PRIJÍMACIE SKÚŠKY

A. MATEMATIKA

VERZIA A

1. Určte obor hodnôt funkcie $f:\ y=\dfrac{x(1+x^2)}{|x|}$.

Riešenie:
a) Zrejme $x \neq 0$
b) Ak $x \rangle 0$, potom $f: y=\frac{x.(1+x^2)}{x}=1+x^2 \Rightarrow H_1(f)=\left(1;+\infty\right)$ 0,5 bodu
c) Ak $x \langle 0$, potom $f: y=\dfrac{x.(1+x^2)}{-x}=-(1+x^2) \Rightarrow H_2(f)=\left(-\infty;-1\right)$

0,5 bodu

Teda $H(f)=H_1 \cup H_2 = R-\langle -1; 1\rangle$ 1 bod

2. Koľko prirodzených čísel je riešením nerovnice

$$\frac{4!.n!}{(n-6)!} \langle \frac{6!\,.\,n!}{(n-4)!}$$

Riešenie:
$n-6 \geq 0 \quad \wedge \quad n-4 \geq 0$
$n \geq 6$ 0,5 bodu

$\dfrac{4!.n!}{(n-6)!} \langle \dfrac{6!\,.\,n!}{(n-4)!} \quad / \frac{(n-6)!}{4!n!}$ 0,5 bodu

$1 \quad \langle \quad \frac{30}{(n-4).(n-5)}$ 0,5 bodu

platí pre n = 6, 7, 8, 9
Nerovnici vyhovujú 4 prirodzené čísla. 0,5 bodu

3. Postupnosť je daná rekurentne, vzťahom

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}.a_n,$$

pričom hodnotu a_1 udáva koreň rovnice

$$\frac{x^4+x^3}{(x+2).(x-1)}=x^2+2$$

Určte prvé 4 členy tejto postupnosti.

Riešenie:
$x \neq -2, \qquad x \neq 1$ 0,5 bodu
Rovnicu upravujeme:
$\frac{x^4+x^3-(x^2+2)(x^2+x-2)}{(x+2)(x-1)}=0$ 0,5 bodu

$\frac{2(2-x)}{(x+2)(x-1)}=0$ 0,5 bodu

Vyhovuje iba riešenie x=2, takže 0,5 bodu

$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}$ 1 bod

4. Do guľovej plochy je vpísaný kváder, ktorého dĺžky hrán sú v pomere 1:2:3. Vypočítajte pomer objemu kvádra k objemu gule.

Riešenie:

Rozmery kvádra: $a = k, b = 2k, c = 3k$ 0,5 bodu

Objem kvádra: $V = 6k^3$

Polomer GP je polovica telesovej uhlopriečky kvádra

$R = \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + 4k^2 + 9k^2}}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{14}$ 0,5 bodu

Objem gule $V_G = \frac{7}{3}\pi k^3 \sqrt{14}$ 1 bod

Pomer: $x = \dfrac{6k^3}{\frac{7}{3}\pi k^3 \sqrt{14}}$

1 bod

5. Určte vzdialenosť bodu $M[0;5;2]$ od priamky $p: \quad x = 1 + t, \quad y = -2t, \quad z = 4, \quad t \in R$.

Riešenie:

$\rho \perp p \wedge M \in \rho \Rightarrow \overrightarrow{s_p} = \overrightarrow{n_\rho}$ 0,5 bodu

$1.0 - 2.5 + 0.2 + d = 0$

$d = 10$ 0,5 bodu

$\rho: \quad x - 2y + 10 = 0$

$\rho \cap p: \quad 1 + t - 2(-2t) + 10 = 0$

$t = \frac{-11}{5} \Rightarrow P\left[\frac{-6}{5}; \frac{22}{5}; 4\right]; \overrightarrow{MP}\left(-\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$ 1 bod

$|M, P| = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{\frac{29}{5}}$ 1 bod

6. Určte pre akú hodnotu $\sin x$ platí nasledovná rovnosť: $\sin 2x - \cos^2 x = 2.\cos x$

Riešenie:

$\sin 2x - \cos^2 x = 2\cos x$

$2.\sin x.\cos x - \cos^2 x = 2.\cos x$

$\cos x.(2.\sin x - \cos x) = 2.\cos x$ 0,5 bod

buď :

$\cos x = 0,$

$\sin x = \pm 1$ 0,5 bod

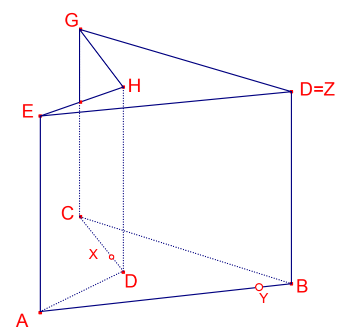
alebo :

$$2.\sin x - \cos x = 2$$
$$2.\sin x - \sqrt{1-\sin^2 x} = 2$$

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = 2.\sin x - 2$$
$$1-\sin^2 x = 4.\sin^2 x - 8.\sin x + 4$$
$$5.\sin^2 x - 8.\sin x + 3 = 0$$
$$\sin x = \tfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{10}$$
$$\sin x_1 = 1$$
$$\sin x_2 = \tfrac{3}{5}$$
$$P = \left\{-1;1;\tfrac{3}{5}\right\}$$

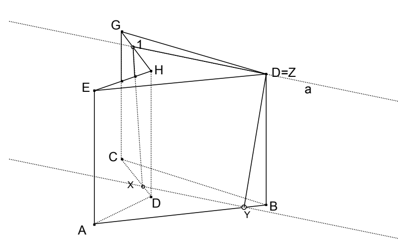
2 body

7. Daný je hranol ABCDEFGH. Zostrojte rez rovinou $\overleftrightarrow{XZY}$ (zadanie podľa obr.). Zapíšte postup konštrukcie.



Riešenie:
1. $a;\ Z \in a \wedge a \,//\, XY$
2. $a \cap GH = 1$
3. Rez: XYZ1X

2 body



VERZIA B

1. Zistite, či funkcia $f: y = \dfrac{\sin x}{x}$ je párna, nepárna, súčasne párna aj nepárna, či ani párna ani nepárna.

Riešenie:

$$D(f) = R - \{0\}$$

0,5 bodu

pre $x \in D(f)$; $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x)$

teda funkcia f je párna — 0,5 bodu

2. V R riešte rovnicu: $\log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = 8$.

Riešenie:

$$\log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = \log_2 256$$

0,5 bodu

$$(17 - 2^x)(2^x + 15) = 256$$

$$2^{2x} - 2.2^x + 1 = 0$$ 0,5 bodu

Substitúcia: $2^x = a$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

z čoho $a = 1$; $2^x = 1$, $x = 0$ — 1 bod

3. Nájdite prvý člen a_1 a kvocient q geometrickej postupnosti, pre ktorej členy platí: $8a_1 - a_4 = 2$; $4a_1 + 2a_2 + a_3 = 2$.

Riešenie:

$$8a_1 - a_1q^3 = 2 \qquad A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$4a_1 + 2a_1q + a_1q^2 = 2$$

$$a_1(8 - q^3) = 2$$ 1 bod

$$a_1(4 + 2q + q^2) = 2$$

$$\frac{8 - q^3}{4 + 2q + q^2} = 1$$

$$2 - q = 1$$
$$q = 1$$

1 bod

$$8a_1 - a_1.1 = 2$$
$$a_1 = \tfrac{2}{7}$$

1 bod

4. V aritmetickej postupnosti je $a_2 + a_4 = 24$ a $a_3 : a_7 = 3 : 8$. Určte a_{15}.

Riešenie:

$24 = a_2 + a_4 = (a_1 + d) + (a_1 + 3d) =$

$2(a_1 + 2d) = 2a_3 \Rightarrow a_3 = 12$

$a_3 : a_7 = 3 : 8$

$a_7 = 32$ $\quad a_7 = a_3 + 4d$ $\quad$ 2 body

$d = 5$

$a_{15} = a_7 + 8d = 72$

1 bod

5. Určte súradnice kolmého priemetu bodu $M[1;1;3]$ do roviny $\alpha : 2x + y - 3z - 8 = 0$.

Riešenie:

Kolmý priemet M´ určíme ako prienik roviny α a priamky p, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na rovinu α .

Normálový vektor $\overrightarrow{n_\alpha}$ roviny α je smerovým vektorom $\overrightarrow{s_p}$ priamky p

$\overrightarrow{s_p}(2;1;-3)$ $\quad$ 1 bod

teda parametrické vyjadrenie priamky p je:

$$p: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 3t, \qquad t \in R \end{cases}$$

1 bod

M´$= \alpha \cap p: \quad 2.(1 + 2t) + (1 + t) - 3.(3 - 3t) - 8 = 0$

. . . .

t = 1

M´: $x = 1 + 2.1 = 3$

$y = 1 + 1 = 2$

$z = 3 - 3.1 = 0$

M´$[3;2;0]$ $\quad$ 1 bod

6. Z čísel 1, 2, 3, ..., 100 náhodne vyberieme tri. Aká je pravdepodobnosť, že jedno z nich je aritmetickým priemerom ostatných?

Riešenie:

- na výber 1. čísla máme 100 možností
- k 1. číslu musíme vybrať 2. číslo tak, aby sa z nich dal vypočítať prirodzený aritmetický priemer, t.j. aby ich súčet bol párny, teda na výber 2. čísla máme 49 možností (k párnemu číslu párne, k nepárnemu nepárne)
- tretie číslo je je aritmetický priemer prvých dvoch, to je práve jedno číslo

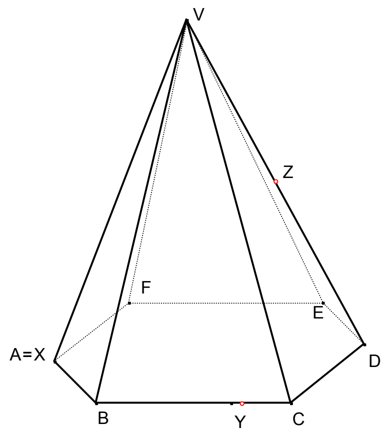
2 body

Teda: Počet priaznivých možností je 100.49.1 delené dvomi (na poradí nezáleží)

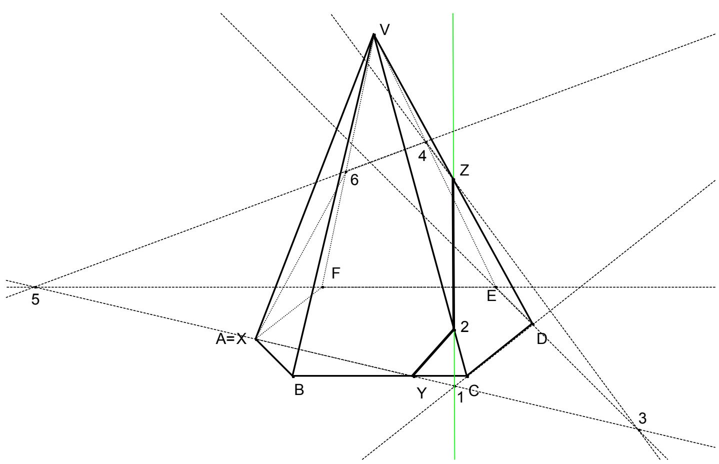
Počet všetkých možností je $\binom{100}{3}$, $\quad$ 1 bod

$$P=\frac{\frac{100.49.1}{2}}{\binom{100}{3}}=\ldots=\frac{49}{33.98}=0{,}0\overline{15}$$ 1 bod

7. Zostrojte rez pravidelného šesťbokého ihlana ABCDEFV rovinou $\overleftrightarrow{XZY}$.



1. $CD \cap XY = 1$ 2 body
2. $1Z \cap CV = 2$
3. $ED \cap XY = 3$
4. $3Z \cap EV = 4$
5. $EF \cap XY = 5$
6. $45 \cap FV = 6$
7. Rezom je: XY2Z46X



2 body

VERZIA C

1. Riešte v R $\frac{1}{2} - \cos 2x = 2\sin^2 x$.

Riešenie:

$$\frac{1}{2} - \cos 2x = 2.\sin^2 x$$

$$\frac{1}{2} - \cos^2 x + \sin^2 x = 2.\sin^2 x \qquad 1 \text{ bod}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2}; \qquad P = \emptyset \qquad 1 \text{ bod}$$

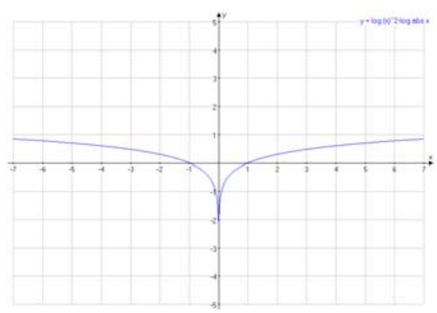
2. Určte definičný obor funkcie $f : y = \log x^2 - \log|x|$ a načrtnite jej graf.

Riešenie:

a) ak $x \rangle\ 0$, *plati* $y = \log \frac{x^2}{x} = \log x$

b) ak $x \langle\ 0$, *plati* $y = \log \frac{x^2}{-x} = \log(-x)$

$D_f = R - \{0\}$ 1 bod



1 bod

3. Určte postupnosť $P = \left\{\log 3^n\right\}$ rekurentne.

$a_n = \log 3^n, \quad a_{n+1} = \log 3^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log 3^{n+1}}{\log 3^n} = \frac{\log 3^n + \log 3}{\log 3^n} = 1 + \frac{\log 3}{\log 3^n} \quad \Rightarrow \qquad 1 \text{ bod}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{\log 3}{\log 3^n}\right).a_n \quad \wedge \quad a_1 = \log 3 \qquad 1 \text{ bod}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{\log 3}{\log 3^n}.a_n = a_n + \frac{\log 3}{a_n}.a_n = a_n + \log 3$$

$$a_{n+1} = a_n + \log 3 \qquad 1 \text{ bod}$$

4. Medzi korene rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dve čísla tak, aby vznikli 4 za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Určte tieto členy.

Riešenie:

$(x-8)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 \quad \vee \quad x = 1$ 1 bod

$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4 \qquad -$ *štyri členy postupnosti*

$a_1 = 8, \quad a_4 = 1$

$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow 1 = 8q^3 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

teda

$a_2 = a_1 . q = 4$

$a_3 = a_2 q = 2$

teda hľadané členy sú: 8,4,2,1 — 1 bod

$a_1 = 1, \quad a_4 = 8$

$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow 8 = 1q^3 \Rightarrow q = 2, \quad a_2 = 2, a_3 = 4$

teda hľadané členy sú: 8,4,2,1 — 1 bod

Pozn.: Nemusí mať obe riešenia, vzhľadom na zadanie
stačí určiť čísla 2,4.

5. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom priamok
$p: 5x - y + 10 = 0$
$q: 8x + 4y + 1 = 0$
Kolmo na priamku $r: x + 3y = 0$.

Riešenie:

Určíme $p \cap q$: $\quad p: 5x - y + 10 = 0, \qquad \Rightarrow y = 5x + 10$

$q: 8x + 4y + 1 = 0$

$8x + 4(5x + 10) + 9 = 0$

$x = -\frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$

teda $\quad p \cap q = M\left[-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right]$ — 1 bod

$m \perp r, \quad r: x + 3y = 0, \quad \overrightarrow{u_r} = (1;3)$

$\overrightarrow{s_r}(-3;1) = \overrightarrow{n_m}$ — 1 bod

$m: -3x + y + c = 0$

$M \in m: -3\left(\frac{-7}{4}\right) + \frac{5}{4} + c = 0$

$c = -\frac{13}{2}$

$m: -3x + y - \frac{13}{2} = 0$

$6x - 2y + 13 = 0$

To je požadovaná rovnica priamky — 1 bod

6. Riešte v R $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = 4$

Riešenie:

$\sin x \neq 0, \; x \neq k.\pi, \; k \in Z$

$\cos x \neq 0, \; x \neq k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$ — 1 bod

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x.\sin x}=4$$

$$\frac{1}{2.\sin x.\cos x}=2$$

$$\frac{1}{\sin 2x}=2$$

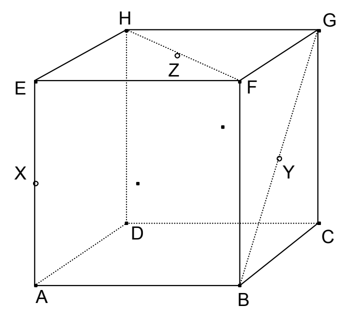
$$\sin 2x=\frac{1}{2}$$ 1 bod

$$2x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad x_1=\frac{\pi}{12}+k\pi$$

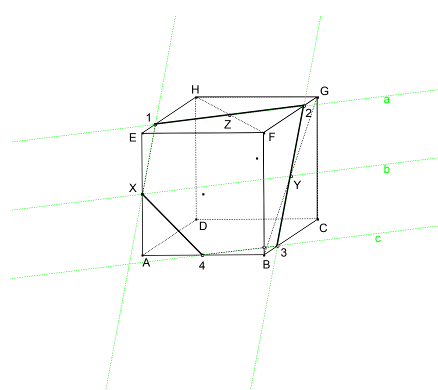
$$2x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad x_2=\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

$$P=\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi;\quad \frac{5\pi}{12}+k\pi;\quad k\in Z\right\}$$ 1 bod

7. Zostrojte rez rovinou $\overleftrightarrow{XZY}$ na kocke ABCDEFGH (X je stred AE, Y stred BG a Z stred HF.). Zapíšte postup konštrukcie.



1. $\overleftrightarrow{XY}\parallel\overleftrightarrow{EFG}\Rightarrow\overleftrightarrow{12}\parallel\overleftrightarrow{XY}\wedge Z\in\overleftrightarrow{12}$
2. $Y\in\overleftrightarrow{23}$
3. $\overleftrightarrow{34}\parallel\overleftrightarrow{12}$
4. $\overleftrightarrow{X1}\parallel\overleftrightarrow{23}$
5. Rezom je: 1234X1 2 body



2 body

B. FYZIKA

Písomná skúška z fyziky

Písomná práca z fyziky sa skladá zo štyroch úloh z rôznych častí fyziky. Odporúčame, aby ste sa pokúsili riešiť všetky úlohy. Hodnotia sa aj neúplné a nedokončené riešenia.

Predtým než úlohu začnete riešiť, prečítajte pozorne jej text, prípadne preskúmajte zadaný obrázok. Prečítaný text formulujte znova, vlastnými slovami, aby ste sa ubezpečili, že mu rozumiete. Predstavte si situáciu opísanú textom, načrtnite ju na papier a uvážte, ako by mohol v skutočnosti prebiehať obrázkom naznačený dej alebo experiment. Vyhľadajte v pamäti podobné javy, s ktorými ste sa stretli v skutočnosti alebo v učebnici a uvažujte ako by ste ich opísali pomocou vašich fyzikálnych vedomostí. Vypíšte značky a hodnoty fyzikálnych veličín, ktoré sa v texte uvádzajú – niekedy ich treba vybrať zo zadaného obrázku.

Obrázok použite pri rozbore situácie: uvedomte si, ktoré z vašich fyzikálnych poznatkov sa dajú pri riešení využiť a dajte ich do vzájomnej súvislosti pomocou známych fyzikálnych vzťahov. Spravidla ide o kvantitatívnu úlohu, a je treba určiť hodnotu niektorej fyzikálnej veličiny. Pokúste sa napísať taký vzťah medzi fyzikálnymi veličinami, z ktorého by sa dala neznáma hodnota vypočítať. Až potom dosaďte zadané hodnoty a vykonajte výpočet. Výsledok zaokrúhlite tak, aby to zodpovedalo zadaniu úlohy. Výsledný poznatok vyjadrite slovne a zapíšte ho. Uvážte, či zodpovedá skutočnosti - tomu, čo o jave viete zo školy alebo zo skúsenosti. Ak môžete, uveďte tiež váš názor o tom, za akých podmienok je váš výsledok správny a použiteľný.

V nasledujúcom texte sú dva varianty zadania písomnej práce s riešenými úlohami.

Variant A

1. Potápač uzavrel v kadičke vzduchovú bublinu a ponoril sa s ňou do hĺbky h_1 (obr. a)) a potom do hĺbky h_2 (obr b)). Určte hĺbku h_2.

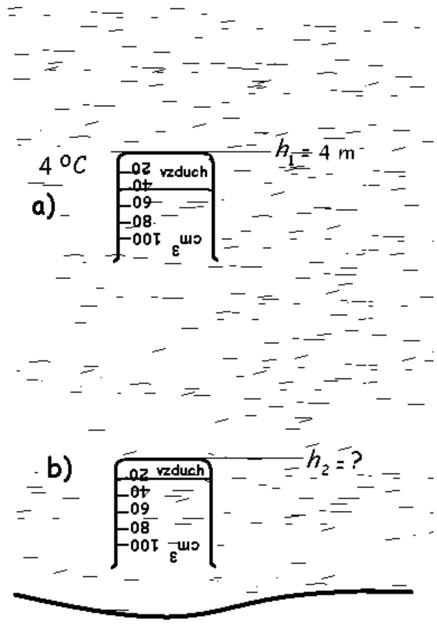
Riešenie:

h_1 = 4 m, t = 4 oC, h_2 = ?

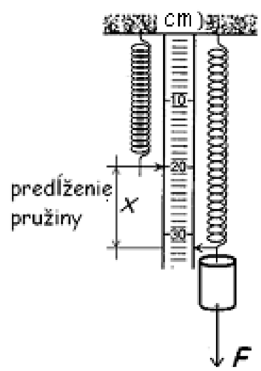
V hĺbke h_1 pod hladinou nádrže je teplota 4 ^{o}C a preto bude rovnaká teplota aj v hĺbke h_2 (anomália vody). Pri pohybe medzi polohami a), b) prebehne vo zvyšku plynu v kadičke izotermický dej, pri ktorom platí

$$p_2 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow p_2 = \frac{V_1}{V_2} p_1 \Rightarrow \rho g h2 = \frac{2V_2}{V_2} \rho g h_1 \Rightarrow h_2 = 2h_1 \Rightarrow h_2 = 2 \cdot 4m = 8m$$

Odpoveď: V polohe b) sa kadička nachádza v hĺbke 8 m pod hladinou.



2. Na pružinu sme zavesili závažie a odmerali jej predĺženie *x*. Pri meraní sme použili pravítko s centimetrovými dielikmi. S akou periódou bude závažie kmitať, ak ho vo zvislom smere vychýlime a potom uvoľníme?



Obr. Závažie na pružine.

Riešenie:

x = 12 mm = 0,012 m. T = ?

Pre predĺženie x pružiny s tuhosťou k, napínanej tiažovou silou $F = mg$ platí Hookeov zákon v tvare

$$F = k\,x.$$

Po vychýlení bude závažie pružinového oscilátora kmitať vo zvislom smere s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{kx}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}12}{9{,}81}}\ \mathrm{s} = 0{,}695\ \mathrm{s} \approx 0{,}70\ \mathrm{s}$$

Závažie bude kmitať s periódou 0,70 s.

3. Pri zobrazenom experimente sa nemení hodnota τ_e, vonkajšej teploty, ani hodnota teploty τ vo vnútri uzavretej nádoby vyhrievanej špirálou. Koľko tepla sa každú sekundu odvedie z nádoby do jej okolia?

Riešenie:

U = 8,0 V, I = 1,5 A, Δt = 1 s, Q = ?

Ak sa teplota vo vnútri nádoby nemení, všetko elektrické teplo sa využíva len na úhradu tepla odvedeného stenami nádoby do jej okolia. Za čas Δt špirála uvoľní teplo

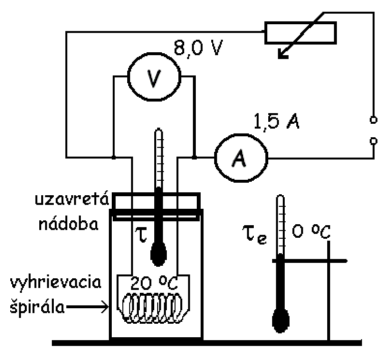
$$Q = P\,\Delta t = U\,I\Delta t,$$

ktoré sa rovná súčinu príkonu P a časového intervalu Δt.

kde $P = U\,I$ je príkon vyhrievacej špirály

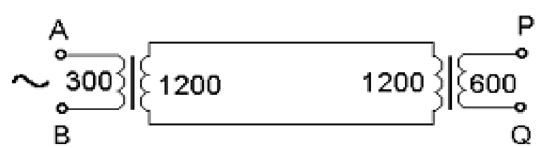
$$Q = U\,I\,\Delta t = 8{,}0\ \mathrm{V}\cdot 1{,}5\ \mathrm{A}\cdot 1\ \mathrm{s} = 12\ \mathrm{V\cdot A\cdot s} = 12\ \mathrm{Ws} = 12\ \mathrm{J}.$$

Stenami nádoby sa do jej okolia každú sekundu odvedie teplo 12 J.



Obr. Uzavretá nádoba „vykurovaná“ elektrickou špirálou.

4. Na obrázku je jednoduchý model elektrickej siete s cievkami s 300 a 600 závitmi a s dvoma cievkami s 1200 závitmi. Na svorky A, B pripojíme zdroj striedavého napätia 12 V. Aké napätie odmeriame na svorkách PQ?



Obr. Modelovanie elektrickej siete.

Riešenie:

U_1 = 12 V, Z_1 = 300, Z_2 = 1200, Z_3 = 1200, Z_4 = 600, $U_3 = U_2$, U_4 = ?

Na obidvoch stranách vedenia sa zmena napätia pri transformácii riadi rovnicami

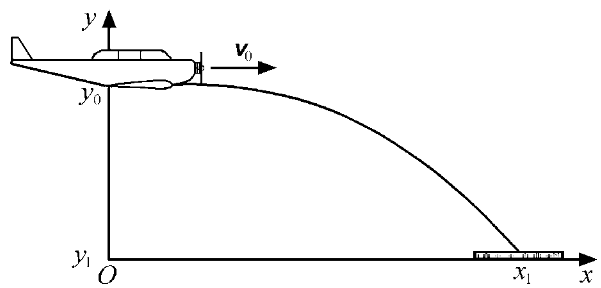
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1}, \qquad \frac{U_4}{U_3} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

$$U_2 = \frac{Z_2}{Z_1}U_1, U_4 = \frac{Z_4}{Z_3}U_2 = \frac{Z_4}{Z_3}\frac{Z_2}{Z_1}U_1$$

$$U_4 = \frac{600}{1200}\frac{1200}{300}12\text{V} = 24\text{ V}$$

Na konci vedenia by malo byť napätie 24 V. Výsledok je správny len za predpokladu, že obidva tranformátory pracujú so stopercentnou účinnosťou a že vedenie medzi nimi má zanedbateľne malý odpor, takže platí $U_3 = U_2$.

Variant B



1. Pilot lietadla letiaceho nad morom vo výške 500 m, rýchlosťou 300 km.h^{-1}, má zhodiť na ľadovú kryhu balík s potravinami. V akej vzdialenosti x_1 pred cieľom leží bod, nad ktorým treba balík uvoľniť? Odpor vzduchu zanedbajte.

Riešenie:

h = 500 m, v = 400 km.h^{-1} = 300 000 m/3600 s, g = 9,81 m.s^{-1}, x_1 = ?

$x_1 = v t_1,$

$h = \frac{1}{2}gt_1^2$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$,

$x_1 = v\sqrt{\frac{2y}{g}}$,

$x_1 = \frac{300000}{3600}\sqrt{\frac{2.500}{9{,}81}}$ m = 831,36 m ≈ 831 m.

Bod, nad ktorým treba uvoľniť balík, leží 831 m pred cieľom.

2. Hasiaci prístroj má po naplnení hmotnosť 2,0 kg. Po uvedení do činnosti vystrekuje každú sekundu 200 g peny, rýchlosťou 20 m.s^{-1}, smerom zvisle hore. Určte silu pôsobiacu na ruku, ktorou prístroj držíme, na začiatku jeho činnosti.

Riešenie: m = 2,0 kg,

Δm = 0,200 kg, v = 20 m.s^{-1}, Δt = 1 s, F = ?

---

g = 9,8 m.s^{-1} $\quad$ $F = Fg + F,$

$G = m\,g,$ tiažová sila pôsobiaca na prístroj

$\Delta(m\text{ v}) = F\,\Delta t$ (F je reaktívna sila, pôsobiaca na prístroj)

$\Delta(m\text{ v}) = F\,\Delta t,\ F = \Delta(m\text{ v})/\Delta t,$

$F = m\,g + \Delta(m\text{ v})/\Delta t$, F = (2,0. 9,8 + 0,20/1,0) N = 23,6 N ~ 24 N.

3. Doskový kondenzátor so vzduchovou medzerou medzi doskami, s kapacitou 100.10^{-12} F, pripojíme na svorky zdroja jednosmerného napätia 6V.

a) Aký bude na doske kondenzátora náboj po odpojení od zdroja napätia?

b) Vzdialenosť dosák (odpojeného) kondenzátora zmenšíme na polovicu pôvodnej hodnoty. Ako sa zmení napätie medzi doskami?

Riešenie:

$C = 100.10^{-12}$ F, $U = 6$V, $Q = ?$

---

a) $C = \frac{Q}{U}$ Q = C U,

$Q_1 = 100.10^{-12}.\ 6$ C $= 0{,}6.10^{-12}$ C

b) $d_2 = d_1/2$,

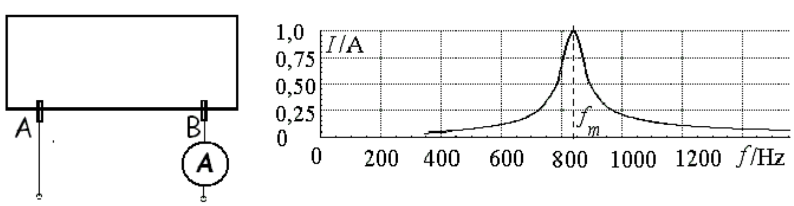
$Q_1 = Q_2$, $C_1 = S/d_1$, $C2 = S/d_2$, $C_2 = 2C_1$, $U_1 = Q/C_1$, $U_2 = Q/C_2$, $U_2 = U_1/2 = 3$ V.

Napätie medzi doskami kondenzátora sa zmenší na polovicu pôvodnej hodnoty U.

4. Na skrinke, v ktorej je uzavretý neznámy obsah, sú dva vývody, svorky A, B. Použijeme zdroj napätia a ampérmeter a zistíme, že medzi svorkami A, B jednosmerný prúd neprechádza.

Nakreslite schému zapojenia. Môžeme už tvrdiť, že vnútri skrinky nie sú žiadne elektrické prvky? Odpoveď: Nie, vnútri skrinky môže byť napr. kondenzátor.

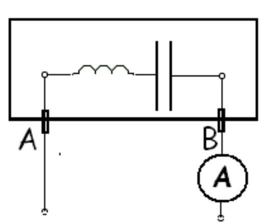
K svorkám A, B pripojíme teraz v sériovom spojení ampérmeter a zdroj striedavého napätia s meniteľnou frekvenciou. Postupne zväčšujeme frekvenciu pri stálom napätí zdroja. Zistíme, že prúd sa postupne zväčšuje, pri určitej frekvencii f_m dosiahne maximum a potom sa zmenšuje. Vyslovte domnienku o tom, aký je obsah skrinky - nakreslite aj schému možného zapojenia.



Obr. K úlohe o „čiernej skrinke“

Riešenie:

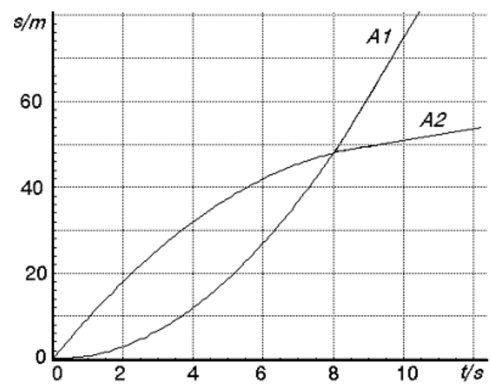
Je pravdepodobné, že medzi svorkami A, B je kondenzátor spojený sériovo s cievkou. Pri frekvencii f_m dochádza v tomto obvode k rezonancii.



Obr. Návrh riešenia úlohy o „čiernej skrinke“

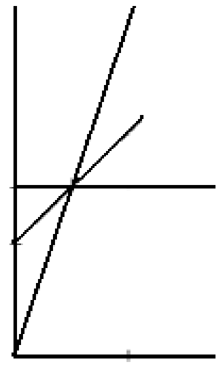
Úlohy na precvičovanie

1. Vlak sa pohybuje stálou rýchlosťou veľkosti 72 km. h^{-1}. Akou veľkou rýchlosťou sa pohybuje vzhľadom na trať cestujúci, ktorý prechádza vagónom rýchlosťou 1,5 m.s^{-1}, a) v smere pohybu vlaku, b) proti smeru pohybu vlaku? [21,5 m.s,18,5 m.s]
2. Dva automobily, A1, A2, sa pohybujú po priamej ceste, rovnakým smerom Grafy dráhy v závislosti od času sú na obrázku.
   a) Určte časy, v ktorých sa autá navzájom predbiehajú. [t_1 = 0, t_2 = 8 s]
   b) Meraním na grafe určte rýchlosť auta A1 a A2 v čase 8 s. [13 m.s^{-1}, 2 m.s^{-1}] (Spomeňte si na definíciu okamžitej rýchlosti nerovnomerného pohybu.)
   c) Vysvetlite, aké druhy pohybu konalo auto A1 v časovom intervale od 0 do 10 s.
   d) Vysvetlite, aké druhy pohybu konalo auto A2 v časovom intervale od 0 do 10 s.



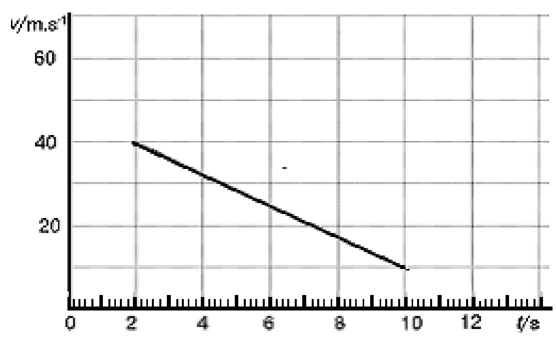
Obr. Grafy znázorňujú pohyb dvoch automobilov.

3. Rýchlik sa rozbieha zo stavu pokoja tak, že každých 20 s sa jeho rýchlosť zmení o hodnotu 10 m.s^{-1}. Akú dráhu prejde, keď jeho rýchlosť dosiahne hodnotu 72 km.h^{-1}? [400 m]
4. 11. Rýchlik, ktorý sa pohyboval po priamej trati rýchlosťou 144 km.h^{-1}, začal brzdiť tak, že za čas 60 s sa jeho rýchlosť zmenila o 30 m.s^{-1}. Určte zrýchlenie a dráhu, ktorú počas brzdenia prešiel. [0. 5 m.s^{-1}, 1500 m]
5. Na začiatku priamej ulice sa začal rozbiehať automobil A s konštantným zrýchlením práve vtedy, keď okolo neho prechádzala električka E stálou rýchlosťou 15 m.s^{-1} a zároveň druhý automobil B, ktorý mal okamžitú rýchlosť 10 m.s^{-1} a stále zrýchlenie. Po uplynutí času 20 s už boli všetky tri vozidlá na konci ulice, rovnako vzdialené od jej začiatku a pohybovali sa ďalej. Na obrázku sú grafy zobrazujúce pohybu všetkých troch vozidiel v závislosti od času.
   a) Označte grafy na obrázku písmenami E, A1, A2 a označte ich osi. [Zhora: A, B, E, osi v, t]
   b) Určte časy, v ktorých sa automobily pohybovali rovnakou rýchlosťou ako električka. [$t_A = t_B$ = 10 s]
   c) Vyznačte a odmerajte na grafe plochu zodpovedajúcu dráhe s_E, ktorú električka prešla za 20 s.
   d) Aká dlhá je ulica? [300 m]



Obr. Grafy znázorňujúce pohyb troch vozidiel v závislosti od času

6. Oceľová guľôčka skáče na oceľovej podložke s periódou 1,0 s. Do akej maximálnej výšky môže vyskočiť? [1,2 m]
7. Pri pohybe lyžiara sme merali čas t a rýchlosť v. Výsledky sme zobrazili na grafe, ktorý je na obrázku.



Obr. Rýchlosť lyžiara v závislosti od času

a) Meraním na grafe určte dráhu, ktorú lyžiar prešiel v časovom intervale od $t_1 = 2$ s do $t_2 = 10$ s. [200 m]

b) Meraním na grafe určte zrýchlenie pohybu. [napr: (30 m.s^{-1})/(8,0 s) ≈3.8 m.s^{-2}]

c) Meraním na grafe určte čas t_Z , v ktorom lyžiar zastane. [≈12,6 s – ak sa jeho zrýchlenie nebude meniť]

d) Aký druh pohybu lyžiar konal? [Rovnomerne spomalený pohyb.]

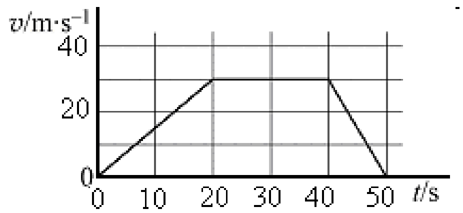
8. Rýchlik ide po priamom úseku železničnej trate rýchlosťou 90 km.h^{-1}. V opačnom smere, po susednej koľaji, ide nákladný vlak rýchlosťou 54 km.h^{-1}. Jeden z cestujúcich rýchlika zistil, že okolo neho prešiel nákladný vlak za čas 5 s.

a) Aká je dĺžka nákladného vlaku? [200 m]

b) Za akú dobu by prešiel okolo nákladneho vlaku cestujúci v rýchliku, keby obidva vlaky išli rovnakým smerom? [20 s]

9. Automobil sa začne rozbiehať zo stavu pokoja s konštantným zrýchlením 2,0 m.s v čase, keď okolo neho prechádza električka, tým istým smerom, stálou rýchlosťou 36 km.h^{-1}. Určte čas, za ktorý automobil električku dobehne. [10 s]

10. 18. Na obrázku je v závislosti od času znázornená rýchlosť, ktorou sa pohyboval automobil medzi dvoma križovatkami.



Obr. Rýchlosť električky pri pohybe medzi križovatkami.

a) Rozdeľte celý dej na úseky, v ktorých mal pohyb určitú, stálu vlastnosť. Vysvetlite, ktoré vlastnosti to boli. Opíšte činnosti, ktoré na týchto úsekoch vykonal vodič električky.

b) Ako by ste charakterizovali a nazvali ten pohyb, v ktorom rýchlosť električky rástla?

c) Meraním na grafe určte čo najpresnejšie dráhu, ktorú električka prešla medzi dvoma zástavkami. [300 m + 600 m + 150 m = 1050 m]

11. Automobil sa rozbehol na priamej vodorovnej ceste zo stavu pokoja tak, že v čase 12 s nadobudol rýchlosť 108 km.h^{-1}. Touto rýchlosťou sa pohyboval 20 s a posledných 6 s svojej jazdy rovnomerne brzdil až do zastavenia.

a) Nakreslite graf rýchlosti v závislosti od času.

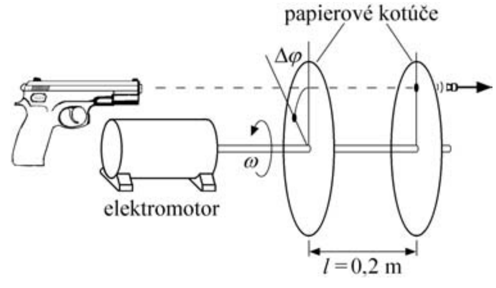
b) Určte priemerné zrýchlenie vozidla pri rozbiehaní. [2,5 m.s^{-2}]

c) Určte priemerné zrýchlenie auta pri brzdení. [5 m.s^{-2}]

d) Určte dráhu počas celej skúšobnej jazdy pomocou grafu [Pomoc: Ak predpokladáme, že počas rozbiehania a brzdenia bolo zrýchlenie konštantné, grafy sú lineárne a dráha zodpovedá ploche, ktorá je pod nimi uzavretá nad osou času.]

