Verzia B

1. príklad:

Overte platnosť rovnosti:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^{-2}+\frac{1}{a-\sqrt{b}}=\frac{2a}{a^2-b}$$

Riešenie:

Musia platiť nasledujúce podmienky: $a^2-b\neq 0 \quad\Rightarrow\quad a^2\neq b$

$$a^2-b\geq 0 \quad\Rightarrow\quad a^2\geq b$$

$$a-\sqrt{a^2-b}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad a\geq\sqrt{a^2-b} \quad\Rightarrow\quad b\geq 0$$

t. j.: $\underline{a\geq 0,\quad b\geq 0,\quad a^2>b}$ **1 bod**

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^{-2}+\frac{1}{a-\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}+\frac{1}{a-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{2}{a+\sqrt{a^2-b}+2\sqrt{a^2-a^2+b}+a-\sqrt{a^2-b}}+\frac{1}{a-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{1}{a+\sqrt{b}}+\frac{1}{a-\sqrt{b}}=\frac{2a}{a^2-b}$$

1 bod

2. príklad

Koľko rôznych párnych prirodzených čísel môžeme vytvoriť z cifier 2, 3, 4 a 5, pričom každú z cifier môžeme použiť najviac raz?

Riešenie:

Postupne:

- jednociferné sú: 2, 4
- dvojciferné sú: 32, 42, 52, 24, 34, 54. Končiace dvojkou majú tri možnosti výberu cifry na mieste desiatok, končiace štvorkou takisto. **1 bod**
- trojciferné: končiace dvojkou majú tri možnosti výberu cifry na mieste desiatok, zo zvyšných dvoch cifier sa jedna použije na miesto stoviek, teda 6 končiacich dvojkou. Obdobne bude 6 končiacich štvorkou. **1 bod**
- štvorciferné: končiace dvojkou – zvyšné 3 cifry môžem usporiadať 6 spôsobmi. Končiace na štvorku obdobne.

Spolu je to: 2 + 6 + 12 + 12 = 32 čísel. **1 bod**

Verzia B

3. Príklad

Riešte v R rovnicu: $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.

Riešenie:

- substitúcia: $\sqrt[3]{24+x}=a \qquad \sqrt{12-x}=b$ **1 bod**
- dostaneme sústavu 3 rovníc s 3 neznámymi: a, b, x

$$\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$$
$$\sqrt[3]{24+x}=a$$
$$\sqrt{12-x}=b$$

- podmienky: $12-x\succ 0\Rightarrow x\prec 12$

1 bod

$$a+b=6$$
$$24+x=a^3$$
$$12-x=b^2$$

- z prvej rovnice vyjadríme b
- sčítame druhú rovnicu s treťou a vylúčime x

$$b=6-a$$
$$a^3+b^2=36$$
$$a^3+(6-a)^2=36$$
$$a^3+36-12a+a^2=36$$
$$a^3+a^2-12a=0$$
$$a(a^2+a-12)=0\Leftrightarrow a=0\vee a^2+a-12=0$$

1 bod

I. $a=0$

$$\sqrt[3]{24+x}=0$$
$$24+x=0$$
$$x=-24$$

II. $a^2+a-12=0$

$$(a+4)(a-3)=0$$
$$a=-4$$
$$a=3$$

$$\sqrt[3]{24+x}=-4$$
$$24+x=-64$$
$$x=-88$$

$$\sqrt[3]{24+x}=3$$
$$24+x=27$$
$$x=3$$

$$L'(-24)=\sqrt[3]{24-24}+\sqrt{12-(-24)}=0+\sqrt{36}=6=P(-24)$$
$$L'(-88)=\sqrt[3]{24-88}+\sqrt{12-(-88)}=\sqrt[3]{-64}+\sqrt{100}=-4+10=6=P(-88)$$

SK: $L'(3)=\sqrt[3]{24+3}+\sqrt{12-3}=\sqrt[3]{27}+\sqrt{9}=6=P(3)$

$$K=\{-88;-24;3\}$$

1 bod

4. príklad

Riešte v R: $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=2\sin 2x$

Riešenie:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=4\cdot\sin x\cdot\cos x$$ **1 bod**

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}-4\cdot\sin x\cdot\cos x=0 \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

Verzia B

$$\frac{1-4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}=0$$ **1 bod**

$$\Leftrightarrow \quad 1-4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x=0 \qquad \wedge \quad \sin x\neq 0 \quad \wedge \quad \cos x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-4\cdot\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\cos^2 x=0 \qquad \wedge \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \wedge \quad x\neq k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0 \qquad \wedge \quad x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \wedge \quad x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x-\frac{1}{2}=0 \qquad \wedge \quad x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \wedge \quad x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$ **2 body**

Príklad 5.

Riešte v R rovnicu: $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+...=2$

Riešenie:
- podmienka: $x\succ 0$
- použijeme vety o logaritmoch **1 bod**

$$\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+...=2$$

$$\log x+\log x^{1/2}+\log x^{1/4}+\log x^{1/8}+...=2$$

$$\log x+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{8}\log x+...=2$$

$$\log x.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)=2$$

$$s.\log x=2$$

1 bod

s je súčet nekonečného geometrického radu, kde $a_1=1, q=\frac{1}{2}$ a platí: $s=\frac{a_1}{1-q}$

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\Rightarrow$$

$$2.\log x=2$$

$$\log x=1 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{K=\{10\}}}$$ **1 bod**

$$x=10$$

Verzia B

Príklad 6:

Určte súradnice stredu a polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, pričom A[3, 6], B[-2, 1], C[0, -3].

<u>Riešenie:</u>

Dané body musia byť nekolineárne, aby mohli ležať na kružnici =>
(B-A) = (-5, -5), (C-A) = (-3, -9). $(B-A) \neq k.(C-A), k \in R$ **1 bod**

Teda body A, B, C ležia na kružnici a spĺňajú jej všeobecnú rovnicu:

$$k: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$A \in k: 3^2 + 6^2 + 3a + 6b + c = 0$$
$$B \in k: (-2)^2 + 1^2 - 2a + b + c = 0$$
$$C \in k: 0^2 + (-3)^2 - 3b + c = 0$$

1 bod

$$9 + 36 + 3a + 6b + c = 0$$
$$4 + 1 - 2a + b + c = 0$$
$$9 - 3b + c = 0$$

$$45 + 3a + 6b + c = 0$$
$$5 - 2a + b + c = 0$$
$$9 - 3b + c = 0 \quad => c = 3b - 9$$

$$45 + 3a + 6b + 3b - 9 = 0$$
$$5 - 2a + b + 3b - 9 = 0$$

$$36 + 3a + 9b = 0 / :3$$
$$-4 - 2a + 4b = 0 / :2$$

$$12 + a + 3b = 0$$
$$-2 - a + 2b = 0 \quad => a = 2b - 2$$

$$12 + 2b - 2 + 3b = 0$$
$$10 + 5b = 0$$
$$b = -2 \quad => \quad a = -6 \quad => \quad c = -15$$

$$k: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 - 15 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$S[3,1], \quad r = 5$$

2 body