorou aproximujeme účinok, by sa mohol vyskytnúť nejaký logaritmus. Skúsme teda funkciu $f(\lambda_i, \lambda_j)$ hľadať v tvare:

$$f(\lambda_i, \lambda_j) = a \log(1 - b\lambda_i\lambda_j). \quad (4.5)$$

Rozvojom f dostaneme:

$$f(\lambda_i\lambda_j) = -ab\lambda_i\lambda_j - \frac{ab^2}{2}\lambda_i^2\lambda_j^2 - \frac{ab^3}{3}\lambda_i^3\lambda_j^3 - \frac{ab^4}{4}\lambda_i^4\lambda_j^4 - \dots$$

a rozvoj takto aproximovaného účinku S_{eff} bude teda tvaru:

$$S_{eff} = \frac{1}{4}c_2 - abc_1^2 - \frac{ab^2}{2}c_2^2 - \frac{ab^3}{3}c_3^2 - \frac{ab^4}{4}c_4^2 - \dots \quad (4.6)$$

Keď teraz porovnáme koeficienty pri c_1^2 , c_2^2 v rozvoji (4.6) s rozvojom (4.2) dostaneme:

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4}, \\ \frac{ab^2}{2} &= \frac{1}{48}, \\ a &= \frac{6}{4}, \quad b = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

S prekvapením zisťujeme, že s takto určenými parametrami a , b sedia aj zvyšné dva koeficienty rozvoja pri c_3^2 a c_4^2 :

$$\begin{aligned} \frac{ab^3}{3} &= \frac{1}{3} \frac{6}{4} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{432}, \\ \frac{ab^4}{4} &= \frac{1}{4} \frac{6}{4} \frac{1}{6^4} = \frac{1}{3456}. \end{aligned}$$

To znamená, že len pomocou dvoch parametrov vo funkcii f sme dostali správne všetky štyri koeficienty v multistopovom rozvoji. Ak by takto určená funkcia f dávala skutočnú párovú časť efektívneho účinku, dostávame z nej aj ďalšie, doposiaľ neznáme, koeficienty v multistopovom rozvoji efektívneho účinku a to koeficienty stojace pri členoch typu $(t_{2n} - \mathcal{C}_n t_2^n)^2$.

Aproximujme teda účinok S_{eff} funkciou:

$$S_{eff} = \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \frac{6}{4} \log \left(1 - \frac{\lambda_i\lambda_j}{6} \right). \quad (4.8)$$

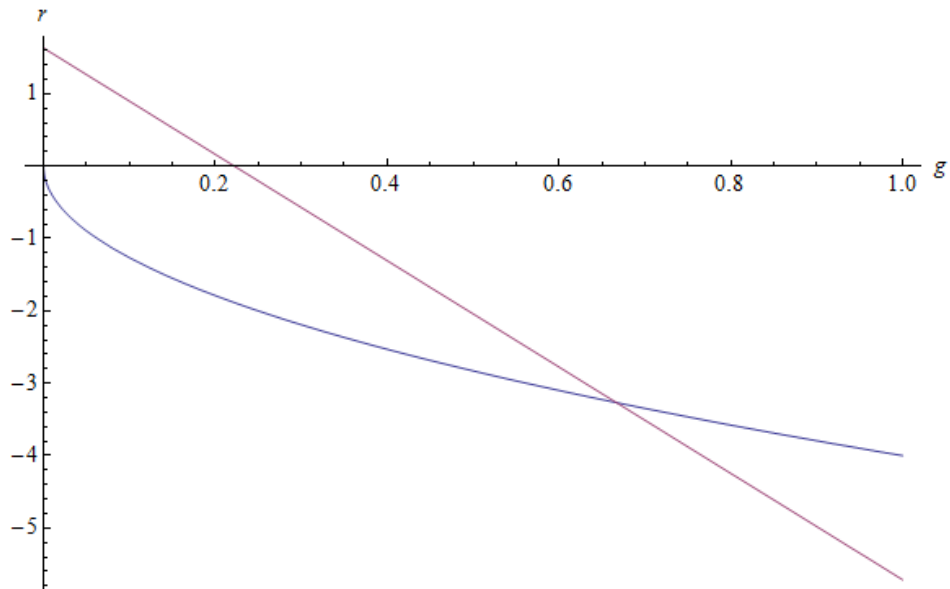
Vidíme, že takáto aproximácia má dobrý zmysel jedine pre dostatočne úzke rozdelenia, kde:

$$-\sqrt{6} < \lambda_i < \sqrt{6}, \quad (4.9)$$

kedy argument logaritmu nebude nadobúdať záporné hodnoty. Keď sa pozrieme na vzťah pre polomer rozdelenia v prípade kvartickej teórie bez kinetického členu v účinku (2.30) a pre predstavu v akej časti fázového diagramu je takáto aproximácia použiteľná budeme považovať $\delta < \sqrt{6}$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6g}(\sqrt{r^2 + 48g} - r) < \sqrt{6}, \\ g > \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{6}}{18}r. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Keďže kinetický člen v účinku zavádza príťažlivú silu medzi vlastnými hodnotami, očakávame, že aj v našom aproximovanom modeli bude polomer rozdelenia menší ako v prípade modelu bez tohto členu. Výraz pre efektívny účinok tak bude mať rozumný zmysel v trochu väčšej oblasti ako nad krivkou (4.10). Táto krivka je spolu s krivkou fázového prechodu modelu bez kinetického členu, pre predstavu, zobrazená na obrázku (obr. 4.1).



Obr. 4.1: Modrou farbou je zobrazený fázový prechod modelu bez kinetického členu (2.32), fialovou farbou, nad ktorou má dobrý zmysel funkcia, ktorou aproximujeme efektívny účinok S_{eff} (4.10).

Keď si ešte pripomenieme, ako vyšli trojné body kvartickej teórie v numerických

simuláciách [6], [7]:

$$\begin{aligned} g_c &= 0.13 \pm 0.005 & r_c &= -2.3 \pm 0.2, \\ g_c &= 0.145 \pm 0.025 & r_c &= -2.49 \pm 0.07 \end{aligned} \quad (4.11)$$

a v prípade numerického riešenia rovníc, ktoré sa dostanú metódou sedlového bodu pre model s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhých momentov $F(t_2)$ v [1]:

$$g_c \approx 0.02 \quad r_c \approx -0.73, \quad (4.12)$$

vidíme, že tieto body ležia mimo uvažovanej oblasti, avšak nie veľmi ďaleko.

Máme teda celkový účinok S tvaru:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| + \frac{1}{N} \frac{1}{4} \sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \frac{6}{4} \log\left(1 - \frac{\lambda_i \lambda_j}{6}\right). \quad (4.13)$$

Pre zjednodušenie nasledujúcich výpočtov ešte preškálujme model nasledovne:

$$\lambda_i \rightarrow \sqrt{6}\lambda_i. \quad (4.14)$$

Takéto škálovanie posúva účinok o konštantu $2 \log(\sqrt{6})$. Jedna polovica tejto konštanty pochádza zo škálovania logaritmického členu v účinku a druhá polovica z preškálovania integračnej miery:

$$d\lambda \rightarrow \sqrt{6}d\lambda, \quad (4.15)$$

kde rovnako ako v prvej kapitole, jakobián vyhodíme do exponenty.

Účinok S (4.13) potom prejde na:

$$S = \frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| + \frac{1}{N} \frac{3}{2} \sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \frac{3}{2} \log(1 - \lambda_i \lambda_j), \quad (4.16)$$

kde parametre v potenciály $V(\lambda_i)$:

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2} r \lambda_i^2 + \sum_{n>2} g_n \lambda_i^n, \quad (4.17)$$

prešli na:

$$r \rightarrow \frac{r}{6}, \quad (4.18)$$

$$g_n \rightarrow \frac{g_n}{6^{\frac{n}{2}}}. \quad (4.19)$$

Hľadáním extrému tohto účinku dostaneme rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} &= 0, \\ V'(\lambda_i) + 3\lambda_i &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq i} \frac{2}{\lambda_i - \lambda_j} + \frac{3}{2} \sum_j \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_i \lambda_j} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Zahrňme druhý člen na ľavej strane do derivácie potenciálu $V'(\lambda_i)$. Namiesto parametra r teda budeme písať $\tilde{r} = r + 3$. Prepíšme ešte posledný člen na pravej strane v predchádzajúcej extrémálnej rovnici v prípade $\lambda_j \neq 0$ nasledovne:

$$\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_i \lambda_j} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_j} - \lambda_i}. \quad (4.21)$$

Vidíme, že efektívny člen zavádza medzi silu 2D Coulombovkého typu, akurát, že v tomto prípade nemáme odpudzovanie medzi vlastnými hodnotami, ale príťažlivú silu medzi jednou vlastnou hodnotou λ_i a inverznou hodnotou druhej vlastnej hodnoty $\frac{1}{\lambda_j}$. Výraz pre efektívny účinok má teda dobrý zmysel len vtedy, keď sa intervaly, v ktorých sa nachádzajú vlastné hodnoty neprekrývajú s intervalmi, v ktorých sa nachádzajú ich inverzné hodnoty. Všimnime si ešte, že logaritmická časť efektívneho účinku bude rozdelenie rozťahovať, efektívne tak bude pôsobiť ako odpudivá sila medzi vlastnými hodnotami, výslednú príťažlivú silu kinetického účinku teda musí zabezpečiť nelogaritmický člen $\frac{1}{4}c_2$.

4.2 Extrémálne rovnice predchádzajúcich maticových modelov ako Riemann-Hilbertov problém

V predchádzajúcej časti sme pre extrém účinku S , (4.13) dostali rovnicu:

$$V'(\lambda_i^E) = \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq i} \frac{2}{\lambda_i^E - \lambda_j} + \frac{3}{2} \sum_j \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_i^E \lambda_j} \right), \quad (4.22)$$

kde:

$$V'(\lambda_i^E) = \frac{1}{2}(r+3)(\lambda_i^E)^2 + \sum_{n>2} g_n(\lambda_i^E)^n. \quad (4.23)$$

Teraz nás bude zaujímať riešenie tejto rovnice v limite veľkého N , konkrétne riešenie zodpovedajúce symetrickému rozdeleniu vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$ so supportom tvoreným jedným súvislým intervalom. Z tvaru tohto riešenia budeme potom schopný určiť fázový

prechod medzi dvoma symetrickými fázami kvartického modelu, keďže tento prechod musí nastať práve pre také parametre kvartického modelu r, g , pre ktoré platí:

$$\rho(0) = 0. \quad (4.24)$$

Rovnicu (4.26) však nie sme schopný riešiť rovnakým spôsobom ako extrémálne rovnice, ktoré sme dostali pre maticové modely v predchádzajúcich kapitolách, kde sme zaviedli funkciu $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i^E} \quad (4.25)$$

a úpravou výrazu pre druhú mocninu tejto funkcie sme pre ňu dostali rovnicu, v ktorej sme všetky neznáme parametre určili zo správania $\omega(z)$ v limite $|z| \rightarrow \infty$, pri konkrétnom tvare supportu rozdelenia $\rho(\lambda)$. Tieto extrémálne rovnice sme však schopný riešiť ešte iným spôsobom a to ich prevedením na Riemann- Hilbertov problém. Zovšeobecnením tejto cesty potom dokážeme nájsť aspoň poruchové riešenie rovnice (4.26) v limite veľkého N .

Majme teda najprv extrémálnu rovnicu typu:

$$V'(\lambda_i^E) = \frac{1}{N} \left(\sum_{j \neq i} \frac{2}{\lambda_i^E - \lambda_j} \right), \quad (4.26)$$

kde vo V' môžu namiesto skutočných parametrov maticového modelu r, g_n vystupovať efektívne parametre, ako sme to videli v prípade maticových modelov s multistopovými členmi. Extrémálna rovnica (4.26) teda zodpovedá modelom takých typov, aké sme uvažovali v predchádzajúcich kapitolách. Pozrime sa teraz na spomínaný druhý spôsob jej riešenia, pričom hľadáme jednointervalové riešenie so supportom daným intervalom (a, b) .

V limite veľkého N rovnica (4.26) prejde na:

$$V'(x) = 2\text{P.V.} \int_a^b \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{x - \lambda}, \text{ pre } \lambda \in (-a, a), \quad (4.27)$$

kde P.V. označuje Cauchyho hlavnú hodnotu daného integrálu definovanú:

$$\text{P.V.} \int_a^b \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{x - \lambda} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{x-i\epsilon} \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{x - \lambda} + \int_{x+i\epsilon}^b \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{x - \lambda}. \quad (4.28)$$

Uvážením, že v limite veľkého N prejde funkcia $\omega(z)$ (4.25) na:

$$\omega(z) = \int_a^b \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{z - a}, \quad (4.29)$$

potom dostávame vzťah:

$$\omega(x \pm i\epsilon) = P.V. \int_a^b \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{x - \lambda} \mp \pi i \rho(x). \quad (4.30)$$

Tento vzťah sa nazýva Plemejlova formula a platí všeobecne pre ľubovoľnú funkciu definovanú (4.29), kde $\rho(\lambda)$ spĺňa Hölderovu podmienku na intervale (a, b) :

$$\exists C > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad |\rho(\lambda) - \rho(\lambda_1)| \leq C|\lambda - \lambda_1|^\alpha, \quad \text{pre } \forall \lambda \in (a, b). \quad (4.31)$$

Rovnicu (4.27) teda môžeme prepísať nasledovným spôsobom:

$$\omega(x + i\epsilon) + \omega(x - i\epsilon) = V'(x), \text{ pre } \lambda \in (a, b). \quad (4.32)$$

Rovnice typu (4.32) sa nazývajú Riemann- Hilbertove problémy a na ich riešenie existuje štandardná metóda, ktorá sa dá nájsť napr. v [9] a teraz si ju uvedieme aj tu.

