1. Včera sa dvom pekárom podarilo zaplniť námestie vo francúzskom mestečku reťazou 400 pízz, ktorá bola dlhá 160 metrov. Obaja piekli pizze s priemerom 33 cm dvanásť hodín a v súčasnosti dúfajú, že sa svojim činom dostanú do Guinessovej knihy rekordov. Po ukončení pokusu o rekord boli pizze, ktoré boli obložené paradajkami, šunkou, syrom a paprikou, rozdané zadarmo divákom. *(Westfälische Nachrichten, 2.05.2005)*

a) **Bola reťaz pízz naozaj dlhá 160m? Zdôvodnite!**
b) **Aká bola plocha pízz, ktoré mohli byť po pokuse o rekord zjedené?**
c) **Ak by sa pekári snažili len o rekord v dĺžke reťazca, mohli by zvoliť iný rozmer pízz, aby ušetrili cesto a prílohy? Zdôvodnite!** **(2 body)**

Riešenie:

a) ■ $400 \cdot 33\text{ cm} = 132\text{ m}$
Pekári vytvorili reťaz pízz dlhú 132 m.
■ $160\text{ m} : 33\text{ cm} = 485$
Alebo použili 485 a nie 400 pízz. **0,5 boda**
■ $160\text{ m} : 400 = 40\text{ cm}$
Ak použili 400 pízz, tak jedna musela mať priemer 40 cm a nie v článku spomínaných 33 cm, resp. medzi pizzami bola 7 cm medzera.

b) $S = 400 \cdot \pi \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 \text{ cm}^2 \approx 342\,119\text{ cm}^2 \approx 34{,}2\text{ m}^2$ **0,5 boda**
Diváci mohli zjesť 34,2 m² pizze.

c) Ak máme 400 pízz s priemerom 40 cm, ktoré sa navzájom dotýkajú, dĺžka reťaze je 160 m a plocha pízz je:
$S = 400 \cdot \pi \cdot 20^2\text{ cm}^2 \approx 50{,}27\text{ m}^2$
Ak by sme mali 800 pízz s priemerom 20 cm, tak pri rovnakej dĺžke reťaze bude ich plocha:
$S = 800 \cdot \pi \cdot 10^2\text{ cm}^2 \approx 25{,}14\text{ m}^2$; takže bude približne polovičná, ako predošlá plocha, čiže minieme menej cesta i príloh.
Na základe predošlého môžeme predpokladať, že čím menší bude priemer pizze, tým bude menšia plocha všetkých pízz potrebných na vytvorenie 160 m dlhej reťaze.
0,5 boda

Overenie predpokladu:
n pízz s priemerom $\frac{160}{n}$ m a polomerom $\frac{160}{2 \cdot n}\text{ m} = \frac{80}{n}$ m má plochu:
$S = n \cdot \pi \cdot \left(\frac{80}{n}\right)^2 = \pi \cdot \frac{6400}{n}$
$n = 400 \Rightarrow S \approx 50{,}27\text{ m}^2$
$n = 800 \Rightarrow S \approx 25{,}13\text{ m}^2$ **0,5 boda**

Ako vidíme, priemer jednej pizze a celková plocha pízz, potrebných na vytvorenie 160 m dlhej reťaze, sú v **nepriamej úmere**. Ak by pekári upiekli menšie pizze, ušetrili by na ceste i na prílohách.

2. Základne rovnoramenného lichobežníka a jeho výška tvoria v tomto poradí 3 po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Určte veľkosť vnútorných uhlov tohto lichobežníka, ak jeho obsah je 54 a súčin základní je 18.
(3 body)

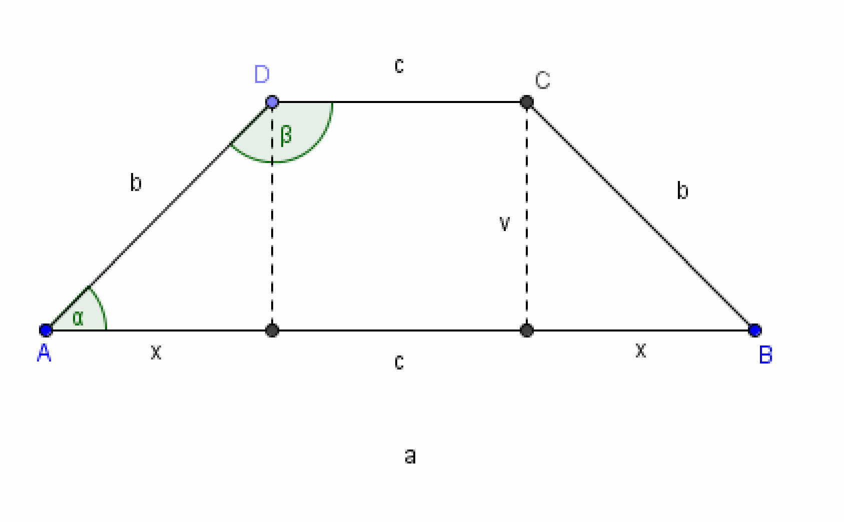
Riešenie:

Keďže základne a výška lichobežníka tvoria 3 po sebe idúce členy GP, platí:

$a = a$

$c = a.q$

$v = a.q^2$



Zo zadania poznáme súčin základní, preto:

$a.c = 18 \Rightarrow a.aq = 18$

$a^2 = \frac{18}{q}$ **1 bod**

Teraz využijeme to, že poznáme obsah lichobežníka, teda:

$$S = \frac{(a+c).v}{2}$$

$$54 = \frac{(a+aq).aq^2}{2}$$

$$108 = a^2q^2 + a^2q^3$$

$$108 = \frac{18}{q}.q^2 + \frac{18}{q}.q^3$$

$$108 = 18q + 18q^2 \ / :18$$

$$6 = q + q^2$$

$$0 = (q+3)(q-2) \Rightarrow q_1 = -3, q_2 = 2$$ **1 bod**

Pre q_1 rovné -3 dostávame $a^2 = -6$, čo nemôže nastať. Pre q_2 rovné 2 dostávame $a^2 = 9$, teda: *a = 3, c = 6, v = 12*. Podľa nášho obrázka (kde predpokladáme, že $c < a$) potom vymeníme poradie základní: *c = 3, a = 6, v = 12*, následne $x = \frac{a-c}{2} = 1{,}5$.

Teraz už môžeme určiť veľkosť vnútorných uhlov:

$$tg\alpha = \frac{v}{x} = \frac{12}{1{,}5} = 8 \Rightarrow \alpha = arctg8, \quad \beta = 180° - (arctg8).$$ **1 bod**

3. Riešte v *R*: $\sin x(2\sin x - 1) = \sqrt{3}(\sin 2x - \cos x)$ **(3 body)**

Riešenie:

$$\sin x(2\sin x - 1) = \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\cos x$$

$$\sin x(2\sin x - 1) = \sqrt{3}\cos x(2\sin x - 1)$$ **1 bod**

$$(2\sin x - 1)\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1 = 0) \vee (\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{t}\,gx = \sqrt{3} \Leftrightarrow K = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in Z\right\}$$

1 bod **1 bod**

4. Nech $A[3,-4,4]$**. Na priamke** ***p*****:** $x=1-t;\ y=2+t;\ z=3-2t\ (t\in\mathbb{R})$ **nájdite taký bod *X*, pre ktorý**

a) $|AX|=5$

b) je jeho vzdialenosť od bodu A minimálna. **(3 body)**

Riešenie:

a) bod X má patriť priamke p, pre jeho súradnice teda platí: $X[1-t,2+t,3-2t]$ a pre vzdialenosť bodov A a X dostávame:

$|AX|=5$

$(1-t-3)^2+(2+t+4)^2+(3-2t-4)^2=5^2$ **1,5 boda**

$3t^2+10t+8=0$

$t_1=-2,\ t_2=-\frac{4}{3}$, potom $X_1[3,0,7]$, $X_2\left[\frac{7}{3},\frac{2}{3},\frac{17}{3}\right]$.

b) bod X má patriť priamke p, pre jeho súradnice teda platí: $X[1-t,2+t,3-2t]$. Aby vzdialenosť bodu A od bodu $X\in p$ bola minimálna, bod X bude ležať na kolmici z bodu A na priamku p. Pre výpočet môžeme využiť: $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{s_p}=0$, kde $\overrightarrow{s_p}$ je smerový vektor priamky p. Po úprave dostávame:

$(3-1+t,-4-2-t,4-3+2t)\cdot(-1,1,-2)=0$ **1,5 boda**

$-6t-10=0$

$t=-\frac{5}{3}$, potom $X\left[\frac{8}{3},\frac{1}{3},\frac{19}{3}\right]$.

5. V lietadle je *n* radov sedadiel, v každom rade sú 3 sedadlá. Do lietadla nastupuje *n* zloborov, *n* princezien a *n* oslíkov. Koľkými spôsobmi sa môžu rozsadiť, ak v každom rade má z bezpečnostných dôvodov sedieť 1 zlobor, 1 princezná a 1 oslík? (Zlobri, princezné i oslíci sú navzájom rozlíšiteľní, dve rozsadenia sú rôzne, aj keď sa líšia iba presadením bytostí v rade.) **(3 body)**

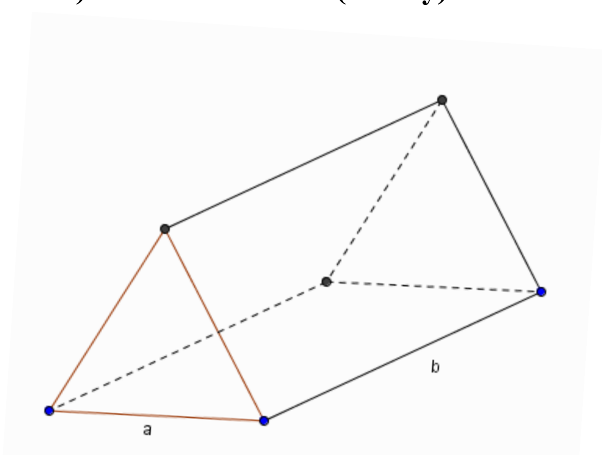
Riešenie:

- Zlobri sa do jednotlivých radov môžu usporiadať *n!* spôsobmi, to **1,25 boda** isté platí pre princezné a oslíkov, spolu teda máme $(n!)^3$ možností usadenia do radov.
- V rámci jedného radu sa bytosti môžu ešte presadiť, na to majú 3! spôsobov, **1,25 boda** berúc do úvahy všetky rady máme $(3!)^n$ spôsobov.
- Všetkých možných rozsadení je teda: $(n!)^3.\ (3!)^n$ **0,5 boda**

6. K stanovej súprave patrí 9 tyčí, (6 z nich je dĺžky *a* m, 3 sú dĺžky *b* m), celtovina s plochou $8m^2$ a gumená podlaha. Určte rozmery tyčí tak, aby stan ohraničil čo najväčší priestor. (Stan pokladajte za pravidelný trojboký hranol.) **(3 body)**

Riešenie:

Potrebujeme maximalizovať objem, pri danom povrchu (bez 1 podstavy).



$8 = S = 2S_{\Delta} + 2S = 2.\frac{a.v_a}{2} + 2ab = a.v_a + 2ab$, pričom $\sin 60° = \frac{v_a}{a} \Rightarrow v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Odtiaľ dostávame: $8 = a.\frac{\sqrt{3}}{2}a + 2ab \Rightarrow b = \frac{16 - a^2\sqrt{3}}{4a}$ **1 bod**

Pre objem stanu teda platí: $V = S_p.v = \frac{a.v_a}{2}.b = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}.\frac{16 - a^2\sqrt{3}}{4a} = \frac{16a^2\sqrt{3} - 3a^4}{16a}$. **0,5 boda**

Objem chceme maximalizovať, teda pomocou derivácií nájdeme extrém.

$$V' = \frac{(16a^2\sqrt{3} - 3a^4)'.16a - (16a^2\sqrt{3} - 3a^4).(16a)'}{(16a)^2} = \frac{(32\sqrt{3}a - 12a^3).16a - (16a^2\sqrt{3} - 3a^4).16}{(16a)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (32\sqrt{3}a - 12a^3).16a - (16a^2\sqrt{3} - 3a^4).16 = 0$$

$$512\sqrt{3}a^2 - 192a^4 - 256\sqrt{3}a^2 + 48a^4 = 0$$

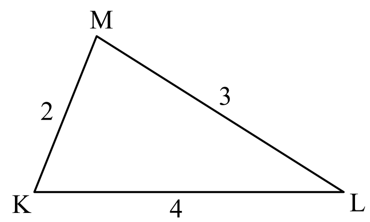
$$256\sqrt{3}a^2 - 144a^4 = 0 / :16$$

$$16\sqrt{3}a^2 - 9a^4 = 0$$

$$a^2(16\sqrt{3} - 9a^2) = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee [(a = \frac{4.\sqrt[4]{3}}{3}) \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}]$$ **1,5 boda**

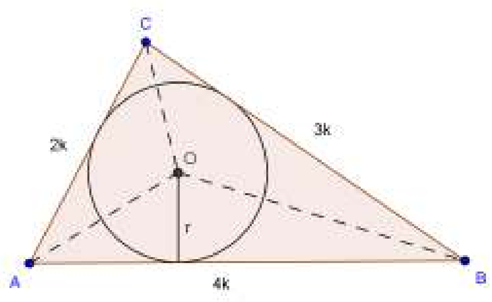
Rozmery tyčí sú $a = \frac{4.\sqrt[4]{3}}{3}$, $b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

7. Trojuholník *ABC* je podobný s trojuholníkom *KLM* znázorneným na obrázku. Zistite, v akom pomere sú obsahy trojuholníkov *ABO*, *BCO* a *CAO*, kde *O* je stred kružnice vpísanej trojuholníku *ABC*. (3 body)



Riešenie:

Keďže trojuholník *ABC* je podobný s trojuholníkom *KLM*, pre veľkosti jeho strán platí: $|AB| = 4k$, $|BC| = 3k$, $|AC| = 2k$, kde k je koeficient podobnosti trojuholníkov *KLM* a *ABC*. **1 bod**



Pre obsahy trojuholníkov *ABO*, *BCO* a *CAO* potom platí: $S_{ABO} = \frac{r \cdot 4k}{2}$, $S_{BOC} = \frac{r \cdot 3k}{2}$, $S_{AOC} = \frac{r \cdot 2k}{2}$, kde r je polomer kružnice vpísanej do trojuholníka *ABC* ($r = kr'$, kde r' je polomer kružnice vpísanej do trojuholníka *KLM*). Pre pomery obsahov daných trojuholníkov potom dostávame: **1 bod**

$$S_{ABO} : S_{BOC} : S_{AOC} = \frac{r \cdot 4k}{2} : \frac{r \cdot 3k}{2} : \frac{r \cdot 2k}{2} = 4 : 3 : 2.$$ **1 bod**