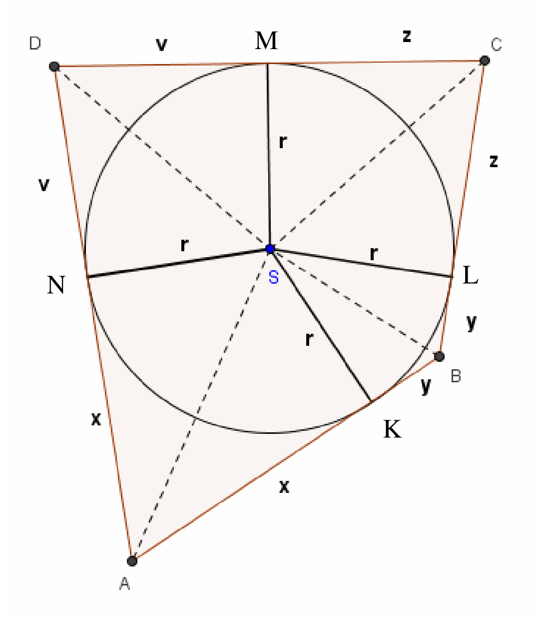
Riešenie - Verzia B

1. **Stred kružnice vpísanej do konvexného štvoruholníka má od jeho vrcholov vzdialenosti 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm. Vypočítajte obvod tohto štvoruholníka, ak viete, že polomer vpísanej kružnice je 3 cm. (3 body)**

Riešenie:



Nech $|AS| = 5cm$, $|BS| = 6cm$, $|CS| = 7cm$, $|DS| = 8cm$.

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$, do ktorého sme vpísali kružnici so stredom S platí: $\Delta AKS \cong \Delta ANS$ (sus: $|KS| = |NS|$, $|AS| = |AS| = r$, $|\angle ANS| = |\angle AKS| = 90°$), teda $|AK| = |AN| = x$. **(1 bod)**

Analogicky dostaneme $|KB| = |BL| = y$, $|LC| = |CM| = z$, $|MD| = |DN| = v$.

Potom obvod štvoruholníka $ABCD$ vypočítame: $O = 2\cdot(x + y + z + v)$. **(0,5 boda)**

Veľkosť x vypočítame pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku AKS s preponou AS: $|AS|^2 = |AK|^2 + |KS|^2$, odkiaľ

$x^2 = |AK|^2 = |AS|^2 - |KS|^2 = 5^2 - r^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, teda x = 4. **(1 bod)**

Analogicky dopočítame veľkosti y, z a v: $y = \sqrt{27}$, $z = \sqrt{40}$ a $v = \sqrt{55}$.

Obvod štvoruholníka $ABCD$ je: $O = 2\cdot(x + y + z + v) = 2\cdot\left(4 + \sqrt{27} + \sqrt{40} + \sqrt{55}\right)$. **(0,5 boda)**

2. **Riešte v R:** $\log_x\left(x^3 - x^2 - 2x\right) < 3$ **(4 body)**

Riešenie:

Najprv si stanovíme **podmienky:** $x > 0$, $x \neq 1$, $\left(x^3 - x^2 - 2x\right) > 0$

$x\cdot\left(x^2 - x - 2\right) > 0 \quad \rightarrow \quad x\cdot(x-2)(x+1) > 0$

Prienikom je interval $\left(\mathbf{2}, \infty\right)$. **(1 bod)**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Teraz už môžeme riešiť nerovnicu, obe strany si upravíme na rovnaký základ:}\\ \log_x\left(x^3 - x^2 - 2x\right) < \log_x x^3 \;\; / \log_x \\ \text{Keďže nerovnicu riešime pre } x \in (2, \infty)\text{, neotáčame znamienko nerovnosti!}\end{array}\right\} \textbf{(1 bod)}$$

$x^3 - x^2 - 2x < x^3$

$x^2 + 2x > 0$

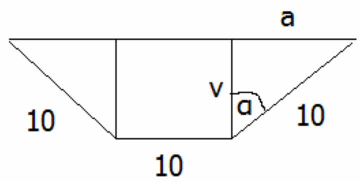
$x\,(x+2) > 0 \ldots\ldots x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ **(1 bod)**

Pri zohľadnení podmienok je teda riešením $\boldsymbol{x} \in \left(\mathbf{2}, \infty\right)$. **(1 bod)**

Riešenie - Verzia B

3. Muž chce vyrobiť žľab na dažďovú vodu z plechu, ktorý je široký 30 cm a to ohnutím jednej tretiny plechu na každej strane. Pod akým uhlom to má ohnúť, aby žľab zachytil čo najviac vody? (<u>4 body</u>)

<u>Riešenie:</u>
Ide v podstate o to, že potrebujeme maximalizovať objem žľabu, teda vlastne jeho podstavu/prierez. Plech môžeme ohnúť tak, že na priereze dostaneme postupne lichobežník, štvorec, trojuholník. Maximálny obsah má samozrejme lichobežník.



$$\left.\begin{aligned} &V = S_P.d \\ &S_P = 10.v + a.v \\ &a = 10.\sin\alpha \\ &v = 10.\cos\alpha \\ &S_P = 10.10.\cos\alpha + 10.\sin\alpha.10.\cos\alpha \\ &S_P = 100\cos\alpha + 100\sin\alpha.\cos\alpha \end{aligned}\right\} \textbf{1 bod}$$

Obsah prierezu je funkciou uhla α, (α< 90°), a ten maximalizujeme.