4.2.1 Homogénny Riemann- Hilbertov problém

Pozrime sa najprv na riešenie homogénneho Riemann- Hilbertovho problému (4.32):

$$\omega(x + i\epsilon) + \omega(x - i\epsilon) = 0. \quad (4.33)$$

Keď predchádzajúcu rovnicu trochu upravíme a zlogaritmujeme, dostaneme:

$$\begin{aligned} \omega(x + i\epsilon) - (-\omega(x - i\epsilon)) &= 0, \\ \log \omega(x + i\epsilon) - \log \omega(x - i\epsilon) &= \log(-1). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Využitím Plemejlovej formuly (4.29), (4.30) potom získame riešenie v tvare:

$$\omega(z) = \Gamma(z)F(z), \quad (4.35)$$

kde:

$$\Gamma(z) = e^{[u(z)]}, \quad (4.36)$$

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\text{Log}(-1)d\lambda}{z - \lambda} = -\left(\frac{1}{2} + n\right) \int_a^b \frac{d\lambda}{z - \lambda}, \quad (4.37)$$

kde n závisí od voľby rezu logaritmu, ako však uvidíme, riešenie bude nezávislé od tejto voľby. $F(z)$ je ľubovoľná funkcia, analytická na intervale $(-a, a)$, keďže očividne

prenásobením riešenia analytickej funkciou platnosť rovnice (4.33) nezmeníme. Z Plemeljovej formuly (4.29), (4.30) dostaneme takisto platnosť vzťahu, ktorý využijeme neskôr:

$$\Gamma(x \pm i\epsilon) = \exp \left[f(x) \pm i\pi \left(\frac{1}{2} + n \right) \right], \quad (4.38)$$

kde:

$$f(x) = P.V. \left(\frac{1}{2} + n \right) \int_a^b \frac{d\lambda}{\lambda - x} = \left(\frac{1}{2} + n \right) \log \left(\frac{b-x}{-a+x} \right). \quad (4.39)$$

Nás bude zaujímať len riešenie $\omega(z)$, ktoré je ohraničené v koncových bodoch intervalu (a, b) , pretože inak by sme nedostali rozdelenie vlastných hodnôt $\rho(\lambda)$ v týchto bodoch nulové. Pre $\omega(z)$ (4.29) platí:

$$\omega(z) = \rho(b) \log \frac{1}{z-b} + \Phi_b(z) \quad \text{pri } z \rightarrow b, \quad (4.40)$$

$$\omega(z) = -\rho(-a) \log \frac{1}{z-a} + \Phi_a(z) \quad \text{pri } z \rightarrow a, \quad (4.41)$$

kde funkcie $\Phi_a(z)$, $\Phi_b(z)$ sú ohraničené v z s konečnou limitou pri $z \rightarrow a, b$. Dôkaz tohto tvrdenia je vcelku obsiažny a dá sa nájsť napríklad v [11], tu ho uvádzať nebudeme. Vidíme teda, že v prípade $\rho(a) = 0$, $\rho(b) = 0$ musí byť funkcia $\omega(z)$ v koncových bodoch a, b ohraničená. Požadujeme teda:

$$\omega(z) = O((z-a)^k) \quad k > 0 \quad \text{keď } z \rightarrow a \quad (4.42)$$

a obdobne aj pre hornú hranicu b . Keďže vzťahy (4.40), (4.41) platia všeobecne pre funkciu definovanú (4.29) s $\rho(\lambda)$ ľubovoľnou funkciou spĺňajúcou Hölderovu podmienku (4.31), pre funkciu $u(z)$ (4.37) musí platiť:

$$u(z) = -\left(\frac{1}{2} + n \right) \log [(z-a) + u_a(z)] \quad \text{keď } z \rightarrow a, \quad (4.43)$$

$$u(z) = \left(\frac{1}{2} + n \right) \log [(z-b) + u_b(z)] \quad \text{keď } z \rightarrow b, \quad (4.44)$$

kde $u_a(z)$, $u_b(z)$ sú znovu ohraničené funkcie s konečnou limitou pri $z \rightarrow a, b$. Pre funkciu $\Gamma(z)$ (4.36) potom dostaneme:

$$\Gamma(z) = O((z-a)^{-\frac{1}{2}-n}) \quad \text{keď } z \rightarrow a, \quad (4.45)$$

$$\Gamma(z) = O((z-b)^{\frac{1}{2}+n}) \quad \text{keď } z \rightarrow b. \quad (4.46)$$

Riešenie homogénneho Riemann-Hilbertovho problému $\omega(z)$ môžeme teda vyjadriť v tvare:

$$\omega(z) = P(z)X(z), \quad (4.47)$$

kde $P(z)$ je ľubovoľný polynóm a $X(z)$ je tvaru:

$$X(z) = (z - a)^{n+1}(z - b)^{-n}\Gamma(z), \quad (4.48)$$

s $\Gamma(z)$ danou (4.36).

4.2.2 Nehomogénny Riemann- Hilbertov problém

Vyriešme teraz nehomogénny Riemann- Hilbertov problém, ktorý nás zaujíma (4.32).

Riešenie takejto rovnice je dané vzťahom:

$$\omega(z) = X(z)(P(z) + \Phi(z)), \quad (4.49)$$

kde funkcia $\Phi(z)$ je daná:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{d\lambda V'(\lambda)}{(\lambda - z)X(\lambda + i\epsilon)}. \quad (4.50)$$

Tvrdenie (4.49) dokážeme nasledovným spôsobom. Využijúc, že $X(z)$ je riešim homogénneho Riemann- Hilbertovho problému (4.33) môžeme nehomogénny problém (4.49) prepísať:

$$X(x + i\epsilon) - X(x - i\epsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x + i\epsilon)/X(x - i\epsilon) = -1, \quad (4.51)$$

$$\frac{\omega(x + i\epsilon)}{X(x + i\epsilon)} - \frac{\omega(x - i\epsilon)}{X(x - i\epsilon)} = \frac{V'(x)}{X(x + i\epsilon)}, \quad (4.52)$$

$$\Phi(x + i\epsilon) - \Phi(x - i\epsilon) = \frac{V'(x)}{X(x + i\epsilon)}. \quad (4.53)$$

a použitím Plemeljovej formuly (4.29), (4.30) dostávame (4.50).

