UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

RNDr. PETER ZAHRADNÍK

MONOTÓNNE MNOŽINY V E^n A ICH ROZMIESTŇOVANIE

AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*

v študijnom odbore: 9.1.6 Diskrétna matematika

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: **RNDr. Peter Zahradník**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
842 48 Bratislava
zahradnik@fmph.uniba.sk

Školiteľ: **Doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
842 48 Bratislava
bozek@fmph.uniba.sk

Oponenti: **Prof. RNDr. Anton Dekrét, DrSc.**
Katedra informatiky, Prírodovedecká fakulta
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40, 947 01 Banská Bystrica
dekret@fpv.umb.sk

doc. RNDr. František Ježek
Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita Plzeň
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
Česká republika
jezek@kma.zcu.cz

RNDr. Edita Vranková, PhD.
Katedra Matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita,
Priemyselná 4, 918 43 Trnava
evrankov@truni.sk

Autoreferát bol rozoslaný dňa ....
Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... hodine pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa .... vo vednom odbore 9.1.6 Diskrétna matematika na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, miestnosť ....

Predseda spoločnej odborovej komisie:

....
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
842 48 Bratislava

OBSAH

ÚVOD

V mnohých priemyselných odvetviach sa v súčasnosti využíva automatické rozmiestňovanie geometrických útvarov do vopred určenej oblasti, pričom hlavným cieľom je získanie tzv. polohového, resp. strihacieho plánu. V kožiarskom, nábytkárskom a obuvníckom priemysle sa stretávame s požiadavkou rozmiestňovania rovinných útvarov (šablón) do oblasti zväčša nepravidelného tvaru. V textilnom, automobilovom, strojárskom a ďalších priemyselných odvetviach ide najmä o problém rozmiestňovania konečného počtu rovinných útvarov do rovinného pásu (papier, textília, plech) danej šírky tak, aby bola jeho dĺžka čo najmenšia. V leteckej, kamiónovej a lodnej doprave sa zasa stretávame s požiadavkou čo najefektívnejšieho uloženia tovarov do prepravných kontajnerov.

Pri rozmiestňovaní útvarov je dôležitá požiadavka ich vzájomného neprekrývania sa, resp. stýkania. V textilnom priemysle je dokonca prípustné iba ich posúvanie, prípadne otočenie o 180 stupňov alebo osová súmernosť podľa horizontálnej alebo vertikálnej osi, čo je zrejme zapríčinené fyzikálnymi vlastnosťami materiálu, ako je jeho štruktúra, vzor a pod.

Vlastnosť neprekrývania sa útvarov v prípade, že je možné iba ich posúvanie sa v literatúre rieši niekoľkými geometrickými prostriedkami – od Minkowského súčtu množín ([Tom06], [OS06]), cez množinu voľných rozmiestnení jednej množiny vzhľadom na druhú ([AHN02]) až po tzv. „no-fit“ mnohouholník ([BHK07]), resp. jeho ekvivalent – množinu hustých rozmiestnení dvoch množín ([Boz92], [Vra00]). Tieto množiny však môžu mať pre ľubovoľné geometrické útvary pomerne zložitý tvar. Napríklad množina $D(M, N)$ už pre dva jednoduché mnohouholníky M a N je vytvorená zjednotením konečného počtu lomených čiar, úsečiek a bodov, čo podstatne zvyšuje časovú a výpočtovú zložitosť algoritmov na jej výpočet. Ak sú však M a N konvexné, tak množina $D(M, N)$ je hranicou konvexného mnohouholníka. To znamená, že je jednoduchou lomenou čiarou, čo potom zjednodušuje riešenie problémov týkajúcich sa ich rozmiestňovania (možno ju totiž určiť v lineárnom čase). V praxi však bývajú rozmiestňované útvary spravidla nekonvexné a preto je tento výsledok často nepoužiteľný. Túto vlastnosť ale našťastie majú okrem konvexných aj hviezdicovité, či monotónne mnohouholníky.

Monotónne mnohouholníky sú známe vo výpočtovej geometrii najmä v súvislosti s algoritmami na tvorbu triangulácie jednoduchých mnohouholníkov. Niektoré z algoritmov totiž využívajú rozklad daného mnohouholníka na monotónne mnohouholníky, pričom sa s výhodou využíva skutočnosť, že monotónne mnohouholníky možno triangulovať v lineárnom čase ([Boi98]). Okrem toho sa tieto mnohouholníky využívajú aj v priemysle pri návrhu foriem na výrobu odliatkov, v robotike pri plánovaní bezkolízneho pohybu robota v prostredí s prekážkami a pod., kde sa zasa využíva skutočnosť, že dva monotónne mnohouholníky možno vždy od seba bezkolízne oddeliť v smere kolmom na priamku monotónnosti a možno tak urobiť v lineárnom čase ([TG84]).

Pri riešení úloh optimálneho rozmiestňovania sa takmer bez výnimky pracuje s mnohouholníkmi. V systematickej výstavbe teórie sa však ukazuje, že toto obmedzenie je veľmi často zbytočné, ba často nevýhodné. V predloženej práci sa preto rieši problém rozmiestňovania ľubovoľných množín v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n, v ktorom je daný pevný bod o – tzv. referenčný bod, pričom tieto množiny možno len posúvať. Zo všetkých známych geometrických prostriedkov pre vyšetrenie vzájomného neprekrývania, resp. stýkania sa dvoch množín, budeme využívať iba množinu $D(A, B)$ hustých rozmiestnení dvoch množín $A, B \subset E^n$ (pozri napr. [Boz92], resp. [Vra00]).

Pri základnej charakteristike obsahu práce môžeme uviesť jej rozdelenie do štyroch kapitol:

V prvej kapitole – *Súčasný stav problematiky* – sa zameriavame na spracovanie prehľadu problematiky rozmiestňovania monotónnych mnohouholníkov, ich rôznych definícií zovšeobecnení a výpočtovej a časovej zložitosti algoritmov na ich určenie. Ďalej je tu prehľad využitia ako monotónnych mnohouholníkov tak i monotónnych mnohostenov v rôznych priemyselných odvetviach.

Druhá kapitola – *Rozmiestňovanie množín v* E^n – je systematicky vybudovanou teóriou rozmiestňovania dvoch množín v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n a špeciálne konvexných útvarov spolu s dokázanými (z hľadiska aplikácií) významnými vlastnosťami množiny $D(M, N)$ hustých rozmiestnení dvoch konvexných útvarov $M, N \subset E^n$.

Rôznymi spôsobmi zovšeobecnenia pojmu monotónnosti z monotónnych mnohouholníkov na ľubovoľné rovinné geometrické útvary a ich rozmiestňovaním sa zaoberáme v tretej kapitole – *Monotónne množiny v* E^2 *a ich rozmiestňovanie*.

Nosnou časťou práce je štvrtá kapitola – *Monotónne množiny v* E^n *a ich rozmiestňovanie*, kde zovšeobecňujeme pojem monotónnosti z roviny na množiny v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n. Definujeme rôzne typy množín, ktoré majú analogické vlastnosti s monotónnymi mnohouholníkmi v rovine. Takto vznikajú pojmy ako vertikálová súvislosť, monotónnosť, regulárna monotónnosť a normálna monotónnosť. Hlavným výsledkom tejto kapitoly a celej práce je veta 4.3.14, ktorá je analogická so známou vetou pre monotónne mnohouholníky (pozri napr. [Boz05]), t.j. že množina $D(M, N)$ pre dva normálne monotónne geometrické útvary $M, N \subset E^n$ (s určitými dodatočnými vlastnosťami) je hranicou normálne monotónnej množiny $I(M, N)$.

1 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Geometrickými prostriedkami na zabezpečenie neprekrývania sa rovinných útvarov (v prípade, že je možné len ich posúvanie) sú napr. Minkowského súčet, resp. duálny Minkowského rozdiel množín ([Tom06], [OS06]), tzv. „no-fit“ mnohouholník ([BHK07]), množina voľných rozmiestnení [AHN02], resp. množina hustých rozmiestení ([Boz92], [Vra00]) a ďalšie.

- *Minkowského súčet*, resp. *rozdiel* množín A a B je množina

$$A \oplus B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}, \quad \text{resp.} \quad A \oplus (-B) = \{a - b;\ a \in A,\ b \in B\},$$

kde $-B = \{-b;\ b \in B\}$.

Posunuté polohy $A(o_1)$, $B(o_2)$ množín A, B s pólmi o_1 a o_2 sa potom pretínajú, práve vtedy, keď $o_2 - o_1 \in A \oplus (-B)$ a nepretínajú, práve vtedy, keď $o_2 - o_1 \in \text{ext}(A \oplus (-B))$.

- *Množina voľných rozmiestnení* množiny A a vzhľadom na množinu B je definovaná vzťahom

$$F(A, B) = \{x \in E^n;\ A(x) \text{ a } B \text{ sa nepretínajú}\},$$

kde $A(x)$ je posunutá poloha množiny $A = A(o)$ do bodu x.

- *“No-fit” mnohouholník* pre dva mnohouholníky M a N, jeden nepohyblivý (napr. N) a druhý pohyblivý (napr. M), je množina

$$NFP_{MN} = \{x \in E^2;\ M(x) \text{ a } N \text{ sa pretínajú ale neprekrývajú}\}^1.$$

- *Množina hustých rozmiestnení* dvoch množín A a B, kde jedna z nich je nepohyblivá (napr. B) a jedna pohyblivá (napr. A), je množina

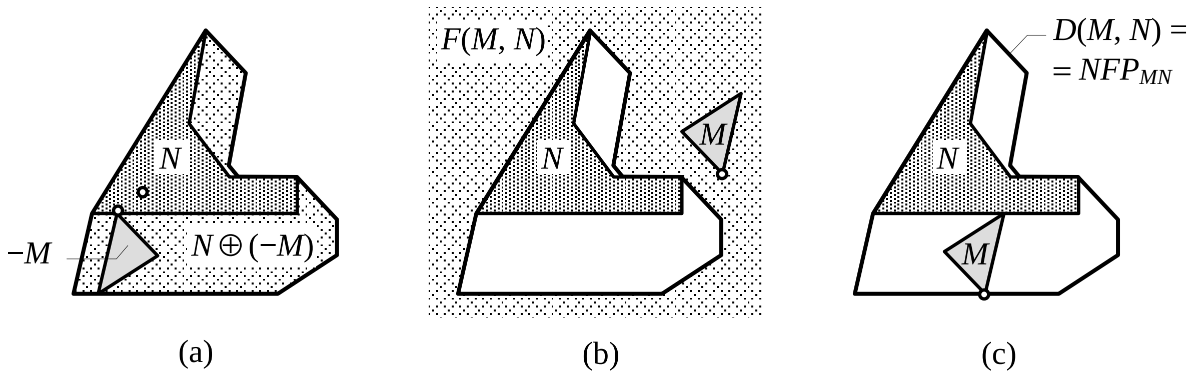
$$D(A, B) = \{x \in E^n;\ A(x) \text{ a } B \text{ sú husto rozmiestnené}\},$$

pričom pod hustým rozmiestnením sa rozumie skutočnosť, že množiny $A(x)$ a B sa pretínajú, zatiaľ čo ich vnútra nie.

Z vyššie uvedených definícií možno ľahko nahliadnuť, že pre mnohouholníky M a N je množina $F(M, N)$ doplnkom množiny $N \oplus (-M)$. Množiny $D(M, N)$ a NFP_{MN} sú totožné a v istom zmysle skoro vždy (pozri vetu 2.5.9) sú hranicou ako množiny $N \oplus (-M)$, tak aj množiny $F(M, N)$ (pozri obr. 1). Tieto množiny sa využívajú nielen pri tvorbe optimálneho

[1] Aj keď autori v [BHK07] nazývajú množinu NFP_{MN} mnohouholníkom, v skutočnosti tomu tak nie je. Množina NFP_{MN} je totiž jednorozmerným objektom, môže byť teda len lomenou čiarou, resp. zjednotením bodov, úsečiek a lomených čiar, a pod.

rezacieho plánu (pozri napr. [BHK07]), ale napríklad aj v robotike pri plánovaní bezkolízneho pohybu robota v prostredí s prekážkami (pozri napr. [Vra03]).



Obr. 1 Množiny (a) $N \oplus (-M)$, (b) $F(M, N)$, (c) $D(M, N)$ a NFP_{MN} pre jednoduché mnohouholníky M a N.

Už pre jednoduché mnohouholníky môžu mať však vyššie definované množiny pomerne zložitý tvar – ak len jeden z mnohouholníkov *M*, *N* je nekonvexný, tak napríklad množina $D(M, N)$ môže byť zjednotením jednoduchých lomených čiar, úsečiek a bodov, čo značne komplikuje tvorbu algoritmov a ohrozuje stabilitu výsledkov. Na druhej strane to do veľkej miery zvyšuje ich časovú i výpočtovú zložitosť. Pre jednoduché mnohouholníky je časová zložitosť algoritmu na výpočet množiny $D(M, N)$ $O(m^2n^2)$ (pozri napr. [Vra00]). Pre určité špeciálne typy mnohouholníkov, akými sú napríklad konvexné, je známe (pozri vetu 2.6.9), že množina $D(M, N)$ je hranicou konvexného mnohouholníka , t.j. je jednoduchou lomenou čiarou, čo podstatne redukuje časovú zložitosť algoritmov na jej výpočet (možno ju skonštruovať v lineárnom čase (pozri napr. [AHN02] alebo [Boz94])).

Keďže však rozmiestňované útvary bývajú spravidla nekonvexné, je predchádzajúci výsledok prakticky nepoužiteľný. Našťastie množina $D(M, N)$ je hranicou mnohouholníka nielen pre konvexné mnohouholníky, ale aj pre niektoré ďalšie typy mnohouholníkov, akými sú napríklad hviezdicovité, či *D*-monotónne mnohouholníky (pozri napr. [Boz05], [Boz09]).

D-monotónne mnohouholníky majú mnohé zaujímavé vlastnosti, ktoré často krát výrazne redukujú časovú a výpočtovú zložitosť algoritmov. V závislosti od ich využitia v konkrétnom priemyselnom odvetví sa však často ich definície líšia, prípadne sa vyskytuje ich zovšeobecnenie.

Ako sme už spomenuli vyššie, *D*-monotónne mnohouholníky značne urýchľujú algoritmy riešiace problém ich rozmiestňovania. Hernandez-Barrera v [Her97] dokazuje, že Minkowského súčet $M \oplus N$ pre *konvexný m*-uholník *M* a *D-monotónny n*-uholník *N* možno určiť v čase $O(mn)$. Pre dva *D*-monotónne mnohouholníky tak možno urobiť v čase

$O(mn \log mn)$ so zložitosťou $\Theta(mn\ \alpha(\min(m,n)))$ v najhoršom prípade. Konečne, ak je M D-monotónny m-uholník a N jednoduchý n-uholník, tak množinu $M \oplus N$ možno určiť v čase $O((mn + k) \log mn)$, kde k je číslo, ktoré môže byť v najhoršom prípade $\Theta(n^2m)$.
Oks a Sharir v [OS06] ukázali, že pre D_1-monotónny m-uholník M a D_2-monotónny n-uholník N možno určiť množinu $M \oplus N$ v čase $O(mn\ \alpha(\min\{m,n\}))$. Navyše, hranica mnohouholníka $M \oplus N$ je vytvorená zjednotením dvoch D_1-monotónnych a dvoch D_2-monotónnych lomených čiar.

Toussaint a El Gindy sa v [TG84] zaoberajú plánovaním bezkolízneho pohybu robota v prostredí s prekážkami, resp. riešeniu úlohy, kde musí robot rozhodnúť, či daný predmet, reprezentovaný mnohouholníkom v rovine, možno premiestniť z jedného miesta na druhé bez toho, aby došlo ku kolízii s inými predmetmi. V článku je dokázané, že dva D-monotónne mnohouholníky sa dajú od seba oddeliť[2] jednoduchým posunutím v smere kolmom na priamku D. Navyše, ak je jeden mnohouholník D_1-monotónny a druhý D_2-monotónny, tak ich možno od seba oddeliť buď v smere kolmom na D_1 alebo na D_2. Taktiež je tu ukázaný algoritmus, ktorý rozhodne o oddeliteľnosti D_1-monotónneho m-uholníka od D_2-monotónneho n-uholníka v čase $O(m + n)$.

Z definície monotónneho mnohouholníka máme ([Boi98, kap.12.3.2]), že jeho hranica je vytvorená zjednotením dvoch D-monotónnych lomených čiar. Táto vlastnosť sa s výhodou používa napríklad pri návrhu odlievacích foriem na výrobu odliatkov. Ak má totiž vnútro formy, resp. jej profil tvar monotónneho mnohouholníka, tak túto formu možno rozdeliť na dve časti, ktoré možno potom od seba oddeliť v smere kolmom na D tak, aby sa nepoškodili ako časti formy, tak ani odliatok.

V praxi sa však často vyskytujú aj tzv. kĺbové formy, ktoré sa otvárajú otáčaním okolo pevného bodu (kĺbu). Pri oddeľovaní oboch častí foriem je zrejme opäť nutná požiadavka nepoškodenia ako formy, tak i odliatku. Až po zabezpečení oboch týchto požiadaviek je totiž možná výroba odliatkov a využitie formy v masovej výrobe. To viedlo autorov v [BMS09] k zovšeobecneniu triedy monotónnych mnohouholníkov na triedu tzv. otočne monotónnych mnohouholníkov.

Mnohouholník M je *otočne monotónny* vzhľadom na bod $r \in E^2$, ak možno jeho hranicu rozdeliť na práve dve lomené čiary takým spôsobom, že jednu z nich možno otočiť

[2] Takáto vlastnosť mnohouholníkov sa nazýva *oddeliteľnosť*.

okolo bodu r v kladnom a druhú v zápornom smere, pričom ani jedna lomená čiara pri tomto pohybe nesmie pretnúť vnútro mnohouholníka M.

Autori v článku ďalej uvádzajú algoritmus, ktorý pre daný n-uholník M a bod $r \in E^2$ v čase $O(n)$ rozhodne, či je tento otočne monotónny vzhľadom na daný bod r. Pre konvexný n-uholník možno v čase $O(n)$ nájsť všetky body r v rovine, vzhľadom na ktoré je otočne monotónny a pre ľubovoľný jednoduchý n-uholník tak možno urobiť v čase $O(n^2)$.

V [ABK10] autori zovšeobecňujú problém hľadania smeru monotónnosti pre daný mnohouholník. Úlohou je nájsť množinu $\mathscr{S}$ takých k priamok v rovine, že pre každý bod $p \in M$ existuje aspoň jedna priamka V_p z $\mathscr{S}$, ktorá pretína mnohouholník M v súvislej množine. Takýto mnohouholník sa potom nazýva *k-monotónny* (1-monotónny mnohouholník je zrejme monotónny vzhľadom na vertikálnu priamku).

Vieme, že hranicu monotónneho mnohouholníka možno rozdeliť na dve monotónne lomené čiary. Má teda zmysel uvažovať, či má aj k-monotónny mnohouholník podobnú vlastnosť, t.j. či možno jeho hranicu rozdeliť na $2k$ lomených čiar, pričom každá dvojica je monotónna vzhľadom na jeden smer monotónnosti. Odpoveď na túto otázku je však záporná, nakoľko existujú 2-monotónne mnohouholníky, ktorých hranicu nemožno rozdeliť na dve dvojice monotónnych lomených čiar a mnohouholníky, ktorých hranicu síce možno takto rozdeliť, ale nie sú 2-monotónne .

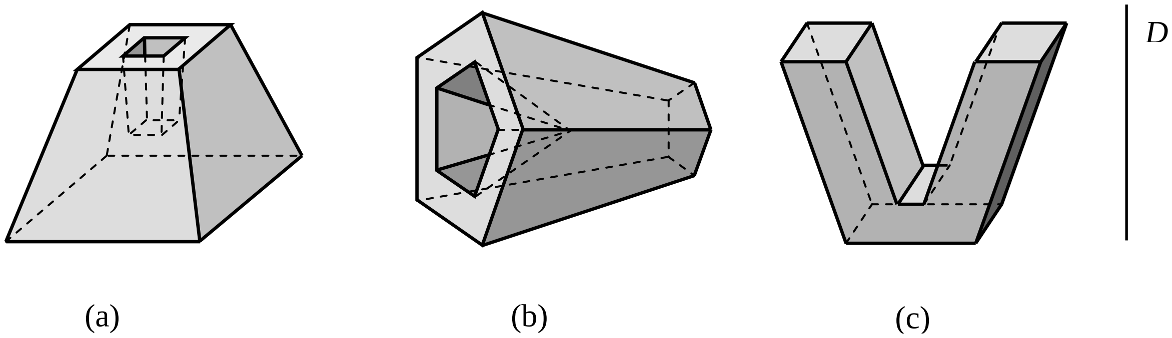
Pre danú priamku D_1 a n-uholník M je v [ABK10] uvedený algoritmus, ktorý v čase $O(n^2 \log^2 n)$ určí, či existuje taká priamka D_2, že mnohouholník M je 2-monotónny. V rovnakom čase tento algoritmus určí aj množinu všetkých priamok D_2, pre ktoré je mnohouholník M 2-monotónny vzhľadom na množinu priamok $\{D_1, D_2\}$. V čase $O(n^5 \log^2 n)$ možno určiť množinu všetkých dvojíc priamok, vzhľadom na ktoré je daný n-uholník 2-monotónny, a konečne pre $k \geq 3$ v čase $O(n^{3k+1} \log n)$ možno určiť množinu všetkých k-tic priamok, vzhľadom na ktoré je n-uholník k-monotónny.

Pojem monotónnosti do trojrozmerného priestoru zaviedol Toussaint v [Tou85], kde zadefinoval tri typy monotónnych mnohostenov vzhľadom na priamku D. Mnohosten M nazval

- *silno monotónny* vzhľadom na priamku D, ak každá rovina rovnobežná s D pretína M v D-monotónnom[3] mnohouholníku (Obr. 1.2.1 (a)).

[3] D-monotónny mnohouholník je tu definovaný ako mnohouholník, ktorého hranicu pretína každá rovnobežka s priamkou D najviac v dvoch bodoch.

- *slabo monotónny* vzhľadom na priamku D, ak každá rovina kolmá na D pretína M v jednoduchom mnohouholníku (Obr. 1.2.1 (b)).
- *priamkovo monotónny* vzhľadom na priamku D, ak každá priamka rovnobežná s D pretína hranicu M najviac v dvoch bodoch (Obr. 1.2.1 (c)).



Obr. 1.2.1 (a) silno, (b) slabo a (c) priamkovo monotónny mnohosten vzhľadom na priamku *D*.

Keďže v rovine sa monotónnosť chápe ako určité zovšeobecnenie konvexnosti, malo by tomu byť tak aj v priestore. A skutočne, konvexný mnohosten je silno, slabo aj priamkovo monotónny vo všetkých smeroch (pozri [HYH06]). V [HYH06] autori ďalej ukazujú, že ak je mnohosten silno monotónny vzhľadom na priamku D, tak je aj priamkovo monotónny vzhľadom na tú istú priamku a slabo monotónny vzhľadom na všetky priamky kolmé k D. Opačné implikácie však neplatia. Medzi slabou a priamkovou monotónnosťou navyše nejestvuje žiaden vzájomný vzťah.

V [HYH06] sa autori okrem iného zaoberajú aj časovou a výpočtovou zložitosťou algoritmov na určenie monotónnosti mnohostena s n vrcholmi:

- Všetky priamky, vzhľadom na ktoré je mnohosten silno monotónny, možno určiť v čase $O(nk \log(k + n) \log n)$, kde n, resp. k je počet všetkých jeho stien, resp. počet všetkých jeho tzv. *doplnkových mnohostenov*, ktoré vzniknú rozdielom konvexného obalu daného mnohostena a samotného mnohostena.
- Všetky priamky pre slabú a priamkovú monotónnosť mnohostena možno určiť v čase $O(nk \log(k + n) \log n)$, kde n, resp. k je počet všetkých jeho stien, resp. počet všetkých jeho tzv. *podbalíkov* (steny doplnkového mnohostena majúce určité vlastnosti).

Bose a Van Kreveld [BK05] ukazujú algoritmus, ktorý v čase $O(n \log n)$, resp. v čase $O(n^2)$ určí množinu všetkých priamok v priestore, vzhľadom na ktoré je daný mnohosten s n vrcholmi *slabo monotónny v konvexnom zmysle* (mnohosten, ktorého rezom ľubovoľnou horizontálnou rovinou je konvexný mnohouholník), resp. *v jednoduchom zmysle* (rezom horizontálnou rovinou je jednoduchý mnohouholník).

Doteraz nie je známa žiadna práca zaoberajúca sa rozmiestňovaním monotónnych mnohostenov. Autori v [AHN02] riešia problém posúvania konvexného mnohostena po mnohostenovej ploche.

Mnohostenová plocha M je taká mnohostenová oblasť, že prienikom ľubovoľnej vertikálnej priamky s M je bod, úsečka, resp. polpriamka a kolmý priemet M do horizontálnej roviny je konvexný mnohouholník. Pritom pod vertikálnou priamkou sa rozumie priamka rovnobežná s D a pod horizontálnou rovinou rovina kolmá na D.

Autori potom ukazujú algoritmus na výpočet množiny voľných rozmiestnení $F(N, M)$ (pozri str. 2) konvexného mnohostena N (s n vrcholmi) vzhľadom na mnohostenovú plochu (s m vrcholmi). Tento algoritmus vypočíta množinu $F(N, M)$ v čase $O(nm + k + t)$, kde k je počet vrcholov $F(N, M)$ a t je parameter, ktorého hodnota je nanajvýš $O(n^2 m \log n)$.

Predchádzajúci výsledok úzko súvisí s našou prácou. Ak by sme totiž od mnohostenovej plochy M navyše požadovali, aby prienik ľubovoľnej vertikálnej priamky s M bol najviac jednobodový, tak mnohosten, ktorého hranica by bola vytvorená zjednotením dvoch takýchto mnohostenových plôch, by bol monotónny v zmysle definície 4.2.7. Vyššie uvedená časová zložitosť algoritmu je potom totožná pre výpočet množiny voľných rozmiestnení $F(N, M)$ konvexného mnohostena N vzhľadom na monotónny mnohosten M.

2 ROZMIESTŇOVANIE MNOŽÍN V E^n

Keďže problém rozmiestňovania útvarov sa v praxi veľmi často obmedzuje len na mnohouholníky, t.j. rovinné útvary, celá teória je podrobne rozpracovaná len v rovine (pozri napr. [Vra00]). Pretože sa v práci budeme zaoberať rozmiestňovaním monotónnych množín v n-rozmernom euklidovskom priestore, dokážeme v tejto kapitole tvrdenia, známe pre rovinné útvary, aj pre ľubovoľné množiny v E^n. Najskôr uvádzame základné topologické pojmy a vlastnosti množín nevyhnutne potrebné k vybudovaniu teórie ich rozmiestňovania v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n. Následne definujeme pojem geometrického útvaru (definícia 2.2.1).

Geometrický útvar, skrátene *útvar*, je množina $M \subset E^n$, ktorá je časťou uzáveru svojho vnútra, t.j. množina s vlastnosťou

$$M \subset \overline{\operatorname{int} M}.$$

Dokazujeme tu potom vlastnosti geometrických útvarov.

V podkapitole 2.3 sa zaoberáme vzájomnými polohami dvoch množín z hľadiska ich rozmiestnenia v E^n. Definujeme tu tri typy vzájomných polôh dvoch množín a dokážeme nutné a postačujúce podmienky k tomu aby dva geometrické útvary boli husto rozmiestnené.

Hovoríme, že množiny $A, B \subset E^n$ sa

(a) *pretínajú*, ak majú neprázdny prienik, t.j. ak $A \cap B \neq \emptyset$,
(b) *prekrývajú*, ak ich vnútra majú neprázdny prienik, t.j. ak $\operatorname{int}A \cap \operatorname{int}B \neq \emptyset$,
(c) sú *husto rozmiestnené*, ak sa neprekrývajú, ale ich uzávery sa pretínajú, t.j. ak $\operatorname{int}A \cap \operatorname{int}B = \emptyset$ a $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

V podkapitole 2.4 sa zaoberáme množinami vzájomných polôh, kde pracujeme s dvoma množinami. Prvá je *pohyblivá*, môžeme ju ľubovoľne posúvať, druhá je *pevná*. Pre pohyblivú množinu máme v rovine zadaný bod $o \in E^n$, ktorý nazývame *referenčný bod*[4] pohyblivej množiny (kvôli lepšej názornosti sa obvykle volí v jej vnútri, nie je to však nevyhnutné). Tým máme definovanú bijekciu f medzi bodovou a vektorovou zložkou priestoru E^n:

$$f(x) = x - o, \qquad f^{-1}(\mathbf{u}) = o + \mathbf{u}.$$

Posunutie o vektor $\mathbf{u}$ je potom reprezentované bodom $x = o + \mathbf{u}$ a naopak, bod x zasa reprezentuje posunutie o vektor $\mathbf{u} = x - o$. To nám potom zabezpečuje vizualizáciu posunutí v priestore E^n.

Obraz množiny $A \subset E^n$ v posunutí o vektor $x - o$ označujeme $A(x)$ a hovoríme, že *množina A je umiestnená do bodu x*. Množinu $A(x)$ teda môžeme zapísať v tvare

$$A(x) = A + (x - o) = \{ a + (x - o); a \in A\}.$$

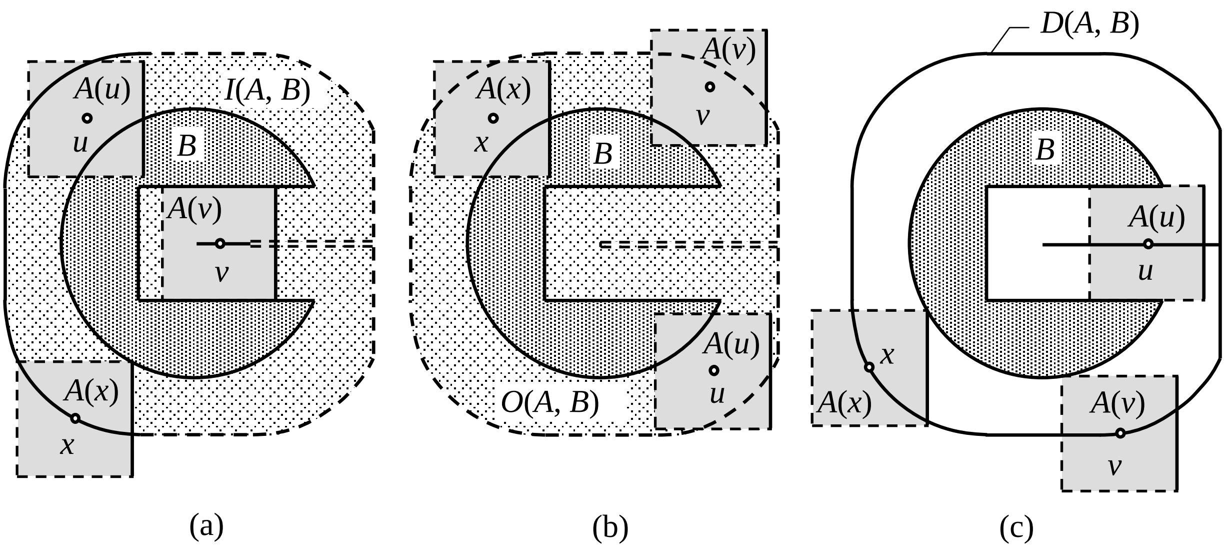
2.4.1 Definícia (Obr. 2.4.1) *Množiny vzájomných polôh pohyblivej množiny $A \subset E^n$ a pevnej množiny $B \subset E^n$:*

(a) *množina pretínaní*: $I(A, B)_o = \{x \in E^n; A(x)$ a B sa pretínajú$\}$,

[4] Ak je v E^n zvolená súradnicová sústava, referenčným bodom je implicitne jej začiatok.

(b) *množina prekrytí*: $O(A, B)_o = \{x \in E^n;\ A(x) \text{ a } B \text{ sa prekrývajú}\}$,

(c) *množina hustých rozmiestnení*: $D(A, B)_o = \{x \in E^n;\ A(x) \text{ a } B \text{ sú husto rozmiestnené}\}$.



Obr. 2.4.1 Množina (a) pretínaní, (b) prekrytí a (c) hustých rozmiestnení množín *A* a *B*.

Najdôležitejším výsledkom podkapitoly 2.5 je

2.5.11 Veta Ak je jeden z geometrických útvarov $M \subset E^n$ alebo $N \subset E^n$ ohraničený, tak

(a) $\partial I(M, N) \subset D(M, N)$,

(b) $\partial I(M, N) = D(M, N)$ vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{int} I(M, N) = I(\mathrm{int} M, \mathrm{int} N)$.

V závere druhej kapitoly, resp. v podkapitole 2.6, sa zaoberáme rozmiestňovaním konvexných množín, pričom sme dospeli k nasledujúcim výsledkom:

2.6.6 Veta Ak je jeden z konvexných útvarov $M \subset E^n$ alebo $N \subset E^n$ ohraničený, tak

$$D(M, N) = \partial I(M, N).$$

2.6.7 Dôsledok Ak je jeden z konvexných útvarov $M \subset E^n$ alebo $N \subset E^n$ ohraničený, tak množina $D(M, N)$ je hranicou otvoreného konvexného geometrického útvaru $I(\mathrm{int} M, \mathrm{int} N)$ a tiež hranicou uzavretého konvexného geometrického útvaru $I(\bar{M}, \bar{N})$.

2.6.9 Veta Pre konvexné polyédre *M*, *N* je množina $I(M, N)$ konvexný polyéder a množina $D(M, N)$ je jeho hranica. Špeciálne, pre konvexné mnohouholníky *M*, *N* v rovine je množina $D(M, N)$ hranicou konvexného mnohouholníka $I(M, N)$.

Druhá časť vety 2.6.9 teda hovorí, že pre konvexné mnohouholníky je množina $D(M, N)$ jednoduchou lomenou čiarou, čo podstatne zjednodušuje tvorbu algoritmov na jej výpočet - možno ju totiž určiť v lineárnom čase (pozri napr. [AHN02], [Boz94]).

3 MONOTÓNNE MNOŽINY V E^2 A ICH ROZMIESTŇOVANIE

V euklidovskej rovine možno definovať niekoľko typov monotónnych množín – od monotónnych lomených čiar, kriviek, cez mnohouholníky až po všeobecnejšie typy monotónnych geometrických útvarov.

Predpokladajme, že máme v euklidovskej rovine E^2 zvolenú nejakú priamku, ktorú nazveme *priamka monotónnosti*. Každú priamku kolmú na túto priamku nazveme *vertikála*. Dva body neležiace na tej istej vertikále nazveme *vertikálovo rôzne*. Ďalej budeme predpokladať, že je zvolená taká karteziánska sústava súradníc *oxy*, že súradnicová os *x* je totožná s priamkou monotónnosti.

Monotónnymi krivkami, resp. monotónnymi geometrickými útvarmi v rovine, ktoré zovšeobecňujú monotónne lomené čiary a monotónne mnohouholníky (pozri napr. [Boi98, kap. 12.3.2]), sme sa zaoberali v článkoch [Zah07], [Zah08K], [Zah09] a rigoróznej práci [Zah08R].

V [Zah07], resp. [Zah08R] sme definovali *monotónnu krivku* ako graf spojitej reálnej funkcie definovanej na kompaktnom intervale a pomocou nej, podobne ako v prípade monotónnej lomenej čiary a monotónneho mnohouholníka (pozri definíciu 3.1.2), sme zaviedli pojem monotónneho geometrického útvaru. Ukázalo sa, že je viacero spôsobov takého zovšeobecnenia.

3.2.1 Definícia Geometrický útvar je *hranicovo monotónny*, ak je možné jeho hranicu vytvoriť zjednotením dvoch monotónnych kriviek.

3.2.2 Definícia Geometrický útvar je *vertikálovo monotónny*, ak spĺňa nasledujúce dve podmienky:

(VM1) Prienikom ľubovoľnej vertikály s daným útvarom je súvislá množina,

(VM2) vertikála prechádzajúca vnútorným bodom útvaru pretína jeho hranicu v práve dvoch bodoch.

3.2.3 Definícia Geometrický útvar je *oblúkovo monotónny*, ak každé dva jeho vertikálovo rôzne body možno spojiť monotónnou krivkou ležiacou v tomto útvare.

Pre každý typ monotónnosti, či už išlo o hranicovú, vertikálovú alebo oblúkovú, sme v [Zah08R], [Zah08K] a [Zah09] dokázali nasledujúcu vetu:

3.2.4 Veta Nech $M, N \subset E^2$ sú uzavreté a ohraničené (hranicovo, resp. vertikálovo, resp. oblúkovo) monotónne geometrické útvary so súvislými vnútrami. Potom $I(M, N)$ je takisto (hranicovo, resp. vertikálovo, resp. oblúkovo) monotónny geometrický útvar a množina $D(M, N)$ je jeho hranicou.

Skutočnosť, že $D(M, N)$ je hranicou monotónneho útvaru $I(M, N)$ znamená, že je jednoduchou uzavretou krivkou, preto je veta 3.2.4 zovšeobecnením vety z [Boz05] pre monotónne mnohouholníky.

Keďže sme doteraz zaviedli tri rôzne definície monotónnosti, pričom každá z nich opisuje inú množinu geometrických útvarov, vynára sa prirodzene otázka, v akom sú vzájomnom vzťahu. Je zrejmé, že tieto definície nie sú navzájom ekvivalentné. Platia však nasledujúce vety.

3.2.6 Veta Nech $M \subset E^2$ je hranicovo monotónny útvar. Potom ak M je ohraničený a súvislý, tak je oblúkovo monotónny. Ak má navyše súvislé vnútro, tak je aj vertikálovo monotónny.

3.2.7 Veta Nech $M \subset E^2$ je vertikálovo monotónny útvar. Potom ak M je súvislý, tak je oblúkovo monotónny. Ak navyše jeho hranica neobsahuje vertikálne úsečky, tak je aj hranicovo monotónny.

3.2.8 Veta Nech $M \subset E^2$ je oblúkovo monotónny útvar. Potom ak M je uzavretý a ak jeho prienik s každou vertikálou prechádzajúcou vnútorným bodom M je ohraničený, tak je vertikálovo monotónny. Ak navyše jeho hranica neobsahuje vertikálne úsečky, tak je aj hranicovo monotónny

4 MONOTÓNNE MNOŽINY V E^n A ICH ROZMIESTŇOVANIE

V tejto kapitole zovšeobecníme pojem monotónnosti z roviny do priestoru ľubovoľnej dimenzie a dokážeme platnosť vety analogickej s vetou 3.2.4 pre rovinné monotónne útvary.

V celej kapitole budeme predpokladať, že máme v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n zvolenú nadrovinu Π, ktorú budeme nazývať *horizontálna nadrovina*.

4.1 MONOTÓNNE MNOŽINY

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať množinami v n-rozmernom euklidovskom priestore spĺňajúcimi podmienky súvislosti prienikov vertikál s danou množinou a najviac dvojbodový prienik vertikál s hranicou danej množiny a budeme skúmať vlastnosti týchto množín.

4.1.2 Definícia *Vertikálna lineárna varieta* je lineárna varieta kolmá na Π. Lineárnu varietu dimenzie 1, t.j. vertikálnu priamku, budeme stručne nazývať *vertikála*. Symbolom V_p budeme označovať vertikálu prechádzajúcu bodom $p \in E^n$.

4.1.4 Definícia *Vertikála množiny* $M \subset E^n$ je prienik množiny M s vertikálnou priamkou. Hovoríme, že vertikála $V_p \cap M$ množiny M *leží nad bodom* $p \in \Pi$.

4.1.5 Definícia Množina $M \subset E^n$ je *vertikálovo súvislá*, ak sú všetky jej vertikály súvislé. Množinu φM nazývame *báza* vertikálovo súvislej množiny M.

Pre každú množinu D z horizontálnej nadroviny Π je množina $\varphi^{-1}D$ zrejme vertikálovo súvislá. Jej prienik s danou vertikálovo súvislou množinou M nazveme *zúženie vertikálovo súvislej množiny M na D* a označíme $M|_D$. Napríklad pre $D = \{p\}$ je $M|_D = M|_p$ vertikála množiny M nad bodom p.

4.1.8 Veta Množina je konvexná práve vtedy, keď je vertikálovo súvislá v každom smere.

4.1.10 Definícia *Dolná a horná ohraničujúca funkcia* vertikálovo súvislej množiny M sú funkcie určené vzťahmi

$$l\colon \varphi M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},\ p \mapsto \inf\{x_n(q);\ q \in V_p \cap M\},$$

$$u\colon \varphi M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},\ p \mapsto \sup\{x_n(q);\ q \in V_p \cap M\}.$$

4.1.12 Definícia Množina M je *monotónna*, ak je vertikálovo súvislá a ak vertikála jej hranice nad každým vnútorným bodom bázy φM je najviac dvojprvková.

4.1.20 Veta Konvexná množina je monotónna v každom smere.

4.2 REGULÁRNE A NORMÁLNE MONOTÓNNE MNOŽINY

Skúmanie vlastností množín v euklidovskom priestore E^n, ktoré spĺňajú podmienku práve dvojbodového prieniku s vertikálou prechádzajúcou vnútorným bodom bázy a podmienku spojitosti ohraničujúcich funkcií je predmetom tejto podkapitoly.

4.2.1 Definícia Množina je *regulárne monotónna*, ak je vertikálovo súvislá a ak vertikála jej hranice nad každým vnútorným bodom bázy je dvojprvková.

4.2.3 Veta Ohraničená konvexná množina je regulárne monotónna v každom smere.

4.2.7 Definícia Množina je *normálne monotónna*, ak je regulárne monotónna a jej ohraničujúce funkcie sú spojité.

4.2.10 Veta Zúženie regulárne monotónnej množiny na vnútro bázy je normálne monotónna množina.

4.2.13 Veta Ak je báza normálne monotónnej množiny $M \subset E^n$ geometrický útvar, tak aj množina M je geometrickým útvarom.

4.2.23 Definícia Nech $M \subset E^n$ je regulárne monotónny geometrický útvar s konvexnou bázou. Potom ak je pre všetky $p \in \partial\varphi M$ množina $\bar{M}\,|_p$ jednoprvková, tak hovoríme, že M má *triviálny plášť*.

4.2.27 Veta Každá uzavretá regulárne monotónna množina s triviálnym plášťom, ktorej báza je homeomorfná s $(n-1)$-rozmernou kompaktnou konvexnou množinou, je homeomorfná s n-rozmernou guľou B^n a jej hranica je homeomorfná s $(n-1)$-rozmernou sférou S^{n-1}.

Je zrejmé, že n-rozmerná guľa B^n, $n \geq 2$, je normálne monotónna množina nad guľou B^{n-1}. Plášťom gule B^n je sféra S^{n-2}, teda B^n má triviálny plášť. Pretože každá $(n-1)$-rozmerná kompaktná konvexná množina je homeomorfná s B^{n-1}, veta 4.2.27 spomenutú vlastnosť konvexných množín zovšeobecňuje na triedu regulárne monotónnych množín s triviálnym plášťom.

4.3 MNOŽINA HUSTÝCH ROZMIESTNENÍ NORMÁLNE MONOTÓNNYCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Pre monotónne mnohouholníky M a N je známe (pozri napr. [Boz05]), že množina $D(M, N)$ ich hustých rozmiestnení je hranicou monotónneho mnohouholníka $I(M, N)$. Túto vlastnosť sme v našich skorších prácach ([Zah08R], [Zah08K] a [Zah09]) dokázali pre rôzne typy rovinných monotónnych geometrických útvarov a v tejto podkapitole ju zovšeobecníme na geometrické útvary ľubovoľnej dimenzie.

4.3.3 Veta Nech $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne množiny s konvexnými bázami. Potom množina $I(M, N)$ je vertikálovo súvislá.

4.3.7 Veta Nech $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne geometrické útvary s konvexnými bázami, pričom jeden z nich je ohraničený. Potom množina $D(M, N)$ je hranicou množiny $I(M, N)$. Symbolicky:

$$D(M, N) = \partial I(M, N).$$

4.3.9 Veta Nech $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne množiny s ohraničenými ohraničujúcimi funkciami a s konvexnými bázami. Potom $I(M, N)$ je regulárne monotónna množina.

4.3.12 Veta Nech $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne množiny s ohraničenými ohraničujúcimi funkciami a s konvexnými bázami, pričom jedna z báz je striktne konvexná a jedna ohraničená. Potom $I(M, N)$ je normálne monotónna množina.

4.3.14 Veta Nech $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne množiny s ohraničenými ohraničujúcimi funkciami a s konvexnými bázami, pričom jedna z báz je striktne konvexná a jedna ohraničená. Potom množina $D(M, N)$ je hranicou normálne monotónnej množiny $I(M, N)$. Navyše, ak M a N sú otvorené resp. uzavreté, tak $D(M, N)$ je hranicou otvorenej resp. uzavretej normálne monotónnej množiny $I(M, N)$.

4.3.16 Dôsledok Množina $D(M, N)$ pre ohraničené normálne monotónne množiny v rovine so súvislými bázami je jednoduchá uzavretá krivka.

4.3.17 Dôsledok Množina $D(M, N)$ pre monotónne mnohouholníky je jednoduchá uzavretá lomená čiara.

ZÁVER

V práci sme zaviedli pojem monotónnosti v n-rozmernom euklidovskom priestore E^n a zaoberali sme sa rozmiestňovaním monotónnych útvarov v priestore E^n. V prvej kapitole uvádzame prehľad problematiky týkajúci sa využitia monotónnych mnohouholníkov a mnohostenov nielen pri riešení úloh súvisiacich s ich rozmiestňovaním ale i pri iných typoch úloh, akými je napríklad problém oddeliteľnosti útvarov využívajúci sa v priemyselnej výrobe v procese navrhovania foriem na výrobu odliatkov a takisto aj v robotike pri plánovaní pohybu robota v prostredí s prekážkami.

V druhej kapitole sme dokázali platnosť známych tvrdení o rozmiestňovaní dvojrozmerných útvarov pre n-rozmerné útvary. V jej závere sme ukázali platnosť vety (veta 2.6.6), ktorá hovorí, že ak je jeden z konvexných útvarov $M, N \subset E^n$ ohraničený, tak množina $D(M, N)$ ich hustých rozmiestnení je hranicou konvexného útvaru $I(M, N)$. Špeciálne, pre dvojrozmerné útvary, resp. mnohouholníky je dôsledkom tejto vety známe tvrdenie, že množina $D(M, N)$ je hranicou konvexného mnohouholníka $I(M, N)$, a preto ju možno vypočítať v lineárnom čase (pozri napr. [AHN02], [Boz94]).

Prehľadom našich doterajších prác ([Zah08K], [Zah08R] a [Zah09]) súvisiacich s možnou transformáciou pojmu monotónnosti z mnohouholníkov na ľubovoľné rovinné geometrické útvary a ich rozmiestňovaním sme sa zaoberali v tretej kapitole. Doteraz sme v nich uviedli tri typy zovšeobecnení monotónnosti – dali sme im postupne názvy *hranicová*, *vertikálová* a *oblúková monotónnosť*. V prácach ([Zah08K], [Zah08R] a [Zah09] sme postupne dokázali, že množina $D(M, N)$ pre všetky tri typy ohraničených a uzavretých monotónnych útvarov (vzhľadom na tú istú priamku) so súvislými vnútrami je hranicou monotónneho geometrického útvaru $I(M, N)$, čo je zovšeobecnením známej vety pre monotónne mnohouholníky (pozri napr. [Boz05]). Na záver tejto kapitoly vo vetách 3.2.6, 3.2.7 a 3.2.8 uvádzame vzájomné vzťahy a podmienky ekvivalencie medzi jednotlivými typmi monotónnosti.

Hlavným prínosom práce je štvrtá kapitola, kde zavádzame pojem monotónnosti do n-rozmerného priestoru E^n. Vo všeobecnosti je pojem monotónnosti chápaný ako zovšeobecnenie konvexnosti a to platí aj pre monotónne množiny v E^n (pozri vetu 4.1.8, resp. vetu 4.1.20, resp. vetu 4.2.3). Z tohto dôvodu tu skúmame aj vlastnosti monotónnych množín, ktoré sú podobné s konvexnými množinami. Vo vete 4.2.27 napríklad ukazujeme, že každá uzavretá regulárne monotónna množina s triviálnym plášťom, ktorej báza je homeomorfná s $(n-1)$-rozmernou kompaktnou konvexnou množinou, je homeomorfná s n- rozmernou guľou B^n a jej hranica je homeomorfná s $(n-1)$-rozmernou sférou S^{n-1}. Hlavným výsledkom práce je však veta 4.3.14, v ktorej dokazujeme, že ak $M, N \subset E^n$ sú normálne monotónne množiny s ohraničenými ohraničujúcimi funkciami a s konvexnými bázami, pričom jedna z báz je striktne konvexná a jedna ohraničená, tak množina $D(M, N)$ je hranicou normálne monotónnej množiny $I(M, N)$. Tento výsledok je zovšeobecnením známej vlastnosti monotónnych mnohouholníkov (pozri napr. [Boz05]) a vlastností rôznymi spôsobmi monotónnych rovinných útvarov (pozri [Zah08R], [Zah08K], [Zah09]).

V súvislosti so skúmanými otázkami a dosiahnutými výsledkami možno uviesť niektoré otvorené problémy:

Oks a Sharir v [OS06] ukázali, že pre D_1-monotónny mnohouholník M a D_2-monotónny mnohouholník N je množina $D(M, N)$ vytvorená zjednotením dvoch D_1-monotónnych a dvoch D_2-monotónnych lomených čiar. Má teda význam skúmať, či má táto množina obdobné vlastnosti aj pre ľubovoľné monotónne geometrické útvary v euklidovskom priestore E^n.

Okrem úloh riešiacich problém rozmiestňovania sa monotónne útvary využívajú aj v iných odvetviach vedy a techniky, napr. pri návrhu foriem na výrobu odliatkov ([BMS09], [HYH06]), v robotike pri plánovaní bezkolízneho pohybu robota ([TG84]) a pod., kde sa využíva skutočnosť, že dva monotónne mnohouholníky, resp. mnohosteny možno vždy od seba bezkolízne oddeliť. Ďalšou otázkou, ktorá sa teda prirodzene vynára je, či možno aj nami definované monotónne útvary v priestore E^n navzájom od seba bezkolízne oddeliť.

Hlbšie štúdium vyššie uvedených vlastností monotónnych útvarov v priestore E^n presahuje rámec zámerov predkladanej dizertačnej práce, bude však predmetom ďalšieho skúmania.

ZOZNAM PRÁC UCHÁDZAČA, KTORÉ MAJÚ VZŤAH K SKÚMANEJ PROBLEMATIKE

[Zah07] ZAHRADNÍK, P. A Boundary of a Monotone Geometric Body in the Euclidean Plane. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2007, Kočovce, Október 2007. STU, Kočovce, str. 152 - 157. ISBN 978-80-227-2734-1

[Zah08] ZAHRADNÍK, P. A On Dense Placements of D-monotone Geometric Bodies in the Euclidean Plane. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2008, Kočovce, Október 2008. STU, Kočovce.

[Zah09] ZAHRADNÍK, P. Pathwise Monotone Geometric Bodies in the Plane and Their Placements. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2009, Kočovce, Október 2009. STU, Bratislava, str. 120 - 127. ISBN 978-80-227-3141-6

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

[ABK10] AHN, H.-K., BRASS, P., KNAUER, Ch., NA, H.-S., SHIN, Ch.-S. Covering a Simple Polygon by Monotone Directions. In *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2010, Vol. 43, No. 5, pp. 514-523. ISSN:0925-7721

[ACO02] AHN, H.-K., CHEONG, O., VAN OOSTRUM, R. Casting a Polyhedron with Directional Uncertainty. In *Proceedings of the 13th Annual International Symposium on Algorithms and Computation*, ISAAC 2002, Vancouver, BC, Canada, 2002. ISBN 3-540-00142-5

[AHN02] ASANO, T., HERNÁNDEZ-BARRERA, A., NANDY, S. C. Translating a convex polyhedron over monotone polyhedra. In *Computational Geometry*, Vol. 23, No. 3, 2002, pp. 257-269, ISSN:0925-7721

[BBP04] BALAS, E., BOCKMAYR, A., PISARUK, N. WOLSEY,L. On Unions and Dominants of Polytopes. In *Mathematical Programming 99*, 2004, pp. 223-239. ISSN: 0025-5610

[BHK07] BURKE E. K., HELLIER R. S. R., KENDALL G., WHITWELL G. Complete and robust no-fit polygon generation for the irregular stock cutting problem. In *European journal of operational research*, Vol. 179, No. 1, 2007, pp. 27-49, ISSN: 0377-2217

[BK05] BOSE, P., VAN KREVELD, M. Generalizing Monotonicity: On Recognizing Special Classes of Polygons and Polyhedra. In *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 2005, Vol. 15, No 6, pp. 591-606, ISSN: 0218-1959

[BMS09] BOSE, P., MORIN, P., SMID, M., WUHRER, S. Rotationally monotone polygons. In *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2009, Vol 42, No. 5, pp. 471-483, ISSN: 0925-7721

[CCH89] CHVÁTAL, V., COOK, W., HARTMAN, M. On cutting-plane proofs in combinatorial optimization. In *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier sciennce publishing Inc., 1989, Vol. 114-115, pp. 455-499

[CFG01] CHALMOVIANSKÝ, P., FERKO, A., GALBAVÝ, R., NIEPEL, Ľ. *Zložitosť geometrických algoritmov*, FMFI UK, Bratislava, 2001. ISBN 80-223-1598-2

[Boz92] BOŽEK, M. On Dense Placements of Plane Figures. In *Proceedings of the Eighth Spring School on Computer Graphics and Its Applications*, Bratislava, Máj 1992. Univerzita Komenského, Bratislava, str. 13 - 20.

[Boz94] BOŽEK, M. On Dense Placements of Polygons. In *Proceedings of the Tenth Spring School on Computer Graphics*, Bratislava, Jún 1994. Univerzita Komenského, Bratislava, str. 233 - 239.

[Boz95] BOŽEK, M. On Component of Dense Placements of Polygons. In *Proceedings of the Eleventh Spring Conference on Computer Graphics*, Bratislava, Jún 1995. Univerzita Komenského, Bratislava, str. GM-7 - GM-11.

[Boz01] BOŽEK, M. Comparision of Two Concepts for Non-overlapping of Plane Figures. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2001, Kočovce, September 2001. STU, Bratislava, str. 18 - 22. ISBN 80-227-1632-4

[Boz02] BOŽEK, M. On Periodical Placements of Polygons. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2002, Kočovce, Október 2002. STU, Bratislava, str. 13 - 16. ISBN 80-227-1773-8

[Boz03] BOŽEK, M. On Periodical Placements With Symmetries. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2003, Kočovce, September 2003. STU, Bratislava, str. 129 - 132. ISBN 80-227-1914-5

[Boz05] BOŽEK, M. On Dense Placements of Monotone Polygons. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2005, Kočovce, September 2005. STU, Bratislava, str. 8 - 13. ISBN 80-227-2278-2

[Boz09] BOŽEK, M. On Dense Placements of Star-shaped Polygons. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2009, Kočovce, Október 2009. STU, Bratislava, str. 27 - 32. ISBN 978-80-227-3141-6

[BT95] BOSE P., TOUSSAINT G. Geometric and computational aspects of gravity casting. In *Computer Aided Design*, 2004, Vol. 27, No. 6, pp. 455-464. ISSN 0010-4485

[BV04] BOŽEK, M., VRANKOVÁ, E. Geometria pomáha technológiám. In *G -Slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, ročník 1, číslo 1, 2004. STU, Bratislava, str. 17 - 34. ISSN 1336-524X

[BY98] BOISSONNAT, J.-D., YVINEC, M. *Algorithmic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-56322.

[Eng85] ENGELKING, R.: *General Topology*. Second edition. Państwowe wydawnictvo naukove, Warszawa 1985, ISBN 3-88538-006-4

[Hef91] HEFFERNAN, J. P. Linear-time algorithms for weakly-monotone polygons. In *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1991, Vol. 3., No. 3., pp. 121-137. ISSN:0925-7721

[Her97] HERNANDEZ-BARRERA, A.. Computing the Minkowski Sum of Monotone Polygons. In *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, 1997, Vol. E80-D, No. 2., pp. 218-222. ISSN: 0916-8532

[HTT08] HURTADO, F., TOUSSAINT., G. T., TRIAS, J. On Polyhedra Induced by Point Sets in Space. In *Discrete Applied Mathematics*, 2008, Vol. 156, No. 1, pp. 42-54. ISSN: 0166-218X

[HYH06] HA, J. S. - YOO, K.H. – HAHN, J. K. Characterization of polyhedron monotonicity. In *Computer-Aided Design*, 2006, Vol. 38, No. 1, pp. 48-54. ISSN: 0010-4485

[KT03] KASHIWABARA K. - TAKABATAKE T. Polyhedra with submodular support functions and their unbalanced simultaneous exchangeability. In *Discrete Applied Mathematics*, 2003, Vol. 131, No. 2, pp. 433-448. ISSN: 0166-218X

[MD93] MILENKOVIC, V. – DANIELS, K. - LI Z.. Placement and Compaction of Non Convex Polygons for Clothing Manufacturer. In *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, 1993, pp. 153-162. ISBN:0-89791-582-8

[OS06] OKS, E. – SHARIR, M. Minkowski Sums of Monotone and General Simple Polygons. In *Discrete and Computational Geometry*, 2006, Vol. 35, No. 2, pp. 223-240, ISSN: 0179-5376

[PS83] PREPARATA, F. – SUPOWIT, K. A. Testing a Simple Polygon for Monotonicity In *Information Proc. Letters*, 1983, Vol. 12, No. 4, pp.161-164

[TG84] TOUSSAINT, G. T. - EL GINDY H. A. Separation of Two Monotone Polygons in Linear Time. In *Robotica*, Vol. 2, 1984

[Tom06] TOMCZIKOVÁ, S.: *Minkowského operace a jejich aplikace*. Dizertačná práca. FAV ZCU, Plzeň, 2006

[Tou85] TOUSSAINT G. T. Movable separability of sets. In *Computational Geometry*, 1985, pp. 335-375

[Vra00] VRANKOVÁ, E. *Konštrukcia množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov využitím stredovej súmernosti metódou zjednotenia*. Dizertačná práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 2000

[Vra03] VRANKOVÁ, E. Ukážka použitia množiny $D(M, N)$ pri plánovaní pohybu robota. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2003, Kočovce, September 2003. STU, Bratislava, str. 129 - