

# MATEMATIKA - 2011

sem vlepíť  
čiarový kód uchádzača

Test obsahuje **30 úloh**. Na jeho vypracovanie máte **90 minút**. Každá úloha spolu so zadáním obsahuje aj miesto na zapísanie odpovede – je označené hrubším rámkom.

Povolené pomôcky: modré alebo čierne pero. Pomocné výpočty môžete robiť na voľné miesto v tomto teste alebo na papier, ktorý dostanete. **Nemôžete používať** žiadne iné pomôcky (napr. kalkulačku, mobil, vlastný papier a pod.).

Za správnu odpoveď na jednu úlohu získate 1 **hodnotenie** ✓ (ak úloha obsahuje viacero otázok alebo odpoveď má viacero častí, tak hodnotenie ✓ získate iba vtedy, keď správne zodpoviete všetky tieto otázky, resp. časti), inak je úloha hodnotená –. Celkový počet získaných hodnotení ✓ sa prepočíta na body (1 hodnotenie ✓ = 2/3 bodu).

**Odpovede** píšete na vyznačené miesto perom. Ak nie je v zadání úlohy uvedené inak, zapisujte číselné odpovede ako desatinné čísla (teda napr. 2031 alebo – 315,7).

Ak sa pri zapisovaní odpovede **pomýlite**, zreteľne prečiarknite chybnú odpoveď a novú odpoveď vpíšete čitateľne opäť na vyznačené miesto. Pri hodnotení sa bude prihliadať iba na **odpovede**, ktoré sú **jednoznačne čitateľné a napísané na mieste určenom na zapísanie odpovede k prislúchajúcej úlohe**.

Rekapitulácia hodnotenia:

	počet hodnotení ✓		počet hodnotení ✓
strana 2 (úlohy 1 – 7)		strana 5 (úlohy 21 – 26)	
strana 3 (úlohy 8 – 13)		strana 6 (úlohy 27 – 28)	
strana 4 (úlohy 14 – 20)		strana 7 (úlohy 29 – 30)	
celkový počet hodnotení ✓			
celkový počet bodov			

Dátum: \_\_\_\_ . 6. 2011

Test vyhodnotil/a (podpis) \_\_\_\_\_

1	Upravte výraz $\frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{6} + \frac{4}{8}}$ na zlomok v základnom tvare.	<div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 50px; margin: 5px;"></div> <hr style="width: 50px; margin: 5px 0;"/> <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 50px; margin: 5px;"></div>
2	Množina $A$ má 10 prvkov, množina $B$ má 8 prvkov, ich zjednotenie $A \cup B$ má 12 prvkov. Koľko prvkov má prienik $A \cap B$ ?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 50px;"></div>
3	Číslo $2 \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ je možné zapísať v tvare $2^a$ . Nájdite $a$ , zapíšte ho ako zlomok v základnom tvare.	<div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 50px; margin: 5px;"></div> <hr style="width: 50px; margin: 5px 0;"/> <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 50px; margin: 5px;"></div>
4	Tento test má 30 úloh. Keby sme výsledky dvoch z nich chceli iba tipovať, koľkými spôsobmi by sme mohli tieto dve úlohy vybrať?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 50px;"></div>
5	V trojuholníku $ABC$ sú $X, Y$ v tomto poradí stredy strán $BC$ a $CA$ . Lichobežník $ABXY$ má obsah 12. Vypočítajte obsah trojuholníka $ABC$ .	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 50px;"></div>
6	Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $[1,4]$ a má smernicu 3. Rovnicu zapíšte v tvare $y = ax + b$ .	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: auto;"> <math>y = </math> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; display: inline-block; vertical-align: middle;"></div> <math>x + </math> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 30px; display: inline-block; vertical-align: middle;"></div> </div>
7	Vieme, že výroky $A \vee B$ , $B \Rightarrow C$ sú pravdivé, výrok $A \vee (\neg C)$ je nepravdivý. Čo na základe toho vieme povedať o pravdivosti alebo nepravdivosti výrokov $A, B, C$ ? <i>Poznámka: symbol <math>\neg C</math> označuje negáciu výroku <math>C</math>.</i>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>A</math> je ....., <math>B</math> je....., <math>C</math> je .....         </div>

**8** Ktorú z priamok  $j, k, l, m, o, p, r$  na obrázku treba zvoliť za os  $x$  a ktorú za os  $y$ , aby vyznačená krivka bola grafom funkcie  $y = 1 - \sin x$  ?

Za os  $x$  treba zvoliť priamku .....

Za os  $y$  treba zvoliť priamku .....

**9** Pre ktorú hodnotu  $p$  má lineárna rovnica (s neznámou  $x$ )  
 $2(4x - 7) - 5x + 4 = px - 10$   
nekonečne veľa riešení?

**10** Lineárna funkcia nadobúda v bodoch 1 a 5 v tomto poradí hodnoty 15 a 16. Akú hodnotu nadobúda táto funkcia v bode 11 ?

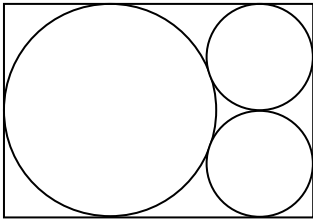
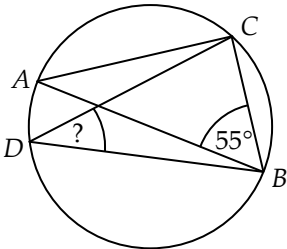
**11** Nech  $a \in (-1, 0)$ . Čísla  $a^2, a^{-1}, a^3, |a|$  usporiadajte podľa veľkosti. Jednotlivé čísla vpište do rámkov tak, aby platili nerovnosti.

<  < 0 <  <

**12** Pre kladné číslo  $z$  platí  $\log_z 5 = 6$ . Vypočítajte  $\log_{\frac{1}{z}} 25$ .

**13** Nech funkcie  $f, g, h$  sú definované pre všetky reálne čísla. Označme  $F, G, H$  v tomto poradí množiny všetkých koreňov rovníc  $f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0$ . Vyšrafujte v jednom z Vennových diagramov množinu všetkých riešení rovnice  $\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} = 0$ .

*Ak sa v odpovedi pomýlite, prečiarknite obrázok a odpoveď vyznačte do nového obrázka.*

- 14** V meste predávajú lístky na mestskú hromadnú dopravu v 3 stánkoch. Pravdepodobnosť, že v jednotlivých stánkoch sú lístky vypredané, je 0,1 (prvý stánok), 0,2 (druhý stánok) a 0,3 (tretí stánok). Vypredanie lístkov v jednotlivých stánkoch sú navzájom nezávislé udalosti. Aká je pravdepodobnosť, že lístky majú aspoň v jednom z týchto 3 stánkov? Výsledok zapíšte ako desatinné číslo z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ .
- 15** Koľkokrát väčšia je pravdepodobnosť toho, že pri hode 10-mi štandardnými hracími kockami padne práve jedna šestka, ako pravdepodobnosť toho, že pri takomto hode nepadne žiadna šestka?  
*Poznámka: Na jednotlivých stenách štandardnej hracej kocky sú čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6.*
- 16** V rovnobežníku  $ABCD$  platí  $|AB|=8$ ,  $|BC|=5$ ,  $|BD|=7$ . Vypočítajte veľkosť uhla  $\alpha = \angle DAB$  (v stupňoch).
- 17** Z piatich doterajších známok z dejepisu má Martin aritmetický priemer 2,8. Keby odteraz dostával z dejepisu už iba samé jednotky, koľko najmenej by ich musel dostať, aby aritmetický priemer jeho známok z dejepisu bol menší ako 2 ?
- 18** Zuzana nechce doma prezradiť, aké známky bude mať na vysvedčení. Povedala iba toto: „Na vysvedčení bude 8 známok, ich aritmetický priemer je 2,125, medián je 2, modus 1 a nebudem mať žiadnu dvojku.“ Koľko štvoriek bude mať Zuzana na vysvedčení?
- 19** Do obdĺžnika s kratšou stranou dĺžky 4 sú vpísané tri dotýkajúce sa kružnice (pozri obrázok). Vypočítajte veľkosť dlhšej strany obdĺžnika. Výsledok uveďte v tvare  $a + \sqrt{b}$ , kde  $a, b$  sú prirodzené čísla.
- 
- +  $\sqrt{\text{input}}$
- 20** Body  $A, B, C, D$  ležia na kružnici, pričom úsečka  $AB$  je jej priemer. Uhol  $ABC$  má veľkosť  $55^\circ$ . Akú veľkosť (v stupňoch) má uhol  $CDB$ ?
- 

<b>21</b>	Štyri korene rovnice $(x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1) = 0$ usporiadame podľa veľkosti od najmenšieho po najväčší. Vypočítajte súčet stredných dvoch koreňov.	
-----------	---	--

<b>22</b>	Z kladných čísel 10, $a$ , $b$ , 1 prvé tri sú tri za sebou nasledujúce členy aritmetickej postupnosti, posledné tri sú tri za sebou nasledujúce členy geometrickej postupnosti. Určte hodnotu $a$ . Výsledok zapíšte ako zlomok v základnom tvare.	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto;"></div> <hr style="width: 20px; margin: 0 auto;"/> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto;"></div>
-----------	---	--

<b>23</b>	Určte vzdialenosť stredov kružníc $k$ , $l$ , ak $k: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ , $l: x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ .	
-----------	---	--

<b>24</b>	Na obrázku je graf funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle 0,1 \rangle$ . Koľko riešení má rovnica $f(x) = x$ na tomto intervale?	

<b>25</b>	Akou cifrou končí číslo $2012^{2011}$ ?	
-----------	---	--

<b>26</b>	Na približný odhad počtu rokov, za ktoré sa pri zloženom úrokovaní s ročnou úrokovou mierou $p$ % vklad zdvojnásobí, sa používa <i>pravidlo 72</i> : $\frac{72}{p} \approx \text{počet rokov, za ktoré sa vklad zdvojnásobí.}$ Odhadnite pomocou tohto pravidla, za koľko rokov vzrastie vklad pri zloženom úrokovaní a ročnej úrokovej miere 4 % na svoj osemnásobok.	
-----------	---	--

**27** Chceme riešiť nerovnicu  $\sqrt{x^2 + 1} > 1 - x$ . Doplňte chýbajúce časti v texte riešenia (chýbajúci text je označený **DOPLŇTE**).

Ak  $1 - x > 0$  (teda  $x < 1$ ), tak sú na oboch stranách nerovnice kladné čísla, preto umocnenie na druhú je ekvivalentná úprava. Dostaneme  $x^2 + 1 > 1 - 2x + x^2$ , teda  $x > 0$ . V tomto prípade nerovnosť platí pre všetky  $x \in (0,1)$ .

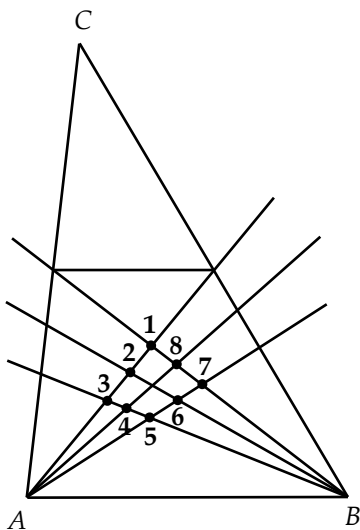
Ak  $1 - x \leq 0$  (teda  $x \geq 1$ ), tak na ľavej strane nerovnice je kladné číslo, na pravej strane nekladné číslo. V tomto prípade teda nerovnosť platí pre **DOPLŇTE**

Preto množina všetkých riešení nerovnice  $\sqrt{x^2 + 1} > 1 - x$  je  $M =$  **DOPLŇTE**

**28** V Lemoinovom bode trojuholníka  $ABC$  sa pretínajú priamky  $AX$ ,  $BY$  a  $CZ$ , kde  $AX$  je súmerná podľa osi uhla  $BAC$  s ťažnicou na stranu  $BC$ , obdobne sú definované priamky  $BY$  a  $CZ$ .

Na obrázku trojuholníka  $ABC$  je vyznačená stredná priečka a priamky súvisiace s definíciou Lemoinovho bodu.

Ktorý z bodov označených na obrázku číslami 1 až 8 je Lemoinov bod trojuholníka  $ABC$ ?



<b>29</b>	<p>Rotačný kužeľ, ktorého bočná hrana je dvakrát dlhšia ako polomer podstavy, rozdelíme na dve telesá rovinou, ktorá je rovnobežná s jeho podstavou a prechádza stredom výšky. Tieto dve telesá sú menší kužeľ <math>K</math> a zrezaný kužeľ <math>Z</math>. Povrch menšieho kužeľa <math>K</math> (plášť + podstava) je 3. Vypočítajte povrch zrezaného kužeľa <math>Z</math> (plášť a obidve podstavy).</p> <p><i>Poznámka: Obsah plášťa kužeľa sa vypočíta podľa vzorca <math>S_{Pl} = \pi rs</math>, kde <math>r</math> je polomer podstavy, <math>s</math> je dĺžka bočnej hrany kužeľa.</i></p>	
-----------	--	--

<b>30</b>	<p>Uvažujme o sedemciferných číslach s nasledujúcimi vlastnosťami:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• každé číslo je tvorené ciframi 1, 3, 5, 9, 4, 6, 8, každá cifra je v čísle použitá práve raz,</li> <li>• číslo končí cifrou 4,</li> <li>• posledné tri cifry (na mieste stoviek, desiatok a jednotiek) sú párne.</li> </ul> <p>Akým najväčším prirodzeným číslom sú deliteľné všetky tieto sedemciferné čísla?</p>	
-----------	--	--

## KONIEC TESTU

---

*Miesto na poznámky a pomocné výpočty*

*Miesto na poznámky a pomocné výpočty*