Verzia A

1. **Riešte v R:** $(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+6)=-96$

   Riešenie:
   Po vhodnej úprave (roznásobenie prvej s treťou a druhej so štvrtou zátvorkou) dostaneme $(x^2+3x+2)\cdot(x^2+3x-18)=-96$, použijeme substitúciu $x^2+3x=a$, po úprave dostaneme rovnicu $a^2-16a+60=0$, riešením sú $a_1=6,\ \ a_2=10$. **<u>2 body</u>**

   Pre $a_1=6$ získavame rovnicu $x^2+3x-6=0$ ktorej riešením je $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

   <u>1 bod</u>

   Pre $a_2=10$ získavame rovnicu $x^2+3x-10=0$ ktorej riešením je $x_3=2$ a $x_4=-5$

Množina koreňov $K=\left\{-5,2,\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$ **<u>1 bod</u>**

2. ***V R riešte rovnicu:*** $\dfrac{2^{x+3}.3^{x+2}}{6^{7-x}.8^{x-1}}=\dfrac{9^{x-2}}{3}$

<u>Riešenie:</u>

$$\frac{2^{x+3}.3^{x+2}}{6^{7-x}.8^{x-1}}=\frac{9^{x-2}}{3}$$

$$\frac{2^{x+3}.3^{x+2}}{2^{7-x}.3^{7-x}.2^{3(x-1)}}=\frac{3^{2(x-2)}}{3}$$

$$\frac{2^{x+3}.3^{x+2}}{2^{7-x+3x-3}.3^{7-x}}=3^{2x-4-1}$$

<u>1 bod</u>

$$2^{x+3-(2x+4)}.3^{x+2-(7-x)}=3^{2x-5}$$

$$2^{-x-1}.3^{2x-5}=3^{2x-5}\ /:3^{2x-5}$$

<u>1 bod</u>

$$2^{-x-1}=1$$

$$2^{-x-1}=2^0$$

$$-x-1=0$$

$$x=-1$$

<u>2 body</u>

3. **Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 10 korunových mincí medzi troch bratov - Joža, Tomáša a Vlada tak, aby každý dostal aspoň jednu korunu?**

   <u>Riešenie:</u>
   Každý z bratov dostane najskôr po jednej korune. Teraz ešte treba ľubovoľne rozdeliť zvyšných 7 korún medzi troch bratov. To sa dá urobiť
   $\dbinom{3+7-1}{7}=\dbinom{9}{7}=\dfrac{9.8}{2}=36$ spôsobmi.
   Úloha sa dá riešiť aj vypísaním všetkých možností a spočítaním ich počtu. **<u>3 body</u>**

Verzia A

4. Na množine všetkých reálnych čísel R riešte rovnicu:

$$\frac{1-\sin^2(3x)}{2}+\frac{\cos(3x)}{4}=\frac{1}{4}.$$

Riešenie*:*
Pre výpočet rovnice sa použije vzorec

$$\sin^2(3x)+\cos^2(3x)=1 \rightarrow \cos^2(3x)=1-\sin^2(3x).$$ **<u>1 bod</u>**

Dosadením do pôvodnej rovnice a po jednoduchej úprave dostaneme nasledovný tvar:

$$2\cos^2(3x)+\cos(3x)-1=0$$

Položíme $\cos(3x) = y$ **<u>1 bod</u>**
a rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$2y^2+y-1=0.$$

Táto kvadratická rovnica má riešenia: $y_1=-1, y_2=\frac{1}{2}$,

teda $\cos(3x)=-1 \ \vee\ \cos(3x)=\frac{1}{2}$. **<u>1 bod</u>**

Platí: $\cos(3x)=-1 \Leftrightarrow 3x=\pi+2k\pi$, kde $k\in \mathbf{Z} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$, kde $k\in\mathbf{Z}$.

$$\cos(3x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{3}+2k\pi; k\in\mathbf{Z} \Rightarrow x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi; k\in\mathbf{Z} \\ 3x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi; k\in\mathbf{Z} \Rightarrow x=\frac{5}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi; k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

Množina všetkých riešení je:

$\boldsymbol{M}=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi, \frac{5}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi; k\in\mathbf{Z}\right\}$. **<u>1 bod</u>**

Príklad 5

Ak k číslam *x* = 6, *y* = 15 a *z* = 51 pripočítate to isté číslo, tak dostanete prvé tri členy geometrickej postupnosti. Vypočítajte súčet prvých piatich členov tejto postupnosti.

Riešenie:
Platí:

$$\begin{aligned} x+a&=a_1\\ y+a&=a_1q\\ z+a&=a_1q^2 \end{aligned}\quad.$$ **<u>1 bod</u>**

Verzia A

Dosadením za x, y a z dostaneme:

$$\begin{aligned} 6+a &= a_1 \\ 15+a &= a_1 q \\ 51+a &= a_1 q^2 \end{aligned} .$$

Po ďalších úpravách dostaneme:

$$a_1 = 6+a \wedge q = \frac{15+a}{6+a}$$ **1 bod**

$$\Downarrow$$

$$(15+a)^2 = (51+a)(6+a)$$

$$225+30a+a^2 = 306+57a+a^2$$

$$-27a = 81$$

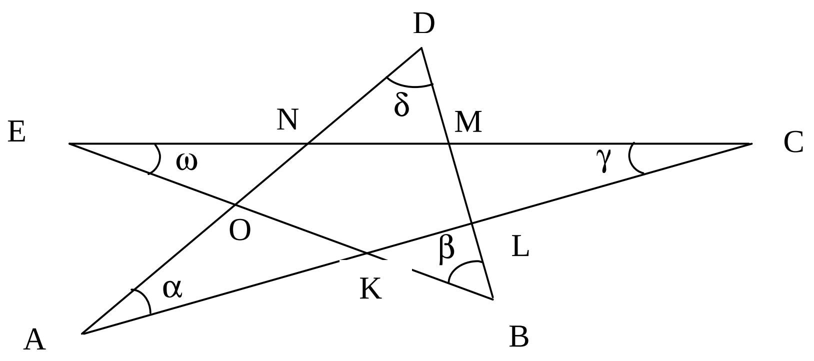
$$a = -3$$

Na základe toho dostaneme: $a_1 = 3$, $a_2 = 12$, $q = 4$.
Pre súčet prvých piatich členov postupnosti dostaneme:

$$s_5 = a_1.\frac{q^5-1}{q-1} = 3.\frac{1024-1}{3} = 1023.$$ **1 bod**

Príklad 6:

Zistite (presne) súčet uhlov α, β, γ, δ, a ω znázornených na obrázku.



Riešenie:
V trojuholníkoch ANC, EMB, DLA, CKE, BOD je súčet vnútorných uhlov 180°, teda máme rovnice:

$|\angle ANC|$ = 180° - α - γ

$|\angle EMB|$ = 180° - ω - β

$|\angle DLA|$ = 180° - α -δ

$|\angle CKE|$ = 180° - ω - γ **1 bod**

$|\angle BOD|$ = 180° - β - δ

Potom súčet:

$|\angle ANC| + |\angle EMB| + |\angle DLA| + |\angle CKE| + |\angle BOD|$ = 5.180° - 2(α + β + γ + δ + ω) = 540°, teda $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\omega = 180°$.

1 bod