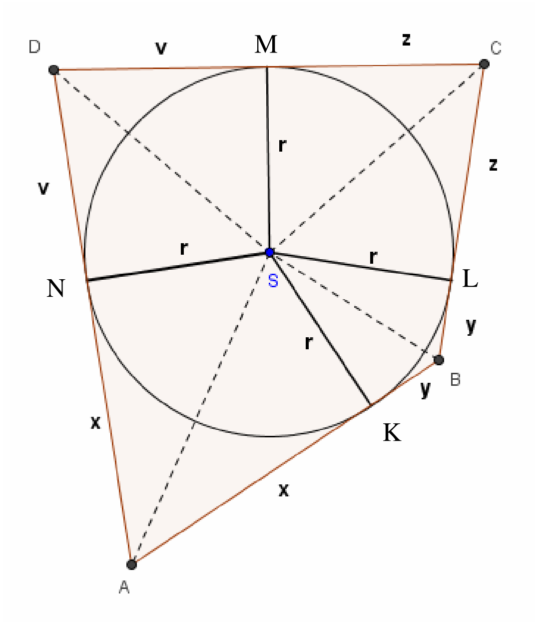
Riešenie - Verzia C

1. Obvod konvexného štvoruholníka je 20 cm a polomer jemu vpísanej kružnice je 5 cm. Zistite obsah tohto štvoruholníka. (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>



V konvexnom štvoruholníku $ABCD$, do ktorého sme vpísali kružnicu so stredom S platí: $\Delta AKS \cong \Delta ANS$ (sus: $|KS| = |NS|$, $|AS| = |AS| = r$, $|\angle ANS| = |\angle AKS| = 90°$), teda $|AK| = |AN| = x$. **(1bod)**

Analogicky dostaneme $|KB| = |BL| = y$, $|LC| = |CM| = z$, $|MD| = |DN| = v$.

Potom obvod štvoruholníka $ABCD$ vypočítame: $O = 2 \cdot (x + y + z + v)$.

Zo zadania vieme, že $O = 20$, teda $(x + y + z + v) = 10$.

Obsah štvoruholníka $ABCD$ vypočítame:

$$S = \frac{(x+y)\cdot r}{2} + \frac{(y+z)\cdot r}{2} + \frac{(z+v)\cdot r}{2} + \frac{(v+x)\cdot r}{2}$$

(1bod)

Po úprave a dosadení dostávame $S = \frac{r}{2} \cdot 2 \cdot (x + y + z + v) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 50cm^2$.

Obsah vpísanej kružnice je však $S = \pi r^2 = \pi.25 > 50cm^2$ a teda taký štvoruholník neexistuje!!! **(1 bod)**

2. V R riešte nerovnicu: $\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} + \frac{1}{3} \geq 0$ (**<u>4 body</u>**)

<u>Riešenie:</u>

Najprv si stanovíme podmienky: $x>0,\ x \neq 5, x \neq 1$

$$\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geq -\frac{1}{3}$$

$$\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geq \log_{x^3} \frac{1}{x} \ / \ \log_{x3}$$ **(1bod)**

0<x<1

$\frac{|x-5|}{6x} \leq \frac{1}{x}\ /.6x$

$|x-5| \leq 6$

$x \in \langle -1, 11 \rangle \cap (0, 1)$ **(1bod)**

$x \in (0, 1)$

x>1

$\frac{|x-5|}{6x} \geq \frac{1}{x}\ /.6x$

$|x-5| \geq 6$

$x \in \left[(-\infty, -1\rangle \cup \langle 11, \infty)\right] \cap (1, \infty)$ **(1bod)**

$x \in \langle 11, \infty)$

Riešením nerovnice teda je $x \in (0, 1) \cup \langle 11, \infty)$. **(1bod)**

Riešenie - Verzia C

3. Súčet prvých dvoch členov klesajúcej geometrickej postupnosti je $\frac{5}{4}$ a súčet z nej utvoreného nekonečného geometrického radu je $\frac{9}{4}$. Napíšte prvé tri členy tejto geometrickej postupnosti. (<u>4 body</u>)

<u>Riešenie:</u>

$$a_1 + a_2 = \frac{5}{4}$$

$$a_1 + a_1 \cdot q = \frac{5}{4}$$

$$a_1 \cdot (1+q) = \frac{5}{4}$$

$$q = \left(\frac{5}{4\,a_1}\right) - 1 \quad \textbf{(0,5 boda)}$$

$$\frac{9}{4} = s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$9 \cdot (1-q) = 4a_1$$

$$9 - 9q = 4a_1$$

$$q = \frac{9 - 4\,a_1}{9} \quad \textbf{(0,5 boda)}$$

$$q = q$$

$$\left(\frac{5}{4\,a_1}\right) - 1 = \frac{9 - 4\,a_1}{9} \quad /.9,\ .4a_1$$

$$45 - 36a_1 = 36a_1 - 16a_1^2$$

$$16a_1^2 - 72a_1 + 45 = 0$$

$$D = 72^2 - 4.16 \cdot 45 = 5184 - 2880 = 2304 = 16.144$$

$$a_1 = \frac{72 \pm \sqrt{16.144}}{32} = \frac{72 \pm 48}{32} = \frac{9 \pm 6}{4} \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = \frac{15}{4}} \vee \boldsymbol{a_1 = \frac{3}{4}} \quad \textbf{(1bod)}$$

Ak $\boldsymbol{a_1 = \frac{15}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q} = \left(\frac{5}{4 \cdot \left(\frac{15}{4}\right)}\right) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

Keďže q je záporné, postupnosť bude oscilujúca, čo nevyhovuje zadaniu!

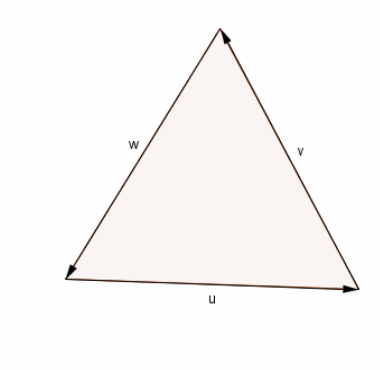
Ak $\boldsymbol{a_1 = \frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q} = \left(\frac{5}{4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)}\right) - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$ **(2 body)**

Prvé tri členy tejto klesajúcej postupnosti sú: $\boldsymbol{a_1 = \frac{3}{4}, a_1 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{3}}$.

Riešenie - Verzia C

4. Sú dané vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ nasledujúcich vlastností : $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ a $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=1$, $|\vec{w}|=1$. Vypočítajte $\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{w}+\vec{w}.\vec{u}$. (3 body)

Riešenie:



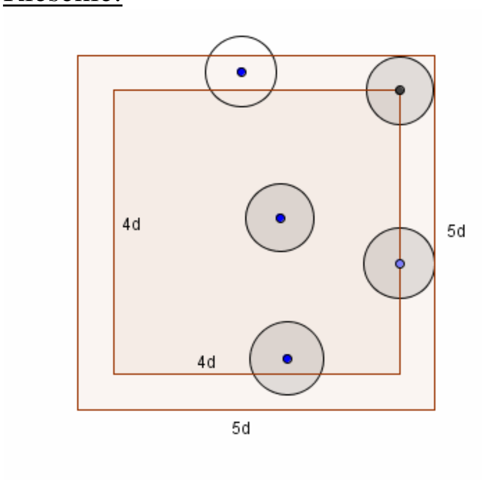
Súčet vektorov $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ je nulový vektor, všetky tri vektory majú jednotkovú veľkosť a teda ich vieme umiestniť do rovnostranného trojuholníka (obr.). **(1bod)**
Potom jednotlivé skalárne súčiny vektorov vyjadríme pomocou ich veľkostí a uhla medzi nimi (**uhol je 120 stupňov!!!**):

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}&=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=1\cdot1\cdot\cos120°=-\frac{1}{2}\\ \vec{v}.\vec{w}&=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})=1\cdot1\cdot\cos120°=-\frac{1}{2}\\ \vec{w}.\vec{u}&=|\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\vec{w},\vec{u})=1\cdot1\cdot\cos120°=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(1bod)}$$

Teda $\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{w}+\vec{w}.\vec{u}=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ **(1bod)**

5. Mincu hádžeme na podlahu zo štvorcových kachličiek (hrana kachličky je päťkrát dlhšia ako priemer mince). Aká je pravdepodobnosť, že minca padne celá do vnútra niektorého štvorca ? (3 body)

Riešenie:



Presnú polohu mince s priemerom *d* vzhľadom na štvorcovú dlaždicu so stranou dĺžky *5d* určuje poloha jej stredu.
Priaznivé možnosti (minca leží celá vo vnútri nejakej dlaždice) sú dané polohou všetkých možných pozícii stredov mincí takých, aby minca padla celá do vnútra štvorca. Tieto možnosti predstavuje štvorec so stranou dĺžky *4d* (obr.). **(1bod)**
Všetky možnosti predstavujú všetky možné pozície stredov mincí vzhľadom na jednu dlaždicu (štvorec), teda stredy môžu byť umiestnené vo štvorci so stranou *5d*. **(1bod)**
Pravdepodobnosť, že minca padne celá do vnútra niektorého štvorca, môžeme vyjadriť pomocou obsahou týchto dvoch štvorcov, teda $P=\frac{(4d)^2}{(5d)^2}=\frac{16}{25}$. **(1bod)**

Riešenie - Verzia C

6. Na hranici telesa na obrázku sú zadané tri body. Zistite, či tieto 3 body ležia v jednej rovine, svoju odpoveď zdôvodnite! (3 body)

Riešenie:

Na to, aby sme zistili, či body ležia v jednej rovine môžeme napríklad urobiť rez telesa danými bodmi. **(1 bod)**
Za správnu konštrukciu rezu **2 body**.

ALEBO:
Dané tri body ležia v jednej rovine. **(1 bod)**
Zdôvodnenie: Každé tri nekolineárne body ležia v jednej rovine. (**2 body)**