Verzia C

1. Určite definičný obor funkcie *f* definovanej nasledovne:

$$f(x) = 3 - \sqrt{\frac{\log_4(8-2x)}{-3x^2-2}}$$

Riešenie:
Funkcia *f* je definovaná ak platia podmienky:

1. $8 - 2x > 0 \Rightarrow 8 > 2x \Rightarrow x < 4$ **<u>1 bod</u>**

2. $\dfrac{\log_4(8-2x)}{-3x^2-2} \geq 0$ $\Rightarrow$ pretože menovateľ zlomku je pre všetky $x \in \mathbf{R}$ záporný, celý tento zlomok bude nezáporný práve vtedy, keď platí:

$$\log_4(8-2x) \leq 0 \Leftrightarrow 8 - 2x \leq 1 \Rightarrow 7 \leq 2x \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}$$ **<u>1 bod</u>**

$$\underline{x < 4} \wedge \underline{x \geq \frac{7}{2}} \Rightarrow x \in (-\infty, 4) \wedge x \in \left\langle \frac{7}{2}, \infty \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{D}(f) = \left\langle \frac{7}{2}, 4 \right).$$ **<u>1 bod</u>**

2. **Existuje normovaná kvadratická rovnica, ktorá má v R dva rôzne korene rovnajúce sa koeficientu lineárneho a absolútneho člena?**

<u>Riešenie:</u>
Normovaná kvadratická rovnica má tvar $x^2 + bx + c = 0$ a nás zaujíma, či riešením sú čísla $x_1 = b,\ \ x_2 = c$. O koreňoch kvadratickej rovnice platí: **<u>1 bod</u>**

$\begin{matrix} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 . x_2 = c \end{matrix}$ po dosadení dostávame $\begin{matrix} b + c = -b \\ b . c = c \end{matrix}$. Rovnice možno upraviť na $\begin{matrix} c = -2b \\ c(b-1) = 0 \end{matrix}$.

Z druhej rovnice dostávame $c = 0 \vee b = 1$ a riešením teda $c = 0 \wedge b = 0$, alebo $b = 1 \wedge c = -2$. Ide o rovnice $x^2 = 0$ a $x^2 + x - 2 = 0$. Keďže rovnica má mať dve rôzne riešenia, prvá nepripadá do úvahy. Preto existuje jedna rovnica spĺňajúca podmienky úlohy a tou je $x^2 + x - 2 = 0$. **<u>2 body</u>**

3. **Koľko šesťpísmenkových slov možno vytvoriť z písmen slova TIKTAK, ak žiadne dve rovnaké písmenká nesmú nasledovať bezprostredne za sebou?**

<u>Riešenie:</u>

Označme S množinu všetkých šesťpísmenkových slov, ktoré možno vytvoriť z písmen slova TIKTAK. Táto množina bude obsahovať $\dfrac{6!}{2!.1!.2!.1!}$ = 180 slov. **<u>1 bod</u>**

Verzia C

Nech T bude množina všetkých slov, v ktorých za sebou bezprostredne nasledujú TT. Počet prvkov množiny T je počet permutácií piatich prvkov: TT, I, K, A, K (písmeno

1 bod

K sa opakuje) a to je $\frac{5!}{1!.1!.2!.1!}$ = 60. Obdobne pre množinu K (slová v ktorých za sebou bezprostredne nasledujú KK) dostaneme počet jej prvkov 60. Ešte zostáva určiť počet prvkov množiny $T \cap K$ (to sú tie slová, v ktorých je TT aj KK bezprostredne za sebou), čo je počet permutácií štyroch prvkov: TT, I, KK, A (žiadne písmeno sa neopakuje), teda je to 4!

Podľa princípu inklúzie a exklúzie potom dostávame:
Počet hľadaných slov je 180 – 2 x 60 + 24 = 84. **1 bod**

4. príklad

Riešte rovnicu v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x$

Riešenie:

Zavedieme substitúciu $\sin x = t,$ dostaneme rovnicu $2t^2 = \sqrt{2}t \Rightarrow 2t^2 - \sqrt{2}t = 0$

Danú rovnicu upravíme na tvar: $t \cdot \left(2t - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \;\; t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, po návrate k neznámej x dostaneme rovnicu, z ktorej po zohľadnení intervalu v ktorom riešime rovnicu dostaneme:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \{0, \pi, 2\pi\},\; \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ **1 bod**

Riešením rovnice je potom $P = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ **2 body**

5. príklad

Urči veľkosť ostrého uhla α, ak $\sin\alpha, tg\alpha, \frac{1}{\cos\alpha}$ tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti.

Riešenie:

$a_1 = \sin\alpha, a_2 = tg\alpha, a_3 = \frac{1}{\cos\alpha}$

podmienky
$\sin\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 + k\pi, k \in Z$
$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q .... \frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{tg\alpha} = \frac{tg\alpha}{\sin\alpha}$$ **1 bod**

1 bod

$$\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$ **2 body**

Verzia C

6. príklad

Určite súradnice vrcholov A,B trojuholníka ABC, ak je daný vrchol $C[4;-1]$ a rovnice priamok, na ktorých ležia výška v_b a ťažnica t_b na stranu b.

v_b: $2x-3y+12=0$ $\qquad$ t_b: $2x+3y=0$

Riešenie:

Súradnice bodu B riešením sústavy **<u>1 bod</u>**

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\} \quad x = -3,\ y = 2, \text{ teda } B[-3,2]$$

Bodom C priamka b kolmá na v_b : $3x + 2y + c = 0$

$$3.4 + 2.(-1) + c = 0$$

$$c = -10$$ **<u>1 bod</u>**

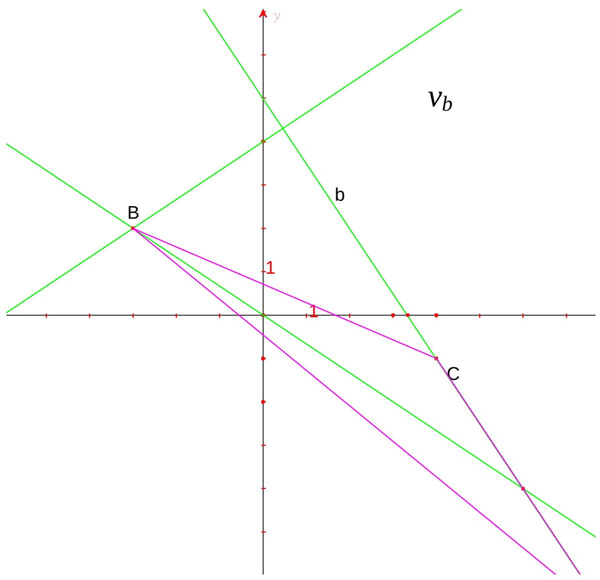
b: $3x + 2y - 10 = 0$

zrejme $b \cap t_b = S_{AC}$, takže riešime sústavu:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\} \quad x = 6, \quad y = -4$$ **<u>1 bod</u>**

Takže $S_{AC}[6;-4]$,

S_{AC} je stred úsečky AB, teda súradnice bodu A sú x = 8, y = -7 **<u>1 bod</u>**



S_{AC}

t_b