

## MATEMATIKA - 2012

sem vlepíť  
čiarový kód uchádzača

Test obsahuje **30 úloh**. Na jeho vypracovanie máte **90 minút**. Každá úloha spolu so zadáním obsahuje aj miesto na zapísanie odpovede – je označené hrubším rámkom.

Povolené pomôcky: modré alebo čierne pero. Pomocné výpočty môžete robiť na voľné miesto v tomto teste alebo na papier, ktorý dostanete. **Nemôžete používať** žiadne iné pomôcky (napr. kalkulačku, mobil, vlastný papier a pod.).

Za správnu odpoveď na jednu úlohu získate 1 **hodnotenie** ✓ (ak úloha obsahuje viacero otázok alebo odpoveď má viacero častí, tak hodnotenie ✓ získate iba vtedy, keď správne zodpoviete všetky tieto otázky, resp. časti), inak je úloha hodnotená –. Celkový počet získaných hodnotení ✓ sa prepočíta na body (1 hodnotenie ✓ = 2/3 bodu).

**Odpovede** píšete na vyznačené miesto perom. Ak nie je v zadaní úlohy uvedené inak, zapisujte číselné odpovede ako desatinné čísla (teda napr. 2031 alebo – 315,7).

Ak sa pri zapisovaní odpovede **pomýlite**, zreteľne prečiarknite chybnú odpoveď a novú odpoveď vpíšete čitateľne opäť na vyznačené miesto. Pri hodnotení sa bude prihliadať iba na **odpovede**, ktoré sú **jednoznačne čitateľné a napísané na mieste určenom na zapísanie odpovede k prislúchajúcej úlohe**.

Rekapitulácia hodnotenia:

	počet hodnotení ✓		počet hodnotení ✓
strana 2 (úlohy 1 – 8)		strana 5 (úlohy 19 – 24)	
strana 3 (úlohy 9 – 14)		strana 6 (úlohy 25 – 29)	
strana 4 (úlohy 15 – 18)		strana 7 (úloha 30)	
		celkový počet hodnotení ✓	
		celkový počet bodov	

Dátum: \_\_\_\_ . 6. 2012.

Test vyhodnotil/a (podpis) \_\_\_\_\_

1	Číslo $(\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5})^8$ možno zapísať v tvare $5^a$ . Nájdite hodnotu $a$ .	
2	Vypočítajte $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{4}}$ Výsledok zapíšte ako zlomok v základnom tvare.	<input type="text"/> <hr/> <input type="text"/>
3	Nájdite číslo $a$ , pre ktoré platí $\log \frac{6}{5} - \log \frac{5}{2} + 2 \cdot \log 5 = \log a.$ <i>Poznámka: Symbol <math>\log</math> označuje logaritmus pri základe 10.</i>	
4	Doplníte chýbajúci zápis výroku v nasledujúcom texte (chýbajúci text je označený <b>DOPLŇTE</b> ). V zápise výroku nepoužívajte zátvorky ani znak implikácie. <i>Text:</i> Ak chceme dokázať výrok $X \Rightarrow (Y \vee Z)$ sporom, musíme dokázať, že výrok <b>DOPLŇTE</b> je nepravdivý.	
5	Koľko rôznych 6-písmenkových skratiek možno vytvoriť rôznym usporiadaním poradia písmen v skratke FMFIUK ?	
6	Ktoré z čísel 4 až 12 je základ pozičnej číselnej sústavy, v ktorej je správne zapísaný nasledujúci výpočet? $35 + 46 = 114$	
7	Kladné číslo $x$ je o 10 % väčšie ako číslo $y$ . O koľko % je $y$ menšie ako $x$ ? Výsledok uveďte zaokrúhlený na 1 desatinné miesto.	číslo $y$ je o <input type="text"/> % menšie ako číslo $x$
8	Určte hodnotu výrazu $x^2 - y^2 + z^2 - 2$ , ak viete, že $(x - y)^2 + z^2 = 0$ .	

**9** Určte počet prvkov množín  $M$ ,  $F$  a  $I$ , ak viete, že  $|M - F| = 9$ ,  $|F - I| = 6$ ,  
 $|I - M| = 3$ ,  $|M \cap F| = 3$ ,  $|F \cap I| = 4$ ,  $|I \cap M| = 2$ ,  $|M \cap F \cap I| = 1$ .

*Poznámka: Symbol  $|A|$  označuje počet prvkov množiny  $A$ , symbol  $A - B$  označuje množinový rozdiel množín  $A$  a  $B$ .*

$|M| = \square$ ,  $|F| = \square$ ,  $|I| = \square$

**10** Nájdite všetky reálne čísla  $x$ , ktoré sú riešením nerovnice

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-5} > \left(\frac{25}{4}\right)^x.$$

**11** Na obrázku sú grafy funkcií  $g: y = ax^2 + b$  a  $f: y = cx + d$ .

Nájdite hodnoty  $a, b, c, d$ .