Využitím (4.38) dostaneme:

$$X(x \pm i\epsilon) = \pm i(-1)^n \sqrt{(b-x)(-a+x)} i(-1)^n = \mp \sqrt{(b-x)(-a+x)} \quad (4.54)$$

a teda máme riešenie našej extrémálnej rovnice pre maticové modely $\omega(z)$ v tvare:

$$\omega(z) = -X(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}(z-\lambda)} d\lambda + P(z) \right]. \quad (4.55)$$

Pre rozdelenie vlastných hodnôt $\rho(x)$ využitím (4.30), (4.54) dostaneme:

$$\rho(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(-a+x)(b-x)} P.V. \int_a^b \frac{V'(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}(\lambda-x)} + \frac{1}{i\pi} P(x) \sqrt{(b-x)(-a+x)}. \quad (4.56)$$

Keď teraz ešte využijeme, že $\omega(z)$ musí spĺňať:

$$\omega \sim \frac{1}{z} \quad \text{pri} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (4.57)$$

ako vidno z definície tejto funkcie (4.29), vidíme, že polynóm $P(z)$ musí byť nulový.

Dostaneme teda riešenie v tvare:

$$\rho(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(-a+x)(b-x)} P.V. \int_a^b \frac{V'(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)(\lambda-x)}} \quad (4.58)$$

s podmienkami, keďže funkcia $\Gamma(z) \sim 1$, pri $|z| \rightarrow \infty$:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}} d\lambda = 0, \quad (4.59)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\lambda V'(\lambda)}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}} d\lambda = 1. \quad (4.60)$$

Dá sa ukázať, že tieto vzťahy sú presne tie isté, ktoré sme dostali v druhej kapitole, len zapísané v inej forme.

4.3 Poruchové riešenie rovnice pre model s párovou aproximáciou efektívneho účinku

Prejdime teraz k maticovému modelu, ktorý nás zaujíma, teda k modelu s efektívnym účinkom S_{eff} aproximovaným párovou interakciou (4.16). Máme extrémálnu rovnicu:

$$\omega(x+i\epsilon) + \omega(x-i\epsilon) = V'(x) - \int_a^b K(x',x)\rho(x')dx', \quad (4.61)$$

kde $K(x',x)$ označuje integrálne jadro:

$$K(x',x) = \frac{3}{2} \frac{x'}{1-xx'}. \quad (4.62)$$

Túto integrálnu rovnicu prevedieme využitím riešenia Riemann- Hilbertových problémov uvedeného v predchádzajúcej kapitole na Fredholmovu integrálnu rovnicu druhého druhu, ktorú budeme riešiť poruchovo. Myšlienka tohto prechodu od rovnice tvaru (4.61) k Fredholmovej integrálnej rovnici sa dá nájsť v [12].

Zahrňme teda integrál $\int_a^b K(x',x)\rho(x')dx'$ do pravej strany nehomogénneho Riemann- Hilbertovho problému:

$$\omega(x+i\epsilon) + \omega(x-i\epsilon) = W'(x), \quad (4.63)$$

$$W'(x) = V'(x) - \int_a^b K(\lambda,x)\rho(\lambda)d\lambda. \quad (4.64)$$

Podľa predchádzajúceho paragrafu potom pre funkciu $\omega(z)$ dostávame:

$$\omega(z) = -X(z) \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{W'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)}(z-\lambda)} d\lambda. \quad (4.65)$$

Rozdelenie $\rho(\lambda)$ dostaneme znova využitím (4.30):

$$\begin{aligned} \rho(x) = & -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(x-a)(b-x)} P.V. \int_a^b \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)}(\lambda-x)} d\lambda - \\ & -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(x-a)(b-x)} P.V. \int_a^b d\lambda \left[\frac{\int_a^b K(\lambda', \lambda) \rho(\lambda') d\lambda'}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)}(\lambda-x)} \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Prehodením poradia integrálov cez λ a λ' , čo pre uvažované riešenia, pre ktoré $|a|, |b| < 1$ môžeme urobiť, dostaneme rozdelenie $\rho(\lambda)$ v tvare:

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \int_a^b N(x, x') \rho(x') d\lambda', \quad (4.67)$$

$$\rho_0(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(x-a)(b-x)} P.V. \int_a^b \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)}(\lambda-x)} d\lambda, \quad (4.68)$$

$$N(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{(x-a)(b-x)} P.V. \int_a^b d\lambda \left[\frac{K(x', \lambda)}{\sqrt{(\lambda-a)(b-\lambda)}(\lambda-x)} \right]. \quad (4.69)$$

Rozdelenie $\rho_0(x)$ má rovnaký tvar ako v prípade modelu bez kinetického členu, len s inými okrajmi rezu a, b . Integrálna rovnica tvaru (4.67) sa nazýva Fredholmova integrálna rovnica druhého druhu a dá sa riešiť postupnými aproximáciami [10]:

$$\rho_1(\lambda) = \rho_0(x) + \int_a^b N(x, x') \rho_0(x') d\lambda', \quad (4.70)$$

$$\rho_n(\lambda) = \rho_0(x) + \int_a^b N(x, x') \rho_{n-1}(x') d\lambda', \quad (4.71)$$

kde sa dá ukázať (dokazuje sa napríklad v [10]), že rad (4.71) určite konverguje pre $M(b-a) < 1$, kde M je ohraničenie:

$$|N(x, x')| \leq M \quad \text{pre} \quad \forall x, x'.$$

Pre okraje supportu rozdelenia a, b dostaneme podmienky:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{W'(\lambda)}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}} d\lambda = 0, \quad (4.72)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\lambda W'(\lambda)}{\sqrt{(b-\lambda)(-a+\lambda)}} d\lambda = 1. \quad (4.73)$$

4.3.1 Kvadratický potenciál

Pozrime sa teda na konkrétne príklady maticového modelu daného účinkom S (4.16).

Ako prvý príklad uvažujme v účinku kvadratický potenciál:

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2}r\lambda_i^2. \quad (4.74)$$

V takomto prípade v limite veľkého N analytické riešenie úplného maticového modelu zodpovedajúceho skalárnej teórii poľa na nekomutatívnej sfére poznáme, bude preto zaujímavé porovnať toto riešenie s našou aproximáciou tejto teórie danou maticovým modelom (4.16). Keďže však výrazy vystupujúce vo Fredholmovej rovnici (4.67) sú značne zložité zrátame rozdelenie vlastných hodnôt iba do prvej aproximácie $\rho_1(\lambda)$ (4.70).