12. Loď a balón s posádkou sa pohybujú rovnakým smerom, loď rýchlosťou 36 km.h^{-1}, balón vo výške 45 m rýchlosťou 15 m.s^{-1}. Nad prednou časťou lode vypustia z balóna balíček. Ako ďaleko od lode dopadne? [15 m]

13. Dva papierové kotúče namontované na spoločnú kolmú os vo vzájomnej vzdialenosti 0,2 m, sa otáčajú rovnakým smerom s frekvenciou 50 s^{-1}. Strela, letiaca rovnobežne s ich spoločnou osou, zanechala v kotúčoch otvory navzájom posunuté o uhol 8,0 ^{o}. Vypočítajte rýchlosť strely. [450 m.s^{-1}]



Obr. Meranie rýchlosti strely

14. Homogénny valec s hmotnosťou m = 2,0 kg sa odvaľuje po podložke tak, že rýchlosť jeho ťažiska je 10 m.s^{-1}. Vypočítajte jeho celkovú kinetickú energiu (moment zotrvačnosti homogénneho valca je $I = m.\ r^2/2$) [150 J]

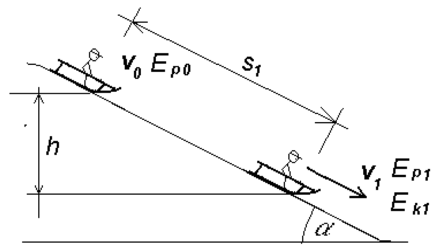
15. Homogénny valec sa pohybuje valivým pohybom po naklonenej rovine, z výšky 10 m.
    a) Vypočítajte rýchlosť jeho ťažiska na konci naklonenej roviny. [11 m.s^{-1}]
    b) Vypočítajte rýchlosť, ktorú by mal valec pri páde z tejto výšky. [14 m.s^{-1}]

16. Hasiaci prístroj má po naplnení hmotnosť 2,0 kg. Po uvedení do činnosti vystrekuje každú sekundu 0,2 kg peny rýchlosťou 20 m.s^{-1}, smerom zvisle hore. Určte silu pôsobiacu na ruku, v ktorej prístroj držíme, na začiatku jeho činnosti. [24 N]

17. Automobil s hmotnosťou 1000 kg sa pohybuje po vodorovnej, priamej ceste rýchlosťou 10 m.s^{-1}. Keď prestane pracovať motor, automobil sa zastaví pôsobením sily trenia po uplynutí času 20 s. Vypočítajte veľkosť sily trenia. [0,50 kN – za predpokladu, že môžeme zanedbať aerodynamickú odporovú silu.]

18. Reaktívne lietadlo má pri vodorovnom lete stálu rýchlosť 800 km.h^{-1}. Motory pracujú s výkonom 16000 kW. Určte silu, ktorá pôsobí na lietadlo proti smeru jeho pohybu. [20,0 kN]

19. Sane s celkovou hmotnosťou 60 kg sa kĺžu po ľadovom svahu, ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol 30 ^{0}. Na dráhe 50 m od začiatku pohybu nadobudnú sane rýchlosť 10 m.s^{-1}. Vypočítajte teplo, ktoré sa uvoľnilo pri trení sklzníc saní o ľad.



Obr. K úlohe o sánkach na svahu

Riešenie:

Potenciálna energia E_p saní sa zmenšuje a mení sa sčasti na kinetickú energiu E_k, sčasti na teplo Q = E_p - E_k, pri trení sklzníc saní o ľad.

m = 60 kg, g = 9,8 m.s^{-2}, v_1 = 10 m.s^{-1}, s_1 = 50 m, α = 30 ^{0}, Q =?

(pre t = 0 je v = 0; s = 0)

$$E_p = E_{po} - E_{p1} = m\,g\,h = m\,g\,s_1 \sin\alpha,$$

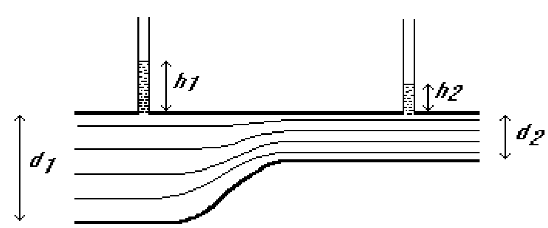
$$E_k = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$Q = E_p - E_k = mgs_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} m v_1^2 = m(s_1 g \sin\alpha - 0{,}5 v_1^2)$$

Q = 60 (9,8. 50. 0,50 - 0,50.100) J = 11700 J ≈12 kJ.

Pri trení sklzníc saní o ľad sa uvoľní teplo 12 kJ. (Výsledok je správny za predpokladu, že možno zanedbať prácu sily aerodynamického odporu pri pohybe saní.)

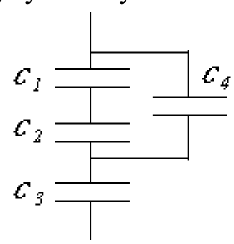
20. Motocykel s hmotnosťou 120 kg, s jazdcom, ktorý má hmotnosť 80 kg, sa rozbieha na vodorovnej ceste. Koeficient statického klzného trenia kolesa na vozovke je 0,8. Určte maximálne možné zrýchlenie pri rozbehu. [5,5 $m.s^{-2}$, ak koeficient statického klzného trenia má hodnotu 0,8 a jazdec zaujme vhodnú polohu na poháňanom kolese]
21. Závažie priviazané na niti s dĺžkou 40 cm, obieha v zvislej rovine okolo nášho prsta. S akou najväčšou periódou? [1,3 s]
22. Nákladný automobil má ťažisko vo výške 2,0 m. Vzájomná vzdialenosť pravých a ľavých kolies (vpredu i vzadu) je 1,6 m. Pohybuje sa po vodorovnej ceste v zátačke s polomerom 90 m. Akú rýchlosť by nemal prekročiť? [108 $km.h^{-1}$, ak sa nemá prevrhnúť; 48 $km.h^{-1}$, ak nemá dôjsť k šmyku (za predpokladu, že tiaž je rovnomerne rozdelená na 4 kolesá a betónová cesta je suchá]
23. Cyklista ide rýchlosťou 36 $km.h^{-1}$ po obvode kruhu s polomerom 10 m. Pod akým uhlom by mal byť naklonený dovnútra kružnice? [45]
24. Určte uhol klopenia vozovky špeciálnej cesty pre automobily, ktorá má byť celkom bezpečná aj v zime pri rýchlosti 144 $km.h^{-1}$, v zákrute s polomerom 163 m. [45 ^{0}]
25. Polomer Mesiaca je približne 3/11 polomeru Zeme a hmotnosť Mesiaca je približne 81-krát menšia ako hmotnosť Zeme. Určte veľkosť gravitačného zrýchlenia na povrchu Mesiaca. [0,17 g; 1,6 $m.s^{-2}$]
26. Navrhnite umelú obežnicu Zeme tvaru valca, s vlastnou rotáciou, ktorá má nahradiť gravitáciu (Zeme), pre $7{,}5.10^{6}$ obyvateľov, s hustotou osídlenia približne 1 obyvateľ na 100 m^2, umiestnenú stacionárne (trvale nad rovnakým miestom povrchu Zeme). [Napr. valec s výškou a priemerom 15 km, vo výške 36 000 km nad rovníkom, rotujúci okolo vlastnej osi s periódou 2,9 min]
27. Silomer, na ktorom je zavesené teleso, ukazuje hodnotu 34 N. Ak potom ponoríme celé teleso do vody, je údaj silomeru len 5,0 N. Určte objem telesa a jeho priemernú hustotu. Vztlakovú silu pôsobiacu na teleso vo vzduchu zanedbajte. [2,9.10 m ; $1{,}2.10^{3}$ kg. m^{-3}]
28. Na predmet z čistého zlata, o ktorom máme rozhodnúť, či je bez dutín, pôsobí vo vzduchu tiažová sila 0,9625 N. Ak ho vážime ponorený do vody s hustotou 1,00.10 kg. m^{-3}, odmeriame len 0,9025 N. (Hustota zlata je $19{,}3.10^{3}$ $kg.m^{-3}$). [Hustota je len $16{,}0.10^{3}$ kg. m^{-3} - v predmete sú dutiny]
29. Guľa s hmotnosťou 5,67 kg je ponorená do vody a lano, na ktorom visí, napína silou 50,7 N. Aká je priemerná hustota gule? [Hustota gule je 11 300 $kg.m^{-3}$]
30. Na obrázku je zúžená časť potrubia s pripojenými manometrickými trubicami. Pri meraní sa zistili hodnoty h_1 = 180 mm, h_2 = 10 mm, d_1 = 300 mm, d_2 =100 mm.



Obr. K úlohe o manometrickým trubiciam

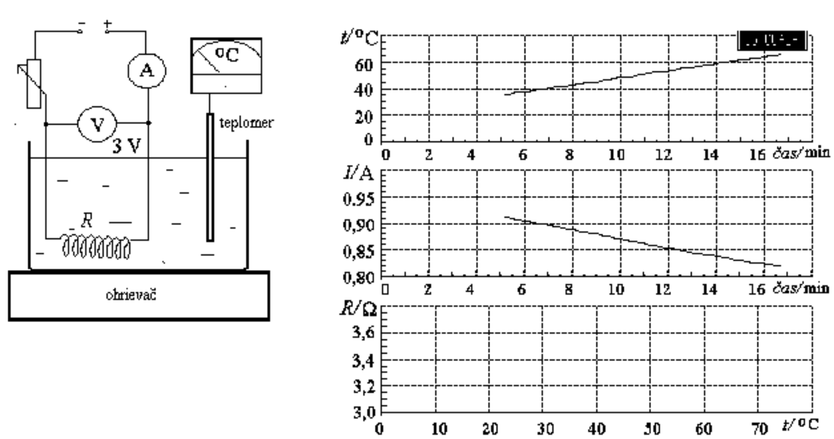
a) Vypočítajte pomer v_2/v_1 rýchlosti prúdenia v užšej a širšej časti potrubia.
b) Pri výpočte treba prúdiacu kvapalinu považovať za skutočnú, alebo za ideálnu kvapalinu?

31. Rovná oceľová tyč je vložená medzi dve protiľahlé steny tak, že je na ich roviny kolmá a dotýka sa ich svojimi koncami. Materiál tyče má teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti 12.10^{-6} K^{-1} a modul pružnosti v ťahu 20.10^{10} Pa. Vypočítajte o koľko sa má zväčšiť teplota tyče, aby pôsobila na steny tlakom 5,0 MPa. [2 K]
32. Atmosferický tlak pri hladine jazera je 100 kPa, teplota vody je 4,0 ^{0}C. Na dne jazera sa uvoľní bublina a stúpa nahor. Tesne pod hladinou je objem bubliny osemkrát väčší ako na dne. Aká je hĺbka jazera? [71 m]
33. Dĺžka hliníkovej tyče pri teplote 0 ^{0}C je 79,5 cm, dĺžka oceľovej tyče je 80 cm. Pri akej teplote budú mať obidve tyče rovnaké dĺžky? (Teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti je pre hliník $2,4.10^{-5}$ K, pre oceľ $1,2.10^{-5}$ K.)? [$0,53.10^3$ ^{0}C]
34. Tri kondenzátory s rovnakými kapacitami $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ pF spojíme sériovo. Paralelne k prvým dvom kondenzátorom potom pripojíme kondenzátor s kapacitou $C_4 = 1$ pF.
    a) Nakreslite schému zapojenia.
    b) Vypočítajte kapacitu sústavy týchto štyroch kondenzátorov. [1 pF]



Obr. K riešeniu úlohy o spájaní kondenzátorov.

35. Doskový kondenzátor s kapacitou 100 pF, ktorý má medzi doskami vzduch, pripojíme na zdroj jednosmerného napätia 6,0 V. Po odpojení kondenzátora od zdroja napätia zmeníme vzdialenosť dosák kondenzátora na polovicu pôvodnej hodnoty.
36. Kondenzátor s kapacitou 100 pF pripojíme na zdroj jednosmerného napätia 10 V. Potom vzdialenosť dosák kondenzátora zdvojnásobíme, pri čom neodpájame kondenzátor od zdroja napätia. Vypočítajte hodnotu náboja na doske kondenzátora. [$0,5.10^{-9}$ C]
37. Na obrázku je znázornený experiment, pri ktorom sme skúmali elektrický odpor $R = R(t)$ kovového vodiča v závislosti od teploty t. Kvapalinu, v ktorej je vodič uložený, sme zohrievali a v závislosti od času sme kreslili grafy teploty t a prúdu I. Počas experimentu ukazoval voltmeter stálu hodnotu napätia na rezistore: 3,0 V.



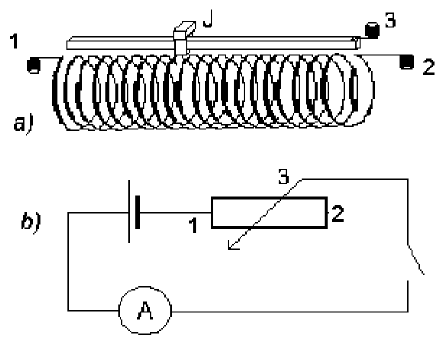
Obr. Meranie závislosti prúdu vo vodiči v závislosti od teploty.

a) Využite zobrazené dva grafy na zostrojenie grafu závislosti $R = R(t)$ odporu od teploty.

b) Meraním na grafe závislosti $R = R(t)$ určte konštantu α - teplotný koeficient odporu vodiča.

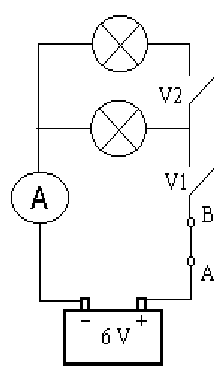
[Návod: Hodnoty odporu $R(t) = U/I$ vypočítate po odmeraní niekoľkých hodnôt I prúdu na druhom grafe a hodnoty teploty t meraním na prvom grafe. Pre teplotný súčiniteľ α platí $\alpha = \Delta R/(\Delta t\ R_1)$, kde R_1 je začiatočná hodnota odporu v intervale $\Delta R = R - R_1$, v ktorom ste merali zmenu $\Delta t = t - t_1$ teploty]

38. Na obrázku b) je valcový reostat - rezistor s premenným odporom zapojený v obvode. Na štítku reostatu sme prečítali hodnoty 6 A, 13 Ω. Batéria zapojená v obvode má elektromotorické napätie 4,5 V a vnútorný odpor 1,0 Ω. Ampérmeter v obvode má vnútorný odpor 0,6 Ω. Na obr. a) je znázornená poloha jazdca J reostatu. Aký prúd zaznamená ampérmeter po zapnutí vypínača? [≈0,7 A]



Obr. Aký prúd prechádza obvodom?

49. Na obrázku je schéma zapojenia s dvoma žiarovkami a s dvoma vypínačmi pripojenými na akumulátor. Medzi svorkami A,B je tenký drôtik, ktorý sa roztopí, ak ním prechádza prúd väčší ako 6,0 A. Na žiarovkách sú údaje 25 W, 6 V.



Obr. Čo sa stane pri postupnom zapnutí vypínačov V1, V2?

a) Vysvetlite čo očakávate, že sa stane v obvode na obrázku, ak postupne zapneme vypínače v poradí V1, V2.

b) Aký prúd bude prechádzať ampérnetrom, najprv pri zapnutí V1 a potom súčasne V1 a V2?

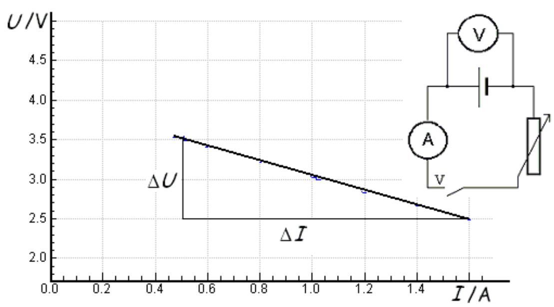
50. Meraním prúdu I a svorkového napätia U v uzavretom obvode elektrického prúdu sme získali hodnoty dvojíc (I, U). Na obrázku je graf, ktorý sme dostali po spracovaní výsledkov.

a) Vysvetlite, prečo odmerané hodnoty (I, U) možno zobraziť bodmi, ktorými by mala prechádzať priamka. Závislosť $U = U(I)$ vyjadrite matematickým vzťahom.

b) Meraním na priamkovom grafe určte hodnoty elektromotorického napätia U_e a vnútorného odporu R_i zdroja.

c) Navrhnite experiment, pomocou ktorého by sme meranie zopakovali a overili. Nakreslite schému zapojenia a navrhnite aj hodnoty (napätia, odporu a pod.) pre použité prvky obvodu.

d)



Obr. Svorkové napätie na obvode v závislosti od prúdu (merané súpravou CoachLabII v školskom fyzikálnom laboratóriu).

Riešenie:

Pre uzavretý elektrický obvod platí Ohmov zákon, napr. v tvare

$$I = \frac{U_e}{R + R_i},$$

kde R_i je vnútorný odpor, U_e je elektromotorické napätie zdroja a R je odpor vonkajšej časti obvodu (pozri obrázok v časti c) riešenia úlohy. Ak obvod uzavrieme ukazuje voltmeter *svorkové napätie* $U = I R$. Po úprave dostaneme závislosť svorkového napätia od prúdu

$$U = - R_\mathrm{i}\, I + U_\mathrm{e}.$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že zobrazená priamka má smernicu $-R_\mathrm{i}$. Meraním na grafe vychádza vnútorný odpor zdroja napätia

$$-R_\mathrm{i} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{2{,}5 - 3{,}5}{1{,}60 - 0{,}50}\,\Omega = \frac{-1{,}0}{1{,}1}\,\Omega \approx 0{,}91\,\Omega$$

$R_i = 0{,}91\ \Omega$

Extrapoláciou priamky k hodnote $I = 0$ sa dá určiť elektromotorické napätie $\approx 4{,}0$ V, ako súradnica bodu na zvislej osi, v ktorom sa os pretína s extrapolovanou priamkou.

Zdroj v zobrazenom zapojení má elektromotorické napätie 4,0 V.

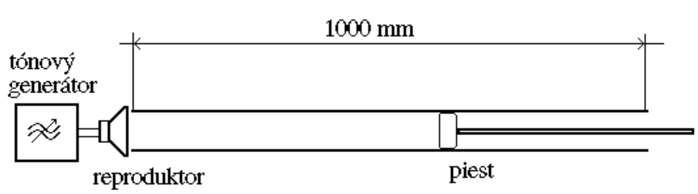
51. Miliampérmeter s rozsahom 20 mA a s vnútorným odporom 200 Ω máme prestavať na voltmeter s rozsahom 12 V. Nakreslite schému úprav v zapojení, ktoré treba urobiť a uveďte hodnoty súčiastok, ktoré pri tom použijeme. [Treba predradiť rezistor 400 Ω]

52. Pri zväčšovaní napätia medzi elektródami ponorenými v elektrolyte začal prechádzať ustálený prúd pri napätí 1,1 V. Pri napätí 3,5 V prechádzal elektrolytom prúd 2,8 A.

a) Nakreslite graf závislosti prúdu od napätia a vysvetlite jeho priebeh. [Priamka, začína sa pri hodnote U_r, rozkladného napätia.]

b) Stanovte hodnotu odporu elektrolytu [1,2 Ω]

53. Vo vzťahu N = T. A. m vystupujú namiesto fyzikálnych veličín ich fyzikálne jednotky.
   a) Pomenujte tieto jednotky a uveďte príslušné fyzikálne veličiny, ktorým patria. [$F = B\,I\,l$]
   b) Ak sa domnievate, že uvedený vzťah medzi jednotkami je správny, napíšte vzťah medzi príslušnými fyzikálnymi veličinami a vysvetlite [F je sila, ktorá v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou B pôsobí na rovný vodič s dĺžkou l, kolmý na indukčné čiary, ak vodičom prechádza prúd I.]
54. Elektróny po urýchlení potenciálovým rozdielom 100 V vletujú do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou 10 T, kolmo na indukčné čiary. Aká bude trajetória ich ďalšieho pohybu? [Kružnica s polomerom 0,3 m]
55. Prúd prechádzajúci cievkou s vlastnou indukčnosťou 0,02 H sa v závislosti od času rovnomerne zmenšuje o 20 mA za sekundu. Vypočítajte napätie, ktoré sa v cievke indukuje. [0,4 mV]
56. 103. Veľkosť magnetickej indukcie homogénneho magnetického poľa sa mení v závislosti od času podľa vzťahu $B = k.\,t$, kde $k = 1{,}0\ \mathrm{T\,s^{-1}}$. V rovine kolmej na indukčné čiary je uzavretý štvorcový závit so stranou 100 cm, zhotovený z hliníkového drôtu s prierezom 1,0 mm, ktorý má teplotu 20 ^{0}C. Určte teplo, ktoré vo vodiči vznikne za čas 2,0 s. [17 J]
57. Jednoduché kyvadlo (závažie na niti) dlhé 1 m sa pri svojom pohybe vychyľuje z rovnovážnej polohy najviac o 5 cm.
   a) Aká je rýchlosť závažia kyvadla v bode obratu (pri maximálnej výchylke)? [0 m.s^{-1}]
   b) Vypočítajte akou rýchlosťou a s akým zrýchlením prechádza závažie kyvadla rovnovážnou polohou. [0,16 m.s^{-1} ; 0]
58. Pružina, na ktorú sme zavesili závažie, sa predĺžila o 9,8 cm. S akou periódou môže závažie na pružine kmitať, ak pokus robíme na mieste, na ktorom je normálne tiažové zrýchlenie? [0,63 s]
59. Pri vyobrazenom experimente je tónový generátor nastavený na frekvenciu 500 Hz. Trubicou sa šíri zvuk z reproduktora rýchlosťou 320 m.s^{-1}.



Obr. Rezonancia vzduchového stĺpca v trubici

   a) Ak posúvame piest zľava doprava, pri jeho určitých polohách vnímame zosilnenie zvuku. Aká bude vzájomná vzdialenosť týchto polôh? [Pri frekvencii $f = v/\lambda$ dochádza k rezonancii vzduchového stĺpca, ak vzdialenosť medzi polohami piestu je $\lambda/2$ = 320 mm (alebo pri celočíselnom násobku tejto dĺžky).]
   b) Vytiahneme piest z trubice a ladíme tónový generátor. Akú najmenšiu frekvenciu treba nastaviť, aby sme vnímali zvuk s maximálnou hlasitosťou? [Pri postupnom

zväčšovaní frekvencie dôjde prvý krát k rezonancii, keď polovica vlnovej dĺžky sa bude rovnať dĺžke trubice, $\lambda/2$ = 1000 mm, f = 160 Hz.]

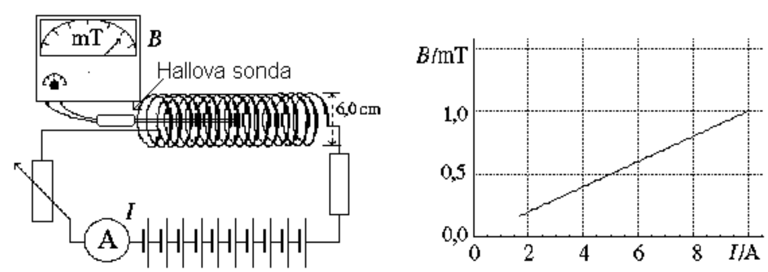
c) c) Ponecháme piest vytiahnutý z trubice, ale jej pravý koniec uzavrieme. Akú najmenšiu frekvenciu treba teraz nastaviť, aby sme vnímali zvuk s maximálnou hlasitosťou? [Vzduchový stĺpec rezonuje, ak vlnová dĺžka stojatého vlnenia je $\lambda/4$ = 4000 mm. Rezonančná frekvencia je 80 Hz.]

60. Závažie na špirálovej pružine a jednoduché kyvadlo kmitajú na povrchu Zeme s rovnakými periódami. Aký bude pomer týchto periód na povrchu Mesiaca? [Kyvadlo bude mať periódu približne 2,4 krát väčšiu]

61. Pomer frekvencií kmitov kyvadla a pružinového oscilátora je na povrchu Zeme 1:2. Aký bude tento pomer na planéte, ktorá má v porovnaní so Zemou len polovičný priemer a štyrikrát menšiu hmotnosť. [1:2]

62. Netopier letí smerom k prekážke konštantnou rýchlosťou 10 m.s. Zvukový signál, ktorý vysiela smerom dopredu, sa po odraze vráti k netopierovi za čas 0,15 s od vyslania. Teplota vzduchu je 26 ^{0}C. Koľko času mu ostáva, aby sa prekážke vyhol? [2,5 s]

63. 114. Ponorka sa pohybuje pod hladinou mora rýchlosťou 18 km.h^{-1}. Zvukový signál, ktorý vyslala smerom dopredu, sa vo vode šíri rýchlosťou 1400 m.s a po odraze sa k ponorke vráti. Od vyslania signálu až po jeho prijatie po odraze uplynie čas 50 ms. Na zmenu smeru ponorky je potrebný čas 5,0 s. Narazí ponorka na prekážku? [Ponorka nenarazí; do zrážky ostáva 7 s]



Obr. Meranie magnetickej indukcie v dutine cievky.

64. Pri vyobrazenom pokuse s jednovrstvovou valcovou cievkou sme odmerali a graficky znázornili veľkosť magnetickej indukcie ***B*** v závislosti od prúdu *I*.

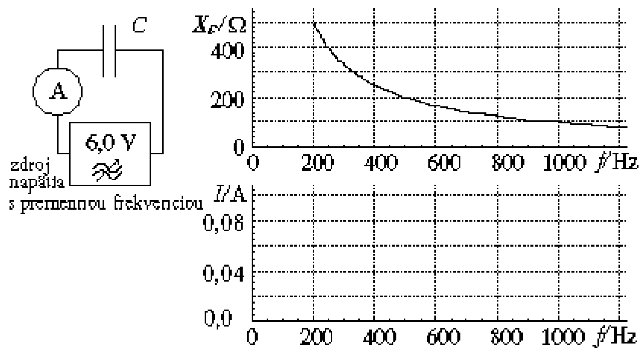
a) Zistite na obrázkoch potrebné údaje a vypočítajte indukčnosť *L* cievky. [0,1 mH]

b) Vypočítajte energiu E_m magnetického poľa cievky, ak ňou prechádza prúd 10 A. [5 mJ]

65. Na štítku elektromotora sú údaje: 220 V, 5 A, cos φ = 0,8. Určte zdanlivý a skutočný výkon elektromotora. [1100 VA, 880 W]

66. Cievkou s indukčnosťou 45 mH a s odporom 2,0 Ω, pripojenou na zdroj striedavého napätia s frekvenciou 1000 Hz, prechádza prúd 0,10 A. Aký prúd bude prechádzať cievkou, ak napätie zväčšíme na štvornásobok a frekvenciu na dvojnásobok pôvodnej hodnoty? [0,20 A; odpor cievky je v porovnaní s induktanciou zanedbateľne malý]

67. Na svorky zdroja striedavého elektrického napätia 24 V, s frekvenciou 50 Hz, pripojíme kondenzátor s kapacitou 10 μF. Určte prúd, ktorý bude prechádzať kondenzátorom. [75



mA]

Obr. Kapacitancia X_C obvodu striedavého prúdu zobrazená v závislosti od frekvencie f. Ako závisí od frekvencie prúd I prechádzajúci obvodom?