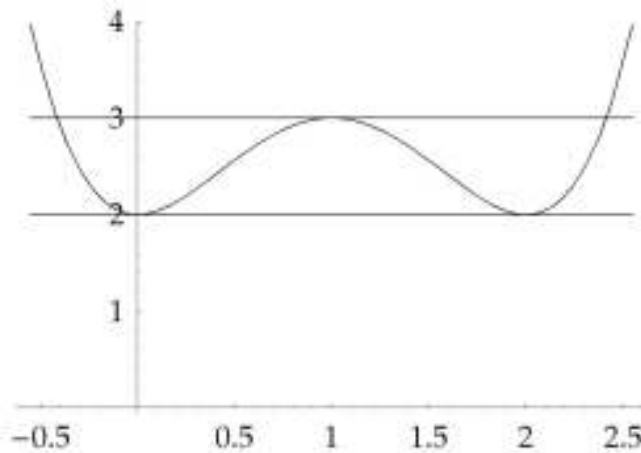
$a = \square$ ,  $b = \square$ ,  $c = \square$ ,  $d = \square$

**12** Pre lineárnu funkciu  $f(x) = ax + b$  platí  $f(54) = 12$ ,  $f(57) = 17$ .  
 Nájdite  $m$ , pre ktoré platí  $f(m) = 2012$ .

**13** Štvorcú sme opísali kružnicu.  $BC$  je strana štvorca,  $AB$  jeho uhlopriečka. Zvolíme bod  $P$  na tom oblúku  $AB$  kružnice, na ktorom neleží bod  $C$ . Určte veľkosť uhla  $CPA$  v stupňoch.

**14** Rovnica  $f(x) = 0$  má iba korene  $x = 9$ ,  $x = 0$ ,  $x = -4$ . Nájdite všetky korene rovnice  $f(x^2) = 0$ .

- 15** Na obrázku je graf funkcie  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ . Priamka  $y = 3$  sa tohto grafu dotýka zhora v bode  $[1,3]$ , priamka  $y = 2$  sa ho dotýka zdola v bodoch  $[0,2]$  a  $[2,2]$ .



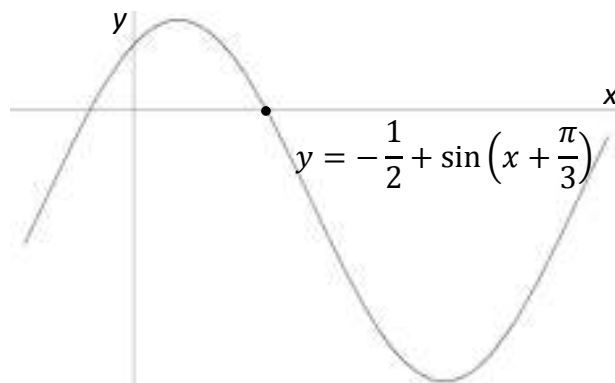
Nájdite množinu  $P$  všetkých hodnôt  $p$ , pre ktoré má rovnica  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + p = 0$  štyri rôzne reálne korene.

$P =$

- 16** Na obrázku je časť grafu funkcie

$$y = -\frac{1}{2} + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Jeden z jej priesečníkov s osou  $x$  sme zvýraznili. Vypočítajte  $x$ -ovú súradnicu tohto zvýrazneného priesečníka.



Výsledok uveďte v tvare  $\pi \cdot a$ , kde  $a$  je zlomok v základnom tvare.

$$x = \pi \cdot \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$$

- 17** Koľkými rôznymi spôsobmi sa dajú v čísle  $7\blacktriangle 80612\blacksquare\heartsuit$  nahradiť znaky  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$ ,  $\heartsuit$  ciframi tak, aby získané číslo bolo deliteľné súčasne 4-mi, 5-mi aj 9-mi?

- 18** Veličiny  $x$  a  $y$  sú priamo úmerné,  $y$  a  $z$  sú nepriamo úmerné. Hodnote  $y = 2$  zodpovedajú hodnoty  $x = 3$  a  $z = 5$ . Zapište  $z$  ako funkciu premennej  $x$ .

$z =$

**19** Pre uhol  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  vypočítajte hodnotu  $\cos \alpha$ , ak viete, že  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$ .  
Výsledok uveďte ako zlomok v základnom tvare.

**20** Obrazom kružnice  $k: x^2 - 4x + y^2 + 2y = 11$  v posunutí o vektor  $(-4, 3)$  je kružnica  $m$ . Napíšte rovnicu kružnice  $m$  v stredovom tvare.

$m:$

**21** Vypočítajte dĺžku ťažnice na stranu  $a$  v trojuholníku  $ABC$ , kde  $A[2, 3]$ ,  $B[-2, 1]$ ,  $C[-4, -5]$ .  
Ako odpoveď zapíšte druhú mocninu vypočítanej dĺžky.

**22** Vypočítajte objem  $V$  telesa, ktoré vznikne rotáciou pravouhlého lichobežníka na obrázku okolo jeho dlhšej základne. Výsledok zapíšte v tvare násobku čísla  $\pi$ .

$V = \pi \cdot$

**23** V klobúku je 5 lístkov označených číslami 1, 2, 3, 4 a 5. Lístky z klobúka postupne vyťahujeme a nevraciamy späť. Aká je pravdepodobnosť, že medzi prvými tromi vytiahnutými lístkami bude lístok s číslom 1, ale nie ako prvý v poradí?  
Odpoveď zapíšte ako desatinné číslo z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**24** S presnosťou na 2 desatinné miesta vypočítajte súčet

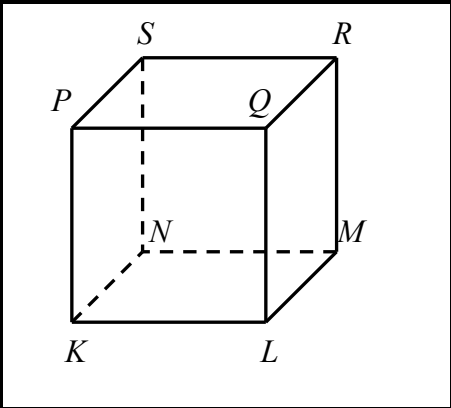
$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{27}\right) + \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{81}\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{243}\right) + \dots + \left(\frac{24}{4} - \frac{1}{3^{24}}\right)$$

**25** Martinovi nejde matematika. Tento polrok z nej získal zatiaľ 10 známok. Medián týchto známok je 3,5. Martin si však uvedomil, že pri tomto mediáne má vlastne najlepší možný aritmetický priemer. Aký je aritmetický priemer desiatich Martinových známok z matematiky?

**26** V štatistickom súbore  
 $3, 7, x, 7, 8, 7$   
 určte číslo  $x$  tak, aby v tomto súbore bol modus o jednotku väčší než aritmetický priemer.

**27** Množina všetkých bodov ležiacich na povrchu alebo vnútri kocky  $KLMNPQRS$ , ktoré sú rovnako vzdialené od vrcholov  $K, L$  a  $R$ , je úsečka  $XY$ .

a) Načrtnite túto úsečku čo najpresnejšie do obrázku vedľa.



b) Opíšte polohu krajných bodov  $X, Y$  tejto úsečky.

bod  $X$  je .....

bod  $Y$  je .....

**28** Ak sa číslo  $x$  málo líši od 0, tak platí  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ . Použite túto informáciu na odhad hodnoty  $a = \frac{1}{2,0004}$ .

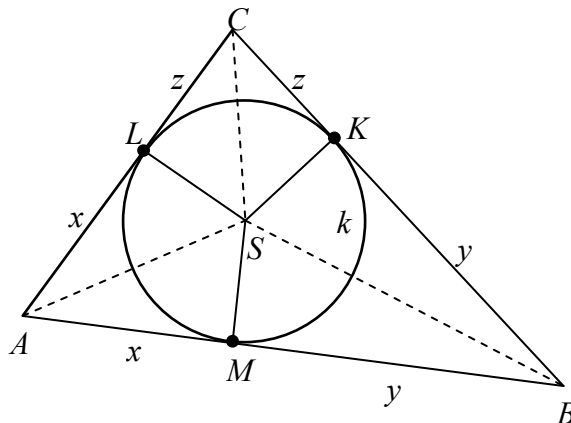
$a \approx$

**29** V obdĺžniku so stranami dĺžok 3 a 4 vyznačíme jednu uhlopriečku. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod vnútri obdĺžnika je bližšie k tejto uhlopriečke, ako k ľubovoľnej strane obdĺžnika?

Odpoveď napíšte ako zlomok v základnom tvare (nie ako počet percent).

30

Kružnica  $k$  so stredom  $S$  vpísaná do trojuholníka  $ABC$  sa jeho strán dotýka v bodoch  $M, K$  a  $L$ , pozri obrázok. Vieme, že potom  $|AL| = |AM|$  (túto dĺžku sme na obrázku označili  $x$ ),  $|BM| = |BK|$  (túto dĺžku sme označili  $y$ ) a  $|CL| = |CK|$  (túto dĺžku sme označili  $z$ ).



V nasledujúcom texte doplňte chýbajúce časti (sú označené **DOPLŇTE** ).

Ak obvod  $o = a + b + c$  trojuholníka  $ABC$  vyjadríme pomocou dĺžok  $x, y$  a  $z$ , dostaneme

$$o = \text{DOPLŇTE}$$

$$o =$$

Vďaka tejto rovnosti dokážeme každú z dĺžok  $x, y$  a  $z$  vyjadriť len pomocou dĺžok strán  $a, b, c$  trojuholníka  $ABC$ . Napríklad dĺžku  $x$  možno vyjadriť pomocou  $a, b, c$  nasledovne

$$x = \text{DOPLŇTE}$$

$$x =$$

**KONIEC TESTU**

*Miesto na poznámky a pomocné výpočty*