Keďže uvažujeme symetrický potenciál aj výsledné extrémálne rozdelenie $\rho(\lambda)$ bude mať symetrický support $(-a, a)$. Pre rozdelenie vlastných hodnôt tak v prvej aproximácii dostávame:

$$\rho_1(x) = \rho_0(x) + \int_{-a}^a N(x, x')\rho_0(x')d\lambda', \quad (4.75)$$

kde:

$$\rho_0(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{(a^2 - x^2)}P.V. \int_{-a}^a \frac{\tilde{r}\lambda}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)}(\lambda - x)}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\tilde{r}\sqrt{(a^2 - x^2)}, \quad (4.76)$$

kde $\tilde{r} = r + 3$ ako bolo zavedené v časti 4.1 a integrálne jadro $N(x, x')$ dostávame:

$$\begin{aligned} N(x, x') &= \frac{3}{4\pi^2}\sqrt{a^2 - x^2}P.V. \int_{-a}^a d\lambda \left[\frac{x'}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}(\lambda - x)(1 - xx')} \right] = \\ &= -\frac{3}{4\pi} \frac{x'^2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{1 - a^2x'^2}(1 - xx')}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Pre rozdelenie $\rho_1(\lambda)$ potom dostávame:

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\tilde{r}\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{3}{8\pi^2}\sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{\tilde{r}x'^2\sqrt{a^2 - x'^2}}{\sqrt{1 - a^2x'^2}(1 - xx')}dx' = \\ &= \frac{1}{2\pi}\tilde{r}\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{3\tilde{r}}{4\pi^2}\sqrt{a^2 - x^2} \times \\ &\times \left[\frac{(-1 + a^4)a^2x^2E\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right) + (a^4 + x^2a^2 - a^6x^2)K\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{a^4x^4\sqrt{1 - a^4}} - \right. \\ &\left. - \frac{a^4\Pi\left(\frac{a^2x^2}{-1+a^2x^2}, \frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{a^4x^4\sqrt{1 - a^4}} \right], \end{aligned} \quad (4.78)$$

kde funkcia $E(m)$ značí úplný eliptický integrál druhého druhu:

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.79)$$

$K(m)$ úplný eliptický integrál prvého druhu:

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.80)$$

a $\Pi(n, m)$ úplný eliptický integrál tretieho druhu:

$$\Pi(n, m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.81)$$

Pozrime sa teraz na podmienku pre konvergenciu tejto metódy:

$$2aM < 1. \quad (4.82)$$

Jadro $N(x, x')$ zrejme dosahuje najväčšiu hodnotu pre $x' = a$ a pre také x , pre ktoré platí:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{1 - ax} \right) = 0, \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}(1 - ax)^2} [a^3 - x] = 0, \quad \Rightarrow \quad x = a^3. \quad (4.84)$$

Podmienka (4.82) teda prejde na:

$$\frac{3}{2} \frac{a^4 \sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 - a^4}(1 - a)} < 1, \quad (4.85)$$

z čoho približne dostaneme $a < 0,95$.

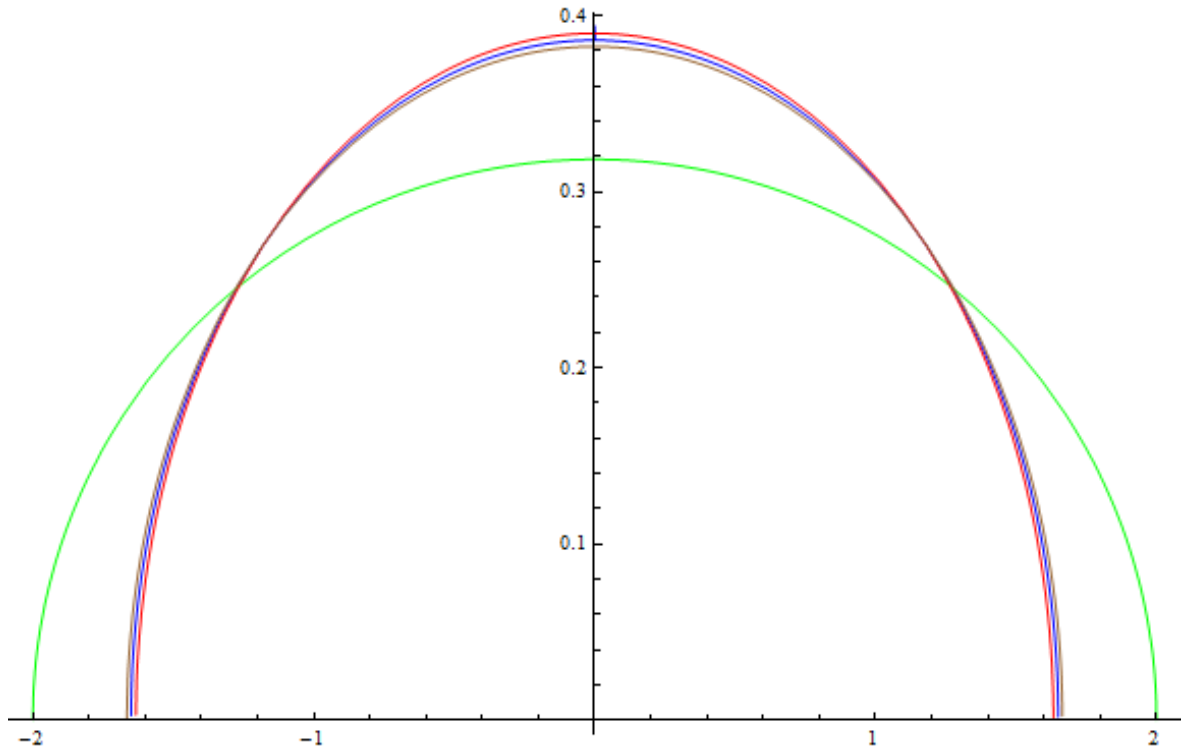
Hodnotu okraja a v prvej aproximácii dostaneme z podmienok (4.72), (4.73), dosadením za hustotu rozdelenia na pravej strane nultú aproximáciu $\rho_0(\lambda)$. Prvá z týchto podmienok nám vyjde splnená automaticky voľbou symetrického supportu rozdelenia $(-a, a)$, z druhej dostaneme hodnotu okraja rezu a . Túto hodnotu sme neboli schopní určiť analyticky ako funkciu $a(r)$, numericky ju však vieme dostať pre konkrétnu hodnotu parametra r v potenciály.

Obrázok (obr. 4.2) zobrazuje výsledné rozdelenie pre $r = 1$, pričom rozdelenie, ktoré sme dostali sme spätne preškálovali, zobrazujeme teda $\frac{1}{\sqrt{6}}\rho(6r, \frac{\lambda}{\sqrt{6}})$, aby sme naše rozdelenie porovnali so známym presným analytickým riešením modelu skalárnej teórie poľa v limite veľkého N , ako aj s maticovým modelom bez kinetického členu v účinku.

Na obrázku (obr. 4.2) zobrazujeme aj maticový model daný efektívnym účinkom len tvaru:

$$S_{eff} = \frac{1}{4}c_2, \quad (4.86)$$

teda efektívnym účinkom, ktorý sme uvažovali len bez logaritmického členu. Porovnaním s takýmto modelom potom vidíme, že tak ako sme očakávali, celý efektívny účinok daný (3.2) zavádza medzi vlastné hodnoty určitú príťažlivú silu, jeho logaritmická časť však zodpovedá odpudivej interakcii. Zdôraznime však, že naše riešenie je len poruchovým riešením modelu s efektívnym účinkom S_{eff} aproximovaným párovou interakciou medzi vlastnými hodnotami.



