

Verzia B
Riešenia a bodovanie

Riešenie 1.

Funkcia $y_1 = \sin x$ je na intervale $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ klesajúca

Funkcia $y_2 = -\frac{1}{2}x$ je na danom intervale klesajúca 1 bod

Takže funkcia $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ je tiež klesajúca

A súčasne $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ a $f(\pi) < 0$

Z čoho vyplýva, že na danom intervale existuje práve jedno riešenie 2 body

Riešenie 2.

$f(-x) = 5 \cdot x^2 + \frac{3}{2} = f(x) \Rightarrow f$ je párna 2 body

Riešenie 3.

Nerovnosť $2 \cdot \sqrt{x \cdot y} \leq x + y$, keďže obe strany sú kladné je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4 \cdot x \cdot y \leq (x + y)^2$$

ktorá je ekvivalentná s :

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \geq 0$$

a táto s

$$(x - y)^2 \geq 0 \text{ čo platí pre dané } x, y \text{ 2 body}$$

Riešenie 4.

$$\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

..... 3 body

Riešenie 5.

Parametrické vyjadrenie priamky a :
$$\begin{cases} x = -3t - 3 \\ y = t + 3 \\ x = 4t + 8 \end{cases}$$
 1 bod

potom $(x, y) \cap a = R$, pričom $z_R = 0 \Rightarrow t = -2$

a teda $R(3;1;0)$

podobne $(x, z) \cap a = Q$, $Q(6;0;-4)$

a $(y, z) \cap a = P$, $P(0;2;4)$ 2 body

Riešenie 6.

Rovina α má smerové vektory

$$\overrightarrow{AB}(3;-2;-4), \quad \overrightarrow{AC}(1;0;-3)$$

potom

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (6;5;2)$$

takže $\alpha: 6x + 5y + 2z + d = 0$

dosadením súradníc bodu B:

$$0 + 5 + 8 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -13$$

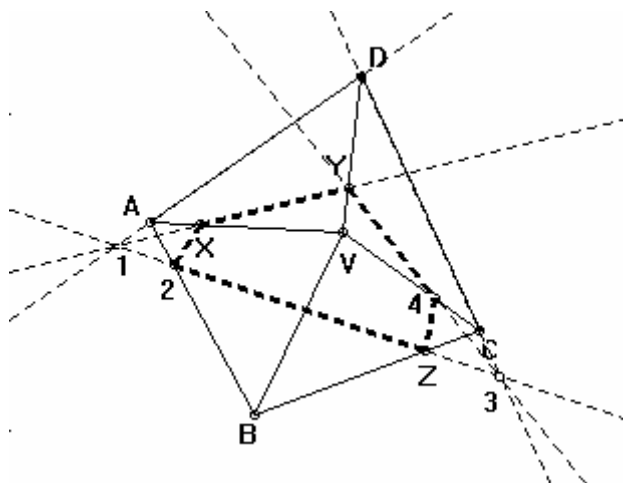
takže $\alpha: 6x + 5y + 2z - 13 = 0$

..... 2 body

Riešenie 7.

Jedná sa o kombinácie $C_{20}(8) = 125\,970$

..... 2 body

Riešenie 8.

Postup:

$$1. \quad \overrightarrow{XY} \cap \overrightarrow{AD} = 1$$

$$2. \quad \overrightarrow{1Z} \cap \overrightarrow{AB} = 2$$

$$3. \quad \overrightarrow{2Z} \cap \overrightarrow{CD} = 3$$

$$4. \quad \overrightarrow{3Y} \cap \overrightarrow{VC} = 4$$

Rez: YX2Z4Y

..... 3 body