$S_p' = -100\sin\alpha + 100\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$ **(0,5 boda)**

$$\left.\begin{aligned} &-100\sin\alpha + 100\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0 \\ &\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &\left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha - \sin\alpha = 0 \\ &-2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = 0 \\ &\sin\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-2)\cdot 1}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4}, \\ &\sin\alpha = -1 \; alebo \; \sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ odtiaľ } \alpha = 270° \; alebo \; \alpha = 30°. \end{aligned}\right\} \textbf{1 bod}$$

Pre uhol $\alpha = 270°$ funkcia nadobúda minimum, teda nám vyhovuje riešenie $\alpha = 30°$.
Overíme maximum:

$S_p'' = -100\cos\alpha + 100\left(-4\sin\alpha\cos\alpha\right)$ **(0,5 boda)**

$S_p''(30°) = -100\cos 30° + 100\left(-4\sin 30°\cdot\cos 30°\right)$

$$S_p''(30°) = -100\frac{\sqrt{3}}{2} + 100\left(-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \Rightarrow \max \; pre \; \alpha = 30°.$$

Uhol, pod ktorým plech ohneme je teda doplnok do 90°, čo je **60°**. **(0,5 boda)**

Riešenie - Verzia B

4. Podľa lekárov má dospelý človek nadváhu, ak platí $\frac{\text{hmotnosť človeka v kg}}{(\text{výška človeka v metroch})^2} > 25$**.**

Viete, že Karol meria 176 cm a váži medzi 70 a 100 kg. Aká je pravdepodobnosť, že má Karol nadváhu? (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>

Hranicu nadváhy podľa BMI predstavuje hodnota 25. Pri výške 176 cm dosiahne túto hranicu Karol pri hmotnosti $m = 25 \cdot v^2$ (m je hmotnosť v kg, v je výška v metroch), teda $m = 25 \cdot 1{,}76^2 = 77{,}44 kg$. **(0,5 boda)**

Karolova váha je medzi 70 a 100 kg, pričom nadváhu bude mať pri hmotnosti väčšej ako 77,44 kg.

Priaznivých možností (možností, ktoré znamenajú pre Karola nadváhu) je teda $(100 - 77{,}44)$, **(1 bod)** pričom všetkých možností je $(100 - 70)$. **(1 bod)**

Pravdepodobnosť, že má Karol nadváhu potom vypočítame: $P = \frac{100 - 77{,}44}{100 - 70} = 0{,}752$.

(0,5 boda)

5. Dané sú pevné body $A[2, 1]$, $B[-2, -4]$. Určte rovnicu množiny bodov $M[x, y]$ takých, že $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$. Danú množinu načrtnite do súradnicovej sústavy. (<u>3 body</u>)

<u>Riešenie:</u>

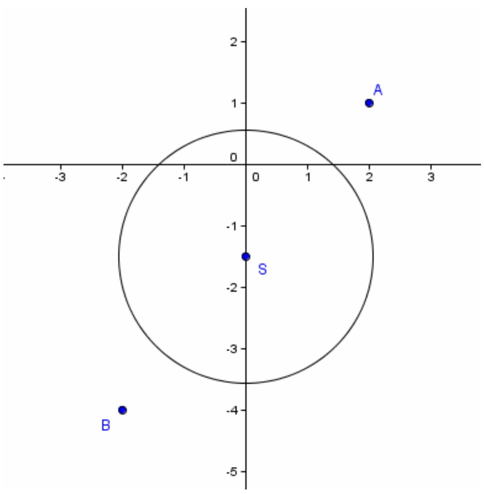
Hľadáme také body $M[x, y]$, ktoré spĺňajú podmienku $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$. Z analytického vyjadrenia skalárneho súčinu dostávame:

$$\left.\begin{aligned} &(x-2, y-1) \cdot (-2-x, -4-y) = 6 \\ &(x-2) \cdot (-2-x) + (y-1) \cdot (-4-y) = 6 \end{aligned}\right\} \textbf{1 bod}$$

$$x^2 + y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$(x+0)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Body $M[x, y]$ teda ležia na kružnici so stredom $S\left[0, -\frac{3}{2}\right]$ a polomerom $r = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2{,}06$.



(1 bod)

Riešenie - Verzia B

6. Na hranici telesa na obrázku sú zadané tri body. Zistite, či tieto 3 body ležia v jednej rovine, svoju odpoveď zdôvodnite! (3 body)

Riešenie:

Na to, aby sme zistili, či body ležia v jednej rovine môžeme napríklad urobiť rez telesa danými bodmi. **(1 bod)**
Za správnu konštrukciu rezu **2 body**.

ALEBO:
Dané tri body ležia v jednej rovine. **(1 bod)**
Zdôvodnenie: Každé tri nekolineárne body ležia v jednej rovine. (**2 body**)