Obr. 4.2: Modrou farbou je zobrazené poruchové riešenie modelu s efektívnym účinkom aproximovaným párovou interakciou, zelenou farbou rozdelenie pre maticový model bez kinetického členu (2.25), hnedou farbou presné rozdelenie modelu zodpovedajúceho komutatívnej limite skalárnej teórie poľa na nekomutatívnej sfére (3.53) a červenou farbou rozdelenie modelu s efektívnym účinkom bez logaritmickkej časti (4.86). Všetky rozdelenia sú pre parameter v potenciály $r = 1$.

4.3.2 Kvartický potenciál

Pozrime sa teraz na zaujímavejší príklad, keď v účinku (4.16) uvažujeme symetrický kvartický potenciál:

$$V(\lambda_i) = \frac{1}{2}r\lambda_i^2 + g\lambda_i^4. \quad (4.87)$$

Hľadáme symetrické jednointervalové riešenie. V prvej aproximácii tak pre rozdelenie $\rho_1(\lambda)$ dostaneme:

$$\rho_1(x) = \rho_0(x) + \int_{-a}^a N(x, x')\rho_0(x')d\lambda', \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= -\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{(a^2-x^2)}P.V. \int_{-a}^a \frac{(\tilde{r}\lambda + 4g\lambda^3)}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)}(\lambda-x)}d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi}(2a^2g + \tilde{r} + 4gx^2)\sqrt{a^2-x^2}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

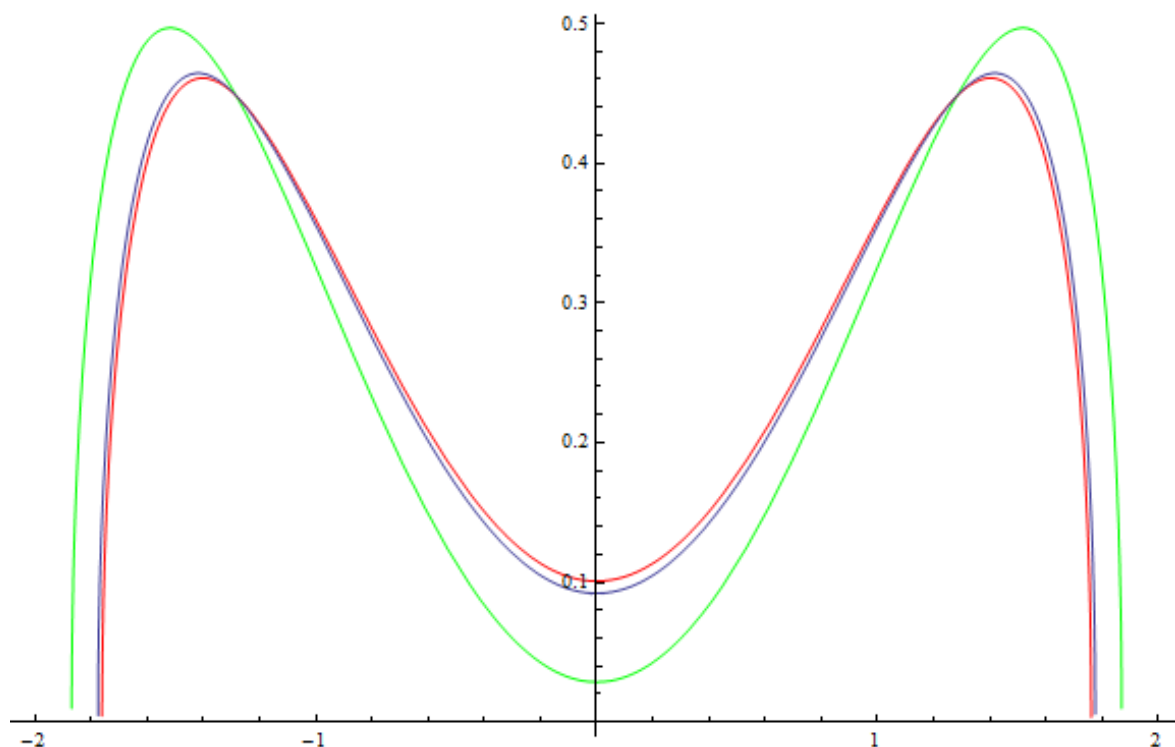
$$N(x, x') = -\frac{3}{4\pi} \frac{x'^2\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{1-a^2x'^2}(1-xx')}, \quad (4.90)$$

kde znovu $\tilde{r} = r + 3$. Zintegrovaním (4.88) potom dostaneme rozdelenie $\rho_1(\lambda)$ v tvare:

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}(2a^2g + r + 4gx^2)\sqrt{a^2-x^2} - \frac{3}{4\pi^2}\sqrt{a^2-x^2}(2a^2g + r) \times \\ &\times \left[\frac{(-1+a^4)a^2x^2E\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right) + (a^4+x^2a^2-a^6x^2)K\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{a^4x^4\sqrt{1-a^4}} - \right. \\ &\left. - \frac{a^4\Pi\left(\frac{a^2x^2}{-1+a^2x^2}, \frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{a^4x^4\sqrt{1-a^4}} \right] - \\ &- \frac{3g}{2\pi^2}\sqrt{a^2-x^2} \cdot \left[\frac{2a^2x^2(1-a^4)[-3a^4+a^2x^2(-2+a^4)]E\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{3a^8x^6\sqrt{1-a^4}} + \right. \\ &+ \frac{[6a^8+6a^6x^2(1-a^4)+4a^4x^4(1-a^4)]K\left(\frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{3a^8x^6\sqrt{1-a^4}} - \\ &\left. - \frac{6a^8\Pi\left(\frac{a^2x^2}{-1+a^2x^2}, \frac{a^4}{-1+a^4}\right)}{3a^8x^6\sqrt{1-a^4}} \right], \quad \text{pre } x \in (-a, a). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Podmienka na konvergenciu tejto metódy ostáva rovnaká, keďže integrálne jadro $N(x, x')$ nezávisí od konkrétneho tvaru potenciálu $V(\lambda)$. Okraj supportu rozdelenia v prvej aproximácii dostaneme znovu z podmienok (4.72), (4.73) dosadením za rozdelenie na pravej strane nulté priblíženie $\rho_0(\lambda)$, pričom rovnako ako v predchádzajúcej časti je prvá podmienka splnená automaticky uvažovaním symetrického supportu rozdelenia $(-a, a)$ a z druhej podmienky určíme okraj a . Ani v tomto prípade sa nám nepodarilo určiť okraj analyticky ako funkciu parametrov potenciálu $a(r, g)$, numericky ho však vieme dostať pre konkrétne hodnoty týchto parametrov. Obrázok (obr. 4.4) zobrazuje

znovu spätne preškálované riešenie $\frac{1}{\sqrt{6}}\rho(6r, 36g, \frac{\lambda}{\sqrt{6}})$, spolu s rozdelením pre maticový model bez kinetického členu v účinku (2.36) a rozdelením pre model s efektívnym účinkom daným (3.2) bez logaritmickkej časti pre parametre $r = -2$, $g = 0.3$. Podotknime, že kvôli numerickej nestabilite riešenia $\rho_1(\lambda)$ v okolí nuly, kde sme pre niektoré hodnoty λ dostávali nezmyselné výsledky ako 0 alebo nekonečno, sme v tejto oblasti vykreslili parabolickú aproximáciu riešenia $\rho_1(\lambda)$ (4.88).