68. Na obrázku je kondenzátor pripojený na zdroj striedavého napätia s meniteľnou frekvenciou. Odpor obvodu je zanedbateľne malý. Napätie bolo počas merania konštantné. Na grafe je priebeh kapacitancie X_C obvodu v závislosti od frekvencie f.
    a) Zostrojte graf závislosti prúdu I od frekvencie f.
    b) Vypočítajte kapacitu C kondenzátora.
69. [Návod: Prúd I v dvojiciach (f, I) vypočítame zo vzťahu $I = U/X_C$, kde hodnoty X_C získame meraním na hornom grafe.]
70. Na zdroj striedavého elektrického napätia 6,3 V, ktorého frekvenciu môžeme spojite meniť, je pripojená cievka (0,02 H) a v sérii s ňou ampérmeter.
    a) Nakreslite schému zapojenia.
    b) Vypočítajte frekvenciu striedavého elektrického napätia, pri ktorej bude obvodom prechádzať prúd 12,6 mA. [4,0 kHz]
    c) Nakreslite kvalitatívny graf prúdu prechádzajúceho cievkou, v závislosti od jeho frekvencie.
    d) Aký predpoklad treba urobiť pred riešením úlohy a)? [predpokladáme, že odpor cievky je zanedbateľne malý]
71. Na zdroj striedavého elektrického napätia, ktorého frekvenciu môžeme spojite meniť, pripojíme cievku (0,02 H) a kondenzátor (2 μF), spojené do série. Napätie zdroja je pri zmene frekvencie konštantné.
    a) Nakreslite schému zapojenia.
    b) Vypočítajte uhlovú frekvenciu ω, pri ktorej bude obvodom prechádzať maximálny prúd (zanedbajte odpor R obvodu). [5 kHz]
    c) Nakreslite kvalitatívny graf priebehu prúdu v obvode v závislosti od frekvencie, v okolí hodnoty ω.
72. Na skrinke, v ktorej je uzavretá elektrická súčiastka, sú dva vývody, svorky A, B. Použijeme zdroj jednosmerného napätia a ampérmeter a zistíme, že súčiastkou neprechádza prúd. a) Nakreslite schému zapojenia. b) Použijeme ampérmeter a zdroj striedavého napätia a zistíme, že striedavý prúd súčiastkou prechádza. Ak pri konštantnom napätí zväčšíme frekvenciu f dvakrát (trikrát, štyrikrát,...), zväčší sa aj prúd dvakrát (trikrát, štyrikrát,...). Vyslovte domnienku o tom, aká súčiastka je v skrinke.

(Môže to byť kondenzátor?) c) Napíšte vzťah, ktorý podľa vášho názoru vyjadruje závislosť prúdu I od frekvencie *f*. [$I = U. C. \omega$]

73. V oscilačnom obvode s frekvenciou vlastného kmitania 16 kHz je cievka a doskový kondenzátor. Ako sa zmení vlastná frekvencia oscilačného obvodu, ak vzájomnú vzdialenosť platní kondenzátora zmenšíme na štvrtinu? [Zmenší sa na 8,0 Hz]
74. Určte kapacitu kondenzátora v oscilačnom obvode, ktorého cievka má indukčnosť 51 μH, ak je obvod naladený na príjem elektromagnetických vĺn s vlnovou dĺžkou 300 m. [$5{,}0.10^{-10}$ F]
75. Kapacita ladiaceho kondenzátora v oscilačnom obvode rozhlasového prijímača sa mení v rozsahu od C_0 do $C = 9\ C_0$. Určte interval vlnových dĺžok, na ktoré možno prijímač naladiť, ak pri kapacite C_0 kmitá oscilačný obvod prijímača s frekvenciou 10 MHz. [30 m, 90 m]
76. Aké veľké musí byť zvislé rovinné zrkadlo, v ktorom sa zobrazí celá vaša postava? [Návod: Riešte graficky] [Výška má byť rovná polovici výšky postavy]
77. Tenkú spojnú šošovku zobrazíme ako úsečku, ktorá pretína svoju optickú os v bode O. Svetelný lúč vychádzajúci z bodu A na optickej osi (AO = 6 cm) pretne šošovku v bode C (CO = 3 cm) a po lome optickú os v bode B (BO = 3 cm). Vyhľadajte ohniská šošovky.

    [Úlohu riešte graficky; FO = 2 cm]
78. Určte rýchlosť šírenia svetla v diamante s indexom lomu 2,40. [$1{,}25.10^{8}$ m.s^{-1}]
79. Na hladine vody je rozliata tenká vrstva (0,20 μm) oleja. Kolmo na hladinu dopadá biele svetlo. Indexy lomu sú 1,5 pre olej, 1,3 pre vodu.
    a) Určte frekvenciu prislúchajúcu farbe, ktorá v odrazenem svetle vyhasne. [600 nm]
    b) Určte frekvenciu prislúchajúcu farbe svetla, ktoré sledujeme pri odraze s maximálnou intenzitou. [400 nm]
    c) Uveďte, či ste tento jav niekedy pozorovali v prírode a opíšte ho. [Napr. dúhové farby na kaluži vody znečistenej olejom.]
80. Vypočítajte energiu fotónu ($h = 6{,}625.10^{-34}$ J. s)
    a) červeného svetla [$2{,}84.10^{-19}$ J, pre vlnovú dĺžku 700 nm]
    b) tvrdého röntgenového žiarenia (10 nm). [19,86.10-16 J]
81. Fotoelektrická katóda je zhotovená z látky, pre ktorú je výstupná práca pre fotoelektrón $3{,}6.10^{-19}$ J.
    a) Vypočítajte medznú vlnovú dĺžku pre túto katódu. [550 nm]
    b) Vypočítajte vlnovú dĺžku monochromatického svetla, ktorým treba ožiariť katódu, aby vyletujúce fotoelektróny dosiahli rýchlosť $4{,}2.10^{5}$ m.s^{-1}. ($h = 6{,}625.10^{-34}$ J.s, hmotnosť elektrónu je $9{,}1.10^{-31}$ kg.) [450 nm]
82. Vypočítajte frekvenciu a vlnovú dĺžku (vo vákuu) fotónu, ktorého energia sa rovná pokojovej energii elektrónu (Elektrón má pokojovú hmotnosť $9{,}1.10^{-31}$ kg, $h = 6{,}625.10^{-34}$ J. s.) Návod: $E = m.\ c = hf$. [$12{,}36.10^{19}$ Hz, $0{,}024.10^{-10}$ m]
83. Dopadom fotónu sa emituje z kovu elektrón s energiou 2,0 eV. Výstupná práca pre kov je 2,0 eV.
    a) Akú najmenšiu energiu mal fotón [$6{,}4.10^{-19}$ J]
    b) Aká vlnová dĺžka by mu prislúchala vo vákuu? [310 nm]

84. Pri štúdiu fotoelektrického javu dopadá na kovovú doštičku (katódu experimentálneho zariadenia) svetlo modrej farby a z doštičky vyletujú elektróny. Chceme, aby vyletujúce elektróny mali väčšie energie a preto :

    a) zväčšíme intenzitu dopadajúceho svetla (napr. tak, že pridáme ešte jednu lampu s modrým svetlom),
    b) osvetlíme katódu svetlom fialovej farby,
    c) osvetlíme katódu svetlom žltej farby,
    d) osvetlíme katódu svetlom červenej farby. [správna je odpoveď b]

85. Doba života miónu (μ-mezónu), ktorý je v pokoji v laboratóriu, je $2{,}2.10^{-6}$ s. Aká bude doba života mezónu, keď sa bude voči laboratóriu pohybovať rýchlosťou 0,9 c (c je rýchlosť svetla). [5.10^{-6} s]

86. Atómové jadro X obsahuje 204 nukleónov. Na jeden nukleón pripadá väzbová energia E/A = 8 MeV. Po emisii častice a E/A = 7 MeV) sa premení na jadro Y E/A = 8,1 MeV). Vypočítajte, aké množstvo energie sa pri tomto procese uvoľní vo forme kinetických energií častice a a jadra Y [16 MeV]

87. Aká časť vzorky rádia s polčasom rozpadu 1600 rokov sa rozpadne v priebehu 3200 rokov? [3/4]

88. Aby elektrón mohol opustiť platinovú elektródu, musí mať energiu (najmenej) $8{,}50.10^{-19}$ J. Vypočítajte najväčšiu vlnovú dĺžku svetla, ktorým treba ožiariť túto elektródu umiestnenú vo vákuu, aby prebehol fotoelektrický jav. (Planckova konštanta má hodnotu $6{,}625.10^{-34}$ J. s)

Riešenie:

$v = 0$, $W = 8{,}50.10^{-19}$ J, $h = 6{,}625.10^{-34}$ J. s, $c = 3.10^{8}$ m.s^{-1}, λ =?

$hf = W + 1/2\, m\, v^{-2}$, $f = c/\lambda$, $v = 0$.

$hc/\lambda = W$, $\lambda = hc/W$, $\lambda = 6{,}625.10^{-34}.\ 3.10^{8}\ /8{,}50.10^{-19}$ m = 2,34.10 m = 234 nm.

Najväčšia vlnová dĺžka svetla, ktoré vyvolá fotoelektrický jav na platinovej elektróde, je 234 nm.

C. INFORMATIKA

Variant A

1. Na utriedenie **N**-prvkového celočíselného poľa **pole** sme použili toto triedenie:

```
for i := 1 to N do
for j := 1 to N-i do
if pole[j] > pole[j+1] then
     vymen(j, j+1);
```

Pomocná procedúra **vymen** vymení obsahy príslušných dvoch prvkov poľa.
Zistite pre **N = 5**, koľkokrát sa zavolala procedúra **vymen**, keď na začiatku bolo pole zostupne usporiadané (od najväčších k menším hodnotám).

a. Zistite pre **N = 10**, koľkokrát sa zavolala procedúra **vymen**, keď na začiatku bolo pole vzostupne usporiadané (od najmenších k väčším hodnotám).

b. Zistite pre **N = 10000**, približne koľko sekúnd bežala táto časť programu, ak každé volanie procedúry vymen trvá 1 milióntinu sekundu a zvyšné časti programu z časového hľadiska zanedbáme. Ďalej predpokladáme, že pole malo na začiatku také rozloženie prvkov, že podmienka **pole[j] > pole[j+1]** bola počas behu programu splnená priemerne každý druhýkrát.

2. Mnohí z Vás dobre vedia, že deliteľnosť 11 sa dá zistiť pomocou špeciálneho ciferného súčtu: najprv spočítame cifry na párnych miestach, potom na nepárnych a na záver urobíme rozdiel týchto súčtov. Ak je tento rozdiel deliteľný 11, tak aj pôvodné číslo bolo deliteľné 11. Nasledujúca časť programu sa snaží zistiť, či je číslo deliteľné 11. Predpokladáme, že číslo je už uložené po cifrách v jednorozmernom **N**-prvkovom celočíslenom poli **a** (**var a: array[1..N] of integer;**):

```
j := 0; i := 0; k := 1;
repeat
     inc(i);
     j := j + __________________;
     k := -k;
until _________________;
if _____________ then
     write('je delitelne 11')
else
     write('nie je delitelne 11');
```

Doplňte chýbajúce časti výrazov (logických a aritmetických).

3. Dopravný podnik v Kocúrkove chce vykonať prehľad vyťaženia autobusových liniek. Preto zorganizoval takúto akciu: v jeden konkrétny deň sa v každom vozidle vozil jeden brigádnik a zapisoval počet nastupujúcich a vystupujúcich na každej zastávke. Cestujúcich aj zastávky si značil týmito písmenkami:

n - práve niekto nastúpil,
v - práve niekto vystúpil,
z - autobus zavrel dvere a išiel na ďalšiu zastávku.

Nakoľko im takto vychádzali príliš dlhé postupnosti písmen, brigádnici (zväčša študenti informatiky) si ich skracovali tak, že ak bolo za sebou viac rovnakých písmen, tak ho napísali len raz a pred neho dali číslo vyjadrujúce počet. To ešte nie je všetko: podobne si skracovali aj celé opakujúce sa postupnosti znakov. Vtedy túto postupnosť uzavreli do okrúhlych zátvoriek a pred ňu dali počet opakovaní.
Posledná zastávka pre nás nie je zaujímavá – na nej všetci vystúpia. Ale na všetkých ostatných je pre nás dôležitý počet cestujúcich, ktorí ostali v autobuse, keď sa tento pohol na ďalšiu zastávku. Budeme počítať vyťaženosť linky ako priemerný počet cestujúcich, ktorí ostali v autobuse počas jazdy k ďalšej zastávke. Napr. **2nz3nzz5v** znamená, že z 1. zastávky sa viezli 2 cestujúci, z druhej už 5 (3 pristúpili), z 3. opäť 5 (nik nenastúpil) a na konečnej všetci vystúpili. Priemerná vyťaženosť je (2+5+5)/3 = 4. Zistite priemernú vyťaženosť, ak

brigádnik zaznačil túto postupnosť: **nznvnz2nvzv2nz4v**.
brigádnik zaznačil túto postupnosť: **3nn5(n)zv2n4(vz4n2v)z10vnz5v**.
brigádnik zaznačil túto postupnosť: **3(n2(zvn)nz)z6v**.

4. Napíšte program, ktorý vypíše všetky slová (postupnosti znakov) dĺžky 6, ktoré sú zložené len z písmen {**a**, **b**}. Vypisujte len slová, v ktorých nie je viac písmen **b** ako písmen **a**. Program napíšte v ľubovoľnom programovacom jazyku, ktorý ste používali na strednej škole. Takými slovami sú napr. **abbaba**, **baabaa**, **aaaaaa**.

5. V **8**-prvkovom celočíselnom poli **A** sa nachádzajú nejaké čísla. Je daná časť programu:

```
x:=1; p:=A[x];
for i:=1 to 7 do
begin
     y:=x+i; if y>8 then y:=y-8;
     A[x]:=A[y]; x:=y
end;
A[x]:=p;
```

a. Zistite, aká postupnosť čísel bude po skončení programu v poli **A**, ak pôvodná postupnosť bola:

`1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.`

b. Zistite, aká musela byť počiatočná postupnosť ôsmich čísel v poli A, ak po skončení programu sa v tomto poli nachádzajú čísla:

`1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.`

6. Nasledujúca časť programu podľa určitého algoritmu spracováva celočíselnú hodnotu **n**. Predpokladajme, že na našom počítači operácie násobenia a delenia desiatimi sú veľmi rýchle a trvajú tisícinu sekundy. Operácie pričítania a odčítania trvajú 4 tisíciny, zvyšné príkazy v programovacom jazyku trvajú nulový čas. Operácia **i mod j** označuje zvyšok po celočíselnom delení čísla **i** číslom **j** a **i div j** je celočíselné delenie - obe tieto operácie považujeme za operácie delenia.

```
read(n);
i:=n; j:=1;
while i>9 do begin i:=i div 10; j:=j*10 end;
i:=0;
repeat
if n mod 10<>0 then
     begin i:=i+j; n:=n-1 end
else
     begin j:=j div 10; n:=n div 10 end
until n=0;    { cyklus skončí, keď n=0 }
```

a. Spočítajte, ako dlho program bežal pre **n=123**.
b. Zistite, pre akú najmenšiu hodnotu **n** program bežal **0,503** sekundy.

7. V múzeu výpočtovej techniky sme objavili historickú celočíselnú kalkulačku, ktorá až na dve tlačidlá vôbec nefunguje. Jedno tlačidlo má označenie **[*3]** a po jeho zatlačení sa číslo na displeji vynásobí 3. Druhé tlačidlo **[÷2]** vydelí číslo na displeji dvoma - delenie je celočíselné, t.j. zvyšok po delení sa zanedbá. Na začiatku je na displeji číslo 5. Postupným stláčaním tlačidiel môžeme na displeji dosiahnuť rôzne výsledky.
a. Ako dosiahneme na čo najmenší počet stlačení číslo 8?
b. Na displeji je na začiatku číslo 5. Koľko **rôznych** výsledkov sa dá dosiahnuť na displeji, ak štyrikrát postupne stlačíme nejaké z tlačidiel **[*3]** a **[÷2]**? Do úvahy berieme len čísla, ktoré sa dosiahli po štvrtom stlačení tlačidla.

8. Predpokladajme, že v programovacom jazyku je zadefinovaná procedúra **vektor** s dvoma reálnymi parametrami: **uhol** a **dĺžka**. Táto procedúra na obrazovke nakreslí úsečku zadanej **dĺžky** z momentálnej pozície grafického pera, ktorá zviera s y ovou osou zadaný **uhol**. Po nakreslení úsečky pero zostane v koncovom bode úsečky a kreslenie pokračuje ďalej od tohto bodu. Veľkosť uhla zadávame v stupňoch a meriame v smere otáčania hodinových ručičiek (smer nahor je uhol 0). Pero je na začiatku v strede obrazovky. Napr. príkazy **vektor(30,60); vektor(120,60); vektor(210,60); vektor(300,60);** nakreslia pootočený štvorec so stranou 60. Predpokladáme, že v programovacom jazyku už nie sú žiadne ďalšie grafické príkazy. Procedúru **vektor** neprogramujte.
Napíšte program (v ľubovoľnom programovacom jazyku, ktorý ste používali na strednej škole), ktorý najprv prečíta vstupnú hodnotu **N** a potom nakreslí pravidelný **N**-uholník so stranou 50. Nad každou stranou **N**-uholníka zostrojí **rovnostranný** trojuholník otočený smerom von z **N**-uholníka (s **N**-uholníkom majú spoločnú stranu). Napr. pre N=3 by sa mal nakresliť rovnostranný trojuholník so stranou 100, v strede strán ktorého sú vrcholy vpísaného trojuholníka so stranou 50.

9. Daný program po načítaní dvoch čísel **A** a **B** vypíše hodnotu **P**:

```
var
i,j,A,B,P:integer;
begin
read(A,B);
P:=0;
for i:=A to B do begin
j:=i;
while j>0 do begin
    if j mod 10 = 7 then
    P:=P+1;
    j:=j div 10;
end;
end;
writeln(P);
end;
```

a. Zistite, čo sa vypíše, ak zadáme **A**=180 a **B**=250.
b. Predpokladajme, že **A**=1. Zistite, aké musíme zadať najmenšie **B**, aby sa vypísalo číslo 20.
c. Zistite, čo sa vypíše pre **A**=1000 a **B**=10000.

Poznámka.

x mod y znamená zvyšok po delení čísla **x** číslom **y**, napr. 127 mod 10 = 7
x div y znamená celočíselné delenie čísla **x** číslom **y**, napr. 127 div 10 = 12.

10. V jednorozmernom poli čísel sú uložené informácie o počte obyvateľov pyramídového **N**-poschodového domu takto:

v prvom prvku poľa je jediný byt na najvyššom **N**-tom poschodí;
v ďalších dvoch prvkoch sú dva byty na ďalšom - nižšom poschodí;
v ďalších troch prvkoch sú tri byty na treťom poschodí - ak počítame od hora;
atď. až v posledných **N** prvkoch sú byty na prvom - najnižšom poschodí.

Daná časť programu zisťuje, ktoré poschodie je najhustejšie obývané, t.j. na ktorom poschodí je v priemere najviac obyvateľov vzhľadom na počet bytov.
V programe však niekto vynechal niektoré aritmetické a logické výrazy. Opravte program!

```
cp:=1; max:=a[1];
k:=____________________;
for i:=2 to N do begin
sucet:=0;
for j:=1 to i do begin
sucet:=____________________;
k:=________________;
end;
if ______________________ then begin
max:=_________________;
cp:=_________________;
end;
end;
writeln('najhustejšie poschodie =
',_________________);
```

11. Máme danú množinu znakových reťazcov, ktoré sú zložené z písmen **A** a **B** a všetky sú ukončené nejakou cifrou **1**, **2**, **3** alebo **4**. Takýmto reťazcom budeme hovoriť slová. Slová v tejto množine vznikli podľa špeciálnych pravidiel:

```
x = Ay | Bz | 1
y = Ax | Bu | 2
z = Au | Bx | 3
u = Az | By | 4
```

Aby sme vytvorili nejaké nové slovo do tejto množiny, vždy zoberieme štartové písmeno **x**, nájdeme zodpovedajúce pravidlo (prvý riadok pravidiel) a vyberieme nejakú z možností (možnosti sú oddelené znakom "|") – písmeno **x** nahradíme touto možnosťou. Ak výsledok obsahuje jedno z písmen **x**, **y**, **z** alebo **u**, pokračujeme v nahrádzaní podľa príslušného pravidla. Celý proces vytvárania nového slova zrejme končí, keď písmeno nahradíme cifrou. Postup nahrádzania budeme značiť šípkou, napr. takto
x => Ay => ABu => ABBy => ABB2 ... t.j. vznikla postupnosť písmen **A** a **B** a vždy končí nejakou cifrou od **1** do **4**.

a. Zistite, akou cifrou končia slová **ABABABABABABAB** a **AAABAAAABAAAAABAAAAAABAAAAAAAB**.
b. Zistite, koľko existuje rôznych slov dĺžky 6, ktoré sú zložené z 5 znakov **A** a **B** a končia znakom **2**.

12. Deti robili v škole takéto experimenty: sledovali skoky lúčneho koníka pomocou vodorovného pravítka a zapisovali ich do tabuľky **skoky**. Do jednorozmerného celočíselného poľa **skoky** sa zapíše dĺžka skoku (počet centimetrov) tak, že keď koník skočil vpravo, tak zapíšeme kladné číslo, ak skočil opačným smerom, zapíšeme záporné číslo. Napíšte program, ktorý pre dané **N**-prvkové pole **skoky** vypíše:

a. vzdialenosť, v ktorej skončí od svojej štartovej pozície;

b. dodatočne sme zistili, že jedno číslo v tabuľke bolo zapísané zle (treba mu otočiť znamienko). Program by mal zistiť, ktoré to bolo číslo, ak vieme, že po tejto oprave bola vzdialenosť od štartu minimálna možná.

Môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk, ktorý ste používali na strednej škole. Predpokladajte, že **N**-prvkové celočíselné pole **skoky** je už na začiatku programu prečítané.

13. Daný program po načítaní dvoch čísel **A** a **B**, nakreslí z hviezdičiek nejaký obrázok:

```
var i,j,A,B:integer;
begin
  read(A,B);
  for i:=1 to A+B do
    begin
      for j:=1 to A+B do
        if i<=A then
          if i>=j then write('*')
          else write(' ')
        else
          if j<A then write(' ')
          else if i>j then write('*');
      writeln;
    end;
  end;
```

a. Zistite, koľko hviezdičiek sa nakreslí, ak sme na vstupe zadali **A**=7 a **B**=8 ?

b. Zistite všetky kombinácie vstupných hodnôt **A** a **B**, pre ktoré sa nakreslil obrázok presne zo 111 hviezdičiek.

14. Je daná časť programu, ktorá spracováva **N** prvkové pole **a** celých čísel tak, že redukuje duplikáty. T.j. po skončení programu sa každý prvok v poli nachádza iba raz a pole sa príslušne skráti (zmení sa **N** - počet prvkov poľa). V programe však niekto omylom vymenil niektoré výskyty premennej **j** za premennú **i**. Opravte program!

```
i:=2; j:=1;
while i<=N do
  begin
    k:=1;
    while (k<=i) and (a[k]<>a[i]) do
      k:=k+1;
    if k>i then
      begin i:=i+1; a[i]:=a[i] end;
    i:=i+1;
  end;
N:=j;
```

15. V banke sú 3 okienka a pred každým stojí rad **N** zákazníkov. Každého zákazníka v prvom rade obslúžia za 3 minúty, v druhom za 2 minúty a v treťom za 5 minút. Ak sa niektorý rad vyprázdni, všetci čakajúci zákazníci v ostatných radoch (okrem prvých dvoch zákazníkov) sa

rýchlo presunú k tomuto okienku a vytvoria tu nový rad. Zistite, o aký čas obslúžia všetkých zákazníkov (ako dlho musel čakať posledný zo všetkých 3*N zákazníkov, kým bol obslúžený)

a. pre **N**=6.

b. pre **N**=30.

16. Napíšte program, ktorý pre dané **N** vypíše čísla 1, 2, ..., **N** do štyroch riadkov nasledovne:

v prvom riadku budú všetky čísla (z intervalu 1..**N**) končiace cifrou 9;

v druhom riadku budú všetky čísla (z intervalu 1..**N**) deliteľné 6;

v treťom riadku budú všetky čísla (z intervalu 1..**N**), ktoré sú mocninou 2;

v poslednom riadku budú všetky čísla (z intervalu 1..**N**), ktoré nie sú ani v jednom z predchádzajúcich riadkov.

Môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk, ktorý ste používali na strednej škole.

17. Daná je časť programu:

```
a:=1; b:=40; c:=36;
for i:=1 to 5 do
  begin
    a:=a*27+7; b:=b*9+4;
    if i>1 then c:=c*27;
    c:=c+6;
  end;
a:=a+b+c+1;
writeln(a);
```

Zistite, čo vypíše tento program.

Na záver sme pridali tieto tri riadky:

```
i:=0;
while a mod 3=0 do begin a:=a div 3; i:=i+1 end;
writeln(a,' ',i);
```

Zistite, aké dve hodnoty sa vypíšu teraz. (Operácia **mod** znamená zvyšok po celočíselnom delení a **div** znamená celočíselné delenie.)

Poznámka: Pomôže Vám, keď budete všetky výpočty robiť v 3-ovej sústave.

18. Máme rad **N** žiaroviek - každá z nich je buď zhasnutá (je v stave 0) alebo svieti (je v stave 1) alebo bliká (je v stave 2). Okrem týchto žiaroviek máme jedno tlačidlo, ktoré je naprogramované tak, že vždy, keď ho stlačíme, postupne prejde všetky dvojice susediacich žiaroviek (najprv 1. a 2., potom 2. a 3. ... a na záver (**N**-1)-vú a **N**-tú). Ak je prvá z dvojice zhasnutá a druhá svieti (dvojica je v stave 01), tak ich obe prepne do nového stavu 2 - obidve budú blikať (t.j. stav 22). Ak prvá z dvojice bliká a druhá nie (dvojica je v stave 20 alebo 21), tak vymení ich stavy (t.j. buď stav 02 alebo 12). Toto postupne urobí so všetkými dvojicami. Zrejme po každom stlačení tlačidla sa môžu niektoré žiarovky rozblikať, iné zhasnúť alebo rozsvietiť. V niektorých situáciách stlačenie tlačidla už nič nemení (hovoríme tomu **stabilný** stav).

a. Pre **N**=20 zistite, koľko existuje rôznych stabilných stavov, v ktorých žiadne žiarovky neblikajú.

b. Pre **N**=8 zistite, koľko existuje rôznych stavov, keď žiarovky neblikajú a z ktorých po niekoľkých stlačeniach tlačidla sa stane stabilný stav zo samých blikajúcich žiaroviek (t.j. 22222222).

c. Navrhnite taký stav desiatich neblikajúcich žiaroviek, aby sa stabilný stav zo samých blikajúcich žiaroviek dosiahol na maximálny možný počet stlačení tlačidla. Koľko stlačení bude treba? (Ak takých riešení existuje viac, stačí, ak uvediete jedno.)

19. Mravec Ferdo sa pohybuje na štvorčekovom papieri a my ho pozorujeme. Všetky jeho pohyby si zapisujeme takto: keď sa presunie na susedný štvorček v tom smere, v ktorom je práve otočený, zapíšeme písmeno **D** (dopredu), keď sa otočí vľavo o 90 stupňov, zapíšeme **L** a pri otočení vpravo o 90 stupňov zapíšeme písmeno **P**. Napr. zápis **DDPDPDDPD** znamená, že mravec navštívil 6 rôznych políčok, pričom sa vrátil na pôvodné miesto. Opakujúce sa časti v zápise môžeme skrátiť, napr. **4(100DL)** znamená, že 4-krát sa opakuje 100 krokov dopredu a jedno otočenie vľavo (jeho trasa je štvorec so stranou 100 štvorčekov).

a. Koľko políčok navštívil, ak prešiel **1DP1DL 2DP2DL 3DP3DL ... 9DP9DL**? (tromi bodkami vyjadrujeme, že ďalej sa stále opakuje ten istý zápis **xDPxDL**, ale stále s väčšími a väčšími číslami). Počítame aj štartové políčko.

b. Predchádzajúci zápis by sme mohli skrátene zapísať: **9(xDPxDL)**, v ktorom písmeno **x** vyjadruje číslo - poradové číslo opakovania (prechodu) cyklom. Zistite, koľko rôznych políčok mravec navštívil, ak prešiel trasu **10(xDPxDPxDPxDL)**.

20. Predpokladajme, že v programovacom jazyku máme definovanú procedúru **bod** s troma celočíselnými parametrami **x**, **y** a **farba**, ktorá nakreslí do grafickej plochy obrazovky na zadané súradnice farebný bod. Ľavý horný roh obrazovky má súradnice (0,0). V programovacom jazyku už nemáme ďalšie procedúry na kreslenie do grafickej plochy. Napíšte program, ktorý nakreslí šachovnicu **NxN** červených (**farba**=1) a modrých (**farba**=2) políčok, pričom každé políčko je veľké 10x10 bodiek, ľavý horný roh je červený. Hodnota **N** je konštanta programu, napr. **N**=8. Úlohu riešte všeobecne pre ľubovoľné **N**. Môžete použiť ľubovoľný programovací jazyk, ktorý ste používali na strednej škole.

Riešenie.

1. Algoritmus robí buble sort

    a. pre N = 5 počet = 10
    b. pre N = 10 počet = 0
    c. pre N = 10000 počet = 25 sekúnd

2. Delenie 11:

```
j := 0; i := 0; k := 1;
repeat
  inc(i);
  j := j + k*a[i];
  k := -k;
until i >= N;
if j mod 11 = 0 then
  write('je delitelne 11')
else
  write('nie je delitelne 11');
```

3. Vyťaženie autobusu

    pre **nznvnz2nvzv2nz4v** vyťaženosť = 10/4 = 2.5
    pre **3nn5(n)zv2n4(vz4n2v)z10vnz5v** vyťaženosť = 70/7 = 10
    pre **3(n2(zvn)nz)z6v** vyťaženosť = 36/10 = 3.6

4. Napr. riešenie

```
const
z: array[0..1] of char = 'ab';
var
i, j, n, k: integer;
s: string;
begin
for i := 0 to 63 do begin
s := ''; n := i; k := 0;
for j := 1 to 6 do begin
s := s+z[n mod 2];
if n mod 2 = 0 then inc(k);
n := n div 2;
end;
if k >= 3 then
writeln(s);
end;
end;
```

5. Algoritmus robí nejakú permutáciu prvkov poľa

odtrasujeme pre 1 2 3 4 5 6 7 8, dostaneme 2 4 8 7 1 5 3 6
stačí k 1 2 3 4 5 6 7 8 zobrať inverznú permutáciu: 5 1 7 2 6 8 4 3

6. označme pc počet cifier čísla **n** a **cs** ciferný súčet, potom

- while-cyklus prejde **(pc-1)** krát a teda trvá **(pc-1)*2** milisekúnd
- repeat cyklus prejde **(pc+cs-1)** krát (a teda podmienka v if trvá **(pc+cs-1)** ms), pričom
  - then-vetva **cs**-krát, teda **cs*8** milisekúnd
  - else-vetva **(pc-1)** krát, teda **(pc-1)*2** milisekúnd
  - keď to spočítame dostaneme vzorec: **5*pc+9*cs-5**

a. pre **123** je to **64** ms

b. najmenšie číslo s **503** ms musí mať cifry usporiadané vzostupne, lebo čísla, ktoré sa líšia len v permutácií cifier, dávajú rovnaký čas

- preto treba riešiť rovnicu **5pc+9cs=508**
- najmenšie **pc** je **8** a **cs** je **52** teda **10699999**
- skoro dobré výsledky, napr:
  - pre 899999 – 502 ms
  - pre 1699999 – 498 ms
  - pre 1799999 – 507 ms

7. a. Dá sa to na 7 stlačení (treba začať konštruovať 5 z výsledku, pričom často sú vynútené ťahy). Úloha má viacej riešení. Napr. **[*3], [*3], [÷2], [÷2], [*3], [÷2], [÷2]** .

b. Najlepšie konštruovať strom všetkých riešení, pretože niektoré sa môžu opakovať:

1.krok: (2,15)
2.krok: 2(1,6), 15(7,45)
3.krok: 1(0,3), 6(3,18), 7(3,21), 45(22,135)
4.krok: 0, 3(1,9), 18(9,54), 21(10,63), 22(11,66), 135(67,405)
dostávame teda **10** rôznych hodnôt: **0, 1, 9, 10, 11, 54, 63, 66, 67, 405**.

8. napr. riešenie

```
for i:=0 to n-1 do begin
u:=i*(360/n);
for j:=0 to 3 do
vektor(u-120*j,50);
end;
```

9. Program v danom intervale čísel <A,B> počíta počet výskytov cifry 7.

a. Pre <180,250> len čísla {187, 197, 207, 217, 227, 237, 247} obsahujú po jednej cifre 7 => **P=7**.

b. Pre <1,100> sú to čísla {7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97} pričom číslo 77 obsahuje dve cifry 7, t.j. minimálne **B=97**.

c. Už vieme (b), že v intervale <1,100> sa nachádza 20 cifier 7 => ak si nevšímame prvé dve cifry všetkých čísel z intervalu <1000,10000>, tak P=90*20=1800;
pozrime sa na prvé dve cifry: ciframi 10 začína 100 čísel, ciframi 11 ďalších 100, ... ciframi 99 tiež 100 čísel – medzi týmito sa cifra 7 vyskytuje 19-krát (berieme len štvorciferné, teda <700,799> nezapočítavame), t.j. P=90*20+19*100=**3700**.

10. Oprava programu je napr. nasledovná:

```
cp:=1; max:=a[1];
k:=2;
for i:=2 to N do begin
  sucet:=0;
  for j:=1 to i do begin
    sucet:=sucet+a[k];
    k:=k+1;
  end;
  if max < sucet/i then begin
    max:=sucet/i;
    cp:=i;
  end;
end;
writeln(N+1-cp);
```

11. je to regulárna gramatika, v ktorej posledná cifra je počet A mod 2+2*(počet B mod 2)+1

a. počet A=7, počet B=7 ... číslo končí **4**
počet A=25, počet B=5 ... číslo končí **4**

b. slovo končí 2, ak počet A je nepárne a počet B je párne, t.j.
počet A=1 a počet B=4 ... počet takých reťazcov je (5 nad 1) = 5
počet A=3 a počet B=2 ... počet takých reťazcov je (5 nad 3) = 10
počet A=5 a počet B=0 ... počet takých reťazcov je (5 nad 5) = 1
spolu je takých slov **16**.

12. napr. riešenie

```
var
  skoky:array[1..N] of integer;
  vzd,i,x,naj:integer;
begin  // prečítanie do poľa s
  vzd:=0;
  for i:=1 to N do inc(vzd,skoky[i]);
  writeln('skončí vo vzdialenosti ',abs(vzd));
   naj:=vzd; x:=0;
  for i:=1 to N do
    if abs(vzd-2*skoky[i]) < naj then begin
      x:=i; naj:=abs(vzd-2*skoky[i]);
    end;
   if x=0 then writeln('nie je také')
  else writeln('treba otočiť ',skoky[x],' aby bola
vzdialenosť ',naj);
end
```

13. Hviezdičky sa kreslia pod diagonálou štvorcov veľkosti **A** a **B**, pričom ten druhý je posunutý o A stĺpcov vpravo. Spolu sa ich nakreslí: (A*(A+1))/2 + (B*(B+1))/2

a. Pre A=7, B=8 sa teda nakreslí (7*8)/2+(8*9)/2=64 hviezdičiek

b. Obrázok zo 111=X+Y sa nakreslí:

n	**(n*(n+1))/2**
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105

Z tabuľky vidíme, že požadovaný súčet majú dvojice 3, 14 a 9, 11. Hľadanými riešeniami sú teda štyri usporiadané dvojice (A,B): (3,14), (14,3), (9,11), (11,9).

14. Oprava programu je nasledovná:

```
i:=2; j:=1;
while i<=N do
  begin
    k:=1;
    while (k<=j) and (a[k]<>a[i]) do
      k:=k+1;
    if k>j then
      begin j:=j+1; a[j]:=a[i] end;
    i:=i+1;
  end;
N:=j;
```

15. úlohu riešime trasovaním

a. pre **N**=6 posledný musel čakať 20 minút

b. pre **N**=30 posledný musel čakať 88 alebo 90 minút

16. napr. riešenie

```
var
  i,j,N:integer;
begin
  readln(N);
  i:=9; while i<=N do begin write(i,' '); inc(i,10);
end;
  writeln;
  i:=6; while i<=N do begin write(i,' '); inc(i,6);
end;
  writeln;
  i:=1; while i<=N do begin write(i,' '); inc(i,i);
end;
  writeln;
  i:=2; j:=2;
  while i<=N do begin
    if (i mod 10<>9)and(i mod 6<>0) and (i<>j) then
      write(i,' ');
    inc(i); if i>j then j:=2*j;
  end;
  writeln;
end;
```

17. Úlohu riešime v trojkovej sústave. Po 5 prechodoch cyklom bude v premenných:

```
a=       1021021021021021
b=         11111111111111
c=       1120020020020020
a+b+c=   2222222222222222
a+b+c+1=10000000000000000
```

teda po a) sa vypíše **43046721** a po b) sa vypíše dvojica **1 16**

18. Prvé pravidlo je **01->22** a druhé **2x->x2** - môžeme to chápať ako zátvorky (**0** ľavú a **1** pravú zátvorku), prvé pravidlo páruje zátvorky - prerobí ich na **22** a druhé pravidlo presťahuje všetky **2** na pravý koniec postupnosti.

a. stabilné stavy len z **0** a **1** nesmú obsahovať dvojicu **01** vedľa seba, t.j. vyhovujú $\mathbf{1^i 0^{N-i}}$ čo je teda 21 rôznych stavov.

b. koľko existuje dobre uzátvorkovaných výrazov so 4 pármi zátvoriek - 14. *Poznámka.* existuje aj všeobecný vzorec: **komb(N,N/2)/(N/2+1)**, kde komb označuje kombinačné číslo.

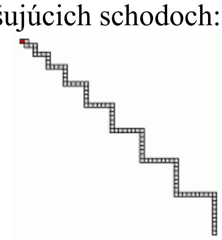
Všetky riešenia:

1. 00001111	8. 00110011
2. 00010111	9. 00110101
3. 00011011	10. 01000111
4. 00011101	11. 01001011
5. 00100111	12. 01001101
6. 00101011	13. 01010011
7. 00101101	14. 01010101

c. zrejme bude 5 núl a 5 jedničiek: **0000011111** a postupne po 9 stlačeniach tlačidla: *9 stlačení tlačidla:*

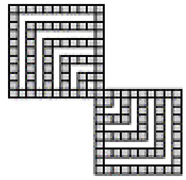
1. 0000211112
2. 0000111122
3. 0002111222
4. 0001112222
5. 0021122222
6. 0011222222
7. 0212222222
8. 0122222222
9. 2222222222

19. a. Mravec prejde po stále sa zväčšujúcich schodoch:



Nakoľko na každé políčko stúpi len raz, výsledok je 1+2*súčet(1..9) = **91**

b. Prejde stále sa zväčšujúce štvorce:



keby sme presťahovali spodný štvorec do horného - okrem častí, ktoré by sa prekryli, ostane plný štvorec 11x11 a 2 pásiky po 9 štvorčekov, t.j. počet políčok = 121 + 18 = **139**

20. Toto je jedno z možných riešení:

```
const
  n=8;
var
  x,y:integer;
begin
  for y:=0 to 10*n-1 do
    for x:=0 to 10*n-1 do
      bod(x,y,(x div 10+y div 10) mod 2+1);
end;
```