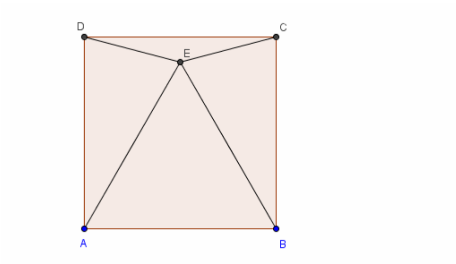
Riešenie - Verzia D

1. Daný je štvorec ABCD a bod E ležiaci v jeho vnútri. Zistite veľkosť uhla DEC, ak viete, že trojuholník ABE je rovnostranný. (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>



Trojuholník ABE je rovnostranný, teda $|\measuredangle ABE| = |\measuredangle BEA| = |\measuredangle EAB| = 60°$. Potom $|\measuredangle EBC| = 90° - 60° = 30°$.

Keďže trojuholník ABE je rovnostranný, potom $|EB| = |BC|$ a teda trojuholník EBC je rovnoramenný. **(1bod)**

Vieme teda dopočítať uhly

$$|\measuredangle BEC| = |\measuredangle BCE| = \frac{180° - 30°}{2} = 75° \quad \textbf{(1bod)}$$

(analogická úvaha pre trojuholník AED)

Veľkosť uhla DEC teda vypočítame: $|\measuredangle DEC| = 360° - 2 \cdot 75° - 60° = 150°$. **(1bod)**

2. Nájdite súčet koreňov rovnice $\sin^2 x + \cos^2 x + tg^2 x + cotg^2 x = 3$ na intervale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$. Výsledok uveďte v stupňoch. (<u>4 body</u>)

<u>Riešenie:</u>

$$\sin^2 x + \cos^2 x + tg^2 x + cotg^2 x = 3$$

$$1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 3 \quad \textbf{(1bod)}$$

$\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} + \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = 2$, zavedieme substitúciu $\sin^2 x = a$, $a \neq 1 \wedge a \neq 0$

$$\frac{a}{1-a} + \frac{1-a}{a} = 2$$

$$\frac{a \cdot a + (1-a)\cdot(1-a)}{a \cdot (1-a)} = 2$$

$$\frac{a^2 + 1 - 2a + a^2}{a \cdot (1-a)} - 2 = 0$$

$$\frac{2a^2 + 1 - 2a - 2a + 2a^2}{a \cdot (1-a)} = 0$$

(1bod)

$$\frac{4a^2 - 4a + 1}{a \cdot (1-a)} = 0 \quad \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.4 \cdot 1}}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow sinx = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1bod)

Rovnicu riešime na intervale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$, teda

$x \in \{-135°, -45°, 45°, 135°, 225°, 315°, 405°, 495°\}$.

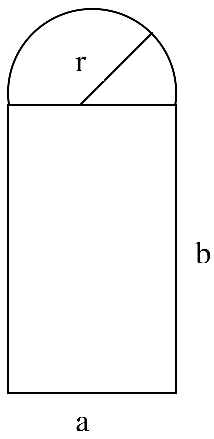
Súčet koreňov rovnice je $1440°$.

(1bod)

Riešenie - Verzia D

3. Okno v tvare rovinného obrazca, pozostávajúceho z obdĺžnika a z polkruhu nad jeho jednou stranou, má obvod L. Aké musia byť rozmery obdĺžnika, aby okno prepustilo čo najviac svetla? (<u>4 body</u>)

<u>Riešenie:</u>



$r = \frac{a}{2}$ a teda obvod okna môžeme vyjadriť ako: $L = a + 2b + \pi\,\frac{a}{2}$.

Odtiaľ $b = \dfrac{L - a - \pi\,\frac{a}{2}}{2}$

$b = \dfrac{2L - 2a - \pi a}{4}$. **(1bod)**

Potrebujeme maximalizovať plošný obsah okna, ktorý si vyjadríme:

$S = ab + \dfrac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = ab + \dfrac{\pi a^2}{8}$. Keď za b dosadíme $\dfrac{2L - 2a - \pi a}{4}$ dostaneme:

$$\left.\begin{aligned} S &= a\cdot\left(\frac{2L-2a-\pi a}{4}\right) + \frac{\pi a^2}{8} \\ S &= \frac{1}{2}aL - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi a^2 \\ S &= \frac{1}{2}aL - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}\pi a^2 \end{aligned}\right\} \textbf{(0,5 boda)}$$

Maximalizujeme obsah, ktorý je funkciou šírky okna a:

$S' = \frac{1}{2}L - a - \frac{1}{4}\pi a$, **(0,5 boda)** Následne zistíme, pre ktoré a vzniká extrém:

$$\frac{1}{2}L - a - \frac{1}{4}\pi a = 0$$
$$2L - 4a - \pi a = 0$$
$$\boldsymbol{a = \frac{2L}{4+\pi}}. \qquad \textbf{(0,5 boda)}$$

Ešte overíme, či ide o maximum:

$S'' = -1 - \frac{1}{4}\pi < 0 \Rightarrow$ pre $a = \dfrac{2L}{4+\pi}$ ide o maximum. **(0,5 boda)**

A dopočítame výšku okna b:

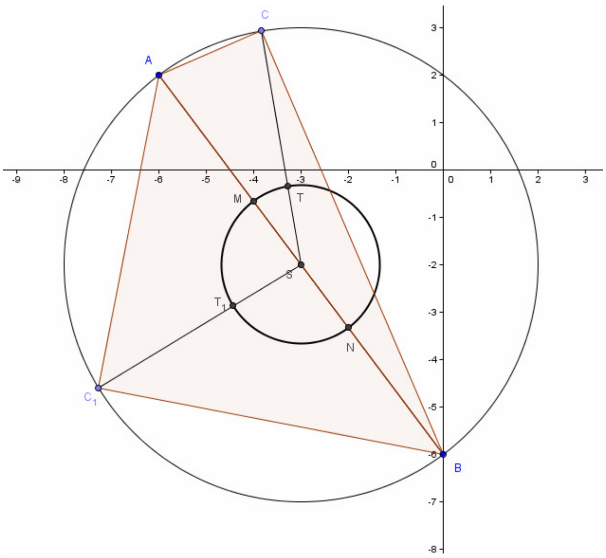
$$\boldsymbol{b} = \frac{2L-2a-\pi a}{4} = \frac{2L - 2\left(\frac{2L}{4+\pi}\right) - \pi\left(\frac{2L}{4+\pi}\right)}{4} = \frac{2L - 2\left(\frac{2L}{4+\pi}\right) - \pi\left(\frac{2L}{4+\pi}\right)}{4} =$$
$$= \frac{8L + 2\pi L - 4L - 2\pi L}{4\,(4+\pi)} = \boldsymbol{\frac{L}{(4+\pi)}}. \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Rozmery obdĺžnika sú $\boldsymbol{a = \frac{2L}{4+\pi}}$, $\boldsymbol{b = \frac{L}{4+\pi}}$.

Riešenie - Verzia D

4. Dané sú body $A[-6;2]$ a $B[0;-6]$. Nech bod C je vrcholom ľubovoľného pravouhlého trojuholníka s preponou AB. Vyjadrite analyticky množinu ťažísk týchto trojuholníkov. (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>



Body C spĺňajúce podmienku zo zadania sa nachádzajú na talesovej kružnici zostrojenej nad priemerom AB, okrem bodov A, B. **(0,5 boda)**
Ťažisko trojuholníka je priesečník jeho ťažníc a zároveň bod, ktorý delí každú ťažnicu trojuholníka v pomere 1:2, teda v každom z našich trojuholníkov ABC platí: $|ST| = \frac{1}{3} \cdot |SC|$, kde S je stred úsečky AB (a zároveň stred talesovej kružnice). Keďže veľkosť $|SC|$ je vlastne polomer talesovej kružnice a je teda pre každý z trojuholníkov rovnaká, ťažiská všetkých trojuholníkov ABC budú ležať na kružnici so stredom S a polomerom $\frac{1}{3} \cdot |SA|$, samozrejme okrem bodov M, N (obr.). **(1 bod)**

Pre analytické vyjadrenie určíme súradnice stredu S: $S[-3;-2]$ a polomer kružnice:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \right) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(0-(-6))^2 + (-6-2)^2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$ **(1 bod)**

Analytické vyjadrenie hľadanej množiny bodov je teda: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{9}$, okrem bodov M, N. **(0,5 boda)**

5. V dedine je 50 mačiek. Všetky ostatné domáce zvieratá sú psy. Väčšina z nich je normálna, ale 10 % psov si o sebe myslí, že sú mačky a 10 % mačiek si o sebe myslí, že sú psy. Posledný prieskum ukázal, že 20 % všetkých zvierat si o sebe myslí, že sú mačky. Keď v dedine uvidíte nejaké zviera, aká je pravdepodobnosť, že to je mačka? (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>

1. Máme 50 mačiek, z toho 10 % (= 5 mačiek) si myslí, že je pes; zvyšné mačky (= 45 mačiek) sú normálne, vedia že sú mačkami. **(0,5 boda)**

2. Máme x psov, z toho 10 % $(= 0{,}1 \cdot x)$ si myslí, že je mačka; ostatní psi $(= 0{,}9 \cdot x)$ sú normálni, a teda vedia, že sú psami. **(0,5 boda)**

Podľa prieskumu 20 % všetkých zvierat $(= 0{,}2 \cdot (50 + x))$ si myslí, že je mačkou. **(0,5 boda)**
Podľa bodov 1. a 2. vieme, že všetkých zvierat, ktoré si myslia, že sú mačkou je $= 45 + 0{,}1 \cdot x$ **(0,5 boda)**

Zostavíme teda rovnicu: $0,2 \cdot (50 + x) = 45 + 0,1 \cdot x$, z ktorej dostaneme $x = 350$, a teda psov je 350. **(0,5 boda)**

Pravdepodobnosť toho, že ak v dedine uvidíme zviera, tak to bude mačka potom vyrátame: $P = \frac{50}{400} = \frac{1}{8}$, kde priaznivé možnosti sú tie, ak zviera skutočne je mačkou (tzn. počet všetkých mačiek) a všetky možnosti predstavujú počet zvierat v dedine (tzn. 50+350).

Pravdepodobnosť javu je teda 1/8. **(0,5 boda)**

6. Na hranici telesa na obrázku sú zadané tri body. Zistite, či tieto 3 body ležia v jednej rovine, svoju odpoveď zdôvodnite! (3 body)

Riešenie:

Na to, aby sme zistili, či body ležia v jednej rovine môžeme napríklad urobiť rez telesa danými bodmi. **(1 bod)**
Za správnu konštrukciu rezu **2 body**.

ALEBO:
Dané tri body ležia v jednej rovine. **(1 bod)**
Zdôvodnenie: Každé tri nekolineárne body ležia v jednej rovine. (**2 body)**