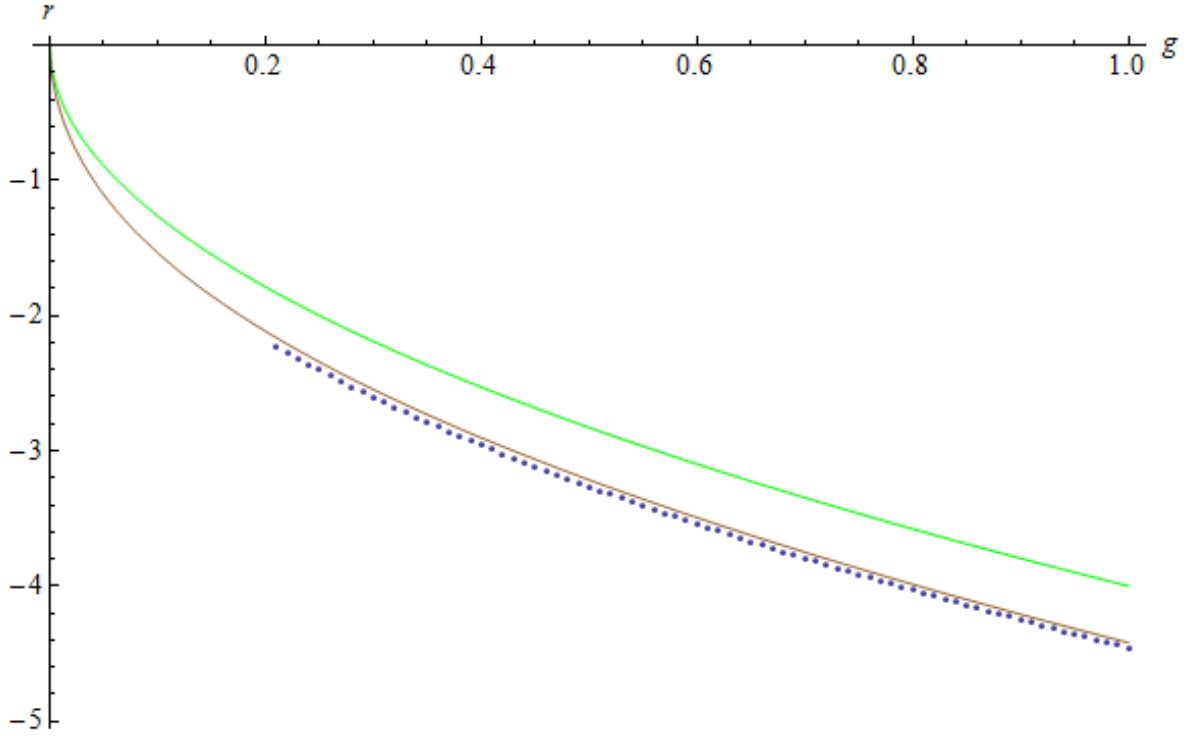
Obr. 4.3: Modrou farbou je zobrazené poruchové riešenie modelu s efektívnym účinkom aproximovaným párovou interakciou, zelenou farbou rozdelenie pre maticový model bez kinetického členu (2.36) a červenou farbou rozdelenie modelu s efektívnym účinkom bez logaritmickkej časti (4.86). Všetky rozdelenia sú pre parametre v potenciály rovné $r = -2$, $g = 0.3$.

Získajme ešte krivku fázového prechodu medzi symetrickým jednointervalovým a symetrickým dvojitervalovým riešením nášho modelu v prvej aproximácii. Fázový prechod zrejme nastáva pre také parametre r , g , pre ktoré dostávame:

$$\rho_1(0) = 0. \quad (4.92)$$

Tento fázový prechod sme riešili numerickejšpôsobom, že pre konkrétnu hodnotu parametra g sme postupne hľadali parameter r , pri ktorom s určitou presnosťou nastáva fázový prechod a takto sme potom postupovali pre rôzne hodnoty g . Obrázok (obr. ??)

zachytáva krivku fázového prechodu, ktorú sme dostali spolu s fázovým prechodom modelu bez kinetického členu v účinku, fázovým prechodom v prípade efektívneho účinku aproximovaného funkciou druhého moment $F(c_2)$ z časti 3.4.1 a fázovým prechodom modelu s efektívnym účinkom aproximovaným celým známym multistopovým rozvojom, časť 3.4.2, na porovnanie.



Obr. 4.4: Modrou farbou je zobrazený fázový prechod modelu s efektívnym účinkom aproximovaným párovou interakciou v prvej aproximácii pre $g \in (0, 2; 1)$, zelenou farbou fázový prechod pre maticový model bez kinetického členu (2.32) a hnedou farbou fázový prechod modelu s efektívnym účinkom aproximovaným funkciou druhého moment $F(c_2)$ (3.80).

4.4 Nekomutatívne $\mathbb{C}P^n$ priestory

Skalárnu teóriu poľa môžeme definovať aj na nekomutatívnych komplexných projekčných priestoroch $\mathbb{C}P^n$. Aj v týchto prípadoch sa ukáže byť, rovnako ako v prípade nekomutatívnej sféry $S_2 = \mathbb{C}P^1$, ekvivalentná hermitovským maticovým modelom s kinetickou časťou účinku zachytenou v efektívnom účinku $S_{eff}(\lambda)$. V prípade $n = 2, 3$ je známy multistopový rozvoj efektívneho účinku S_{eff} do tretieho rádu, uvedený je

napríklad v [1]:

$$\begin{aligned} \text{pre } n = 2 : \quad S_{eff} = & \frac{2}{3}(c_2 - c_1^2) - \frac{1}{18}(c_2 - c_1^2)^2 - \\ & - \frac{4}{405}(c_2 - c_1^2)^3 - \frac{1}{162}(c_3 - 3c_1c_2 + 2c_1^3)^2, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \text{pre } n = 3 : \quad S_{eff} = & \frac{6^{\frac{2}{3}}3}{4}(c_2 - c_1^2) - \frac{6^{\frac{4}{3}}3}{160}(c_2 - c_1^2)^2 - \\ & - \frac{3}{40}(c_2 - c_1^2)^3 - \frac{9}{400}(c_3 - 3c_1c_2 + 2c_1^3)^2. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Keď sa teraz pokúsime aproximovať efektívny účinok S_{eff} párovou interakciou vlastných hodnôt rovnakým spôsobom ako pre nekomutatívnu sféru v paragrafe 4.1, teda funkciou:

$$S_{eff} = a_0c_2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} a \log(1 - b\lambda_i\lambda_j), \quad (4.95)$$

zistíme, že aj teraz dostaneme yafixovaním dvoch parametrov a , b správne všetky tri príslušné koeficienty v multistopových rozvojoch (4.93), (4.94). Párová aproximácia pre efektívny účinok vychádza:

$$\text{pre } n = 2 : \quad S_{eff} = \frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} 4 \log\left(1 - \frac{\lambda_i\lambda_j}{6}\right), \quad (4.96)$$

$$\text{pre } n = 3 : \quad S_{eff} = \frac{3.6^{\frac{2}{3}}}{4}c_2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} 15 \log\left(1 - \frac{3^{\frac{2}{3}}}{10.2^{\frac{1}{3}}}\lambda_i\lambda_j\right), \quad (4.97)$$

V prípade všeobecného n je známa funkcia druhého momentu $F(t_2)$, dá sa nájsť tiež v [1], a teda poznáme práve dva koeficienty, ktoré potrebujeme na určenie parametrov a , b v logaritme (4.99). Rozvoj funkcie $F(t_2)$ do druhého rádu je pre nekomutatívny $\mathbb{C}P^n$ priestor daný:

$$F(c_2) = \frac{n(n!)^{\frac{2}{n}}}{n+1}(c_2 - c_1^2) - \frac{n(n!)^{\frac{4}{n}}}{2(n+1)^2(2+n)}(c_2 - c_1^2)^2. \quad (4.98)$$

Párová aproximácia potom vychádza:

$$S_{eff} = \frac{n(n!)^{\frac{2}{n}}}{n+1}c_2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \frac{n(n+2)}{2} \log \left[1 - \frac{(n!)^{\frac{2}{n}}}{(n+1)(n+2)}\lambda_i\lambda_j \right]. \quad (4.99)$$

Poruchové riešenie takýchto modelov môžeme nájsť úplne rovnako ako v prípade nekomutatívnej sféry.

Záver

V práci sme uviedli štandardné techniky na riešenie maticových modelov v limite veľkého N a ich následnú aplikáciu na riešenie modelu zodpovedajúcemu aproximácii skalárnej teórie poľa na sfére v komutatívnej limite. Po zreprodukovaní známych prístupov k aproximácii uvedenej teórie a ich výsledkov, sme uviedli nový spôsob neporuchovej aproximácie, kde sme v efektívnom účinku uvažovali iba členy zodpovedajúce párovým interakciám medzi vlastnými hodnotami. Taktiež sme uviedli poruchovú metódu riešenia maticového modelu, ktorý sme získali, pre prípad jednointervalovho supportu. V práci sme určili analytický tvar rozdelenia vlastných hodnôt do prvého rádu v prípade voľnej a kvartickej teórie. Tieto výsledky sme porovnali so známymi výsledkami predchádzajúcich prístupov.

Cieľom práce bolo najmä študovať fázovú štruktúru symetrickej kvartickej skalárnej teórie, pričom sme sa zamerali hlavne na fázový prechod medzi dvoma symetrickými fázami kvartickej teórie. V našom novom modeli sme túto kritickú krivku určili poruchovo do prvého rádu a porovnali s predchádzajúcimi výsledkami. V závere poslednej kapitoly sme ešte uviedli zovšeobecnenie spomínanej párovej aproximácie pre prípad vyšších nekomutatívnych $\mathbb{C}P^n$ priestorov.

Spomeňme ešte niekoľko otvorených problémov, ktoré na prácu nadväzujú a ktorým sme sa nevenovali. Naša aproximácia má rozumný zmysel iba v určitej časti fázového priestoru, v ktorom dostávame dostatočne úzke rozdelenia vlastných hodnôt. Určite je zaujímavá otázka, či sa nedá nejako zovšeobecniť aj na zvyšok fázového priestoru, najmä preto, že predpokladaný trojný bod kvartickej skalárnej teórie sa nachádza mimo našej prípustnej oblasti. Tým sa dostávame k otázkam dvojintervalových a asymetrických riešení, ktorým sme sa v práci vôbec nevenovali. Možno by sa teda numericky mohla dostať aj krivka druhého fázového prechodu tohto maticového modelu. Takisto by bolo užitočné pozrieť sa multistopové varianty tohto maticového modelu a ich rie-

šenie, keďže potom by sme mohli zahrnúť do aproximácie aj ďalšie známe členy multistopovho rozvoja efektívneho účinku, najmä neporuchovú časť $F(t_2)$. Táto funkcia druhých momentov navyše zodpovedá príťažlivej interakcii vlastných hodnôt, takže oblasť vo fázovom priestore, kde môžeme uvažovať spomínanú párovú aproximáciu, by sa rozšírila.

Literatúra

- [1] J. Tekel. 2015. *Phase structure of fuzzy field theories and multitrace matrix models*. In: Acta physica slovacica, vol.65, p.369-468
- [2] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts. 1995. *The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields*. In: Communications in Mathematical Physics, vol. 172, p.187-220
- [3] J.-B. Zuber. 2012. *Introduction to random matrices*. [online] http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/RMT_2012.pdf
- [4] B. Eynard. 2000. *Random Matrices*. [online] http://www-spht.cea.fr/cours-ext/fr/lectures_notes.shtml
- [5] C. Sämann. 2015. *Bootstrapping Fuzzy Scalar Field Theory*. [online] arXiv: hep-th/1412.6255
- [6] F. García-Flores, X. Martin, D. O'Connor. 2009. *Simulation of a scalar field on a fuzzy sphere*. In: International Journal of Modern Physics A 24, p.3917-3944
- [7] B. Ydri. 2014. *New algorithm and Phase Diagram of Noncommutative Φ^4 on the Fuzzy Sphere*. [online] arXiv: hep-th/1401.1529
- [8] B. Eynard, T. Kimura, S. Ribault. 2015. *Random Matrices*. [online], arXiv: math-ph/1510.04430
- [9] M. J. Ablowitz, A.S. Fokas. 2003. *Complex variables: Introduction and application*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press. ISBN-13 978-0-511-07582-7
- [10] S. M. Zeynman. 2012. *The Classical Theory of Integral Equations: A Concise Treatment*. Boston: Birkhäuser. ISBN 978-0-8176-8348-1

- [11] N. I. Muskhelishvili. 1953. *Singular integral equations: Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Translation by J.R.M. Radok. Groningen: P. Noordhoff ltd.
- [12] R. Omnès. 1958. *On the Solution of Certain Singular Integral Equations of Quantum Field Theory*. In: *Il nuovo cimento*, vol. VIII, p. 316-326
- [13] V. P. Nair. 2005. *Quantum Field Theory: A Modern Perspective*. New York: Springer. ISBN 978-0-387-25098-4
- [14] M. Fecko. 2004. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Bratislava: Iris. ISBN 80-89018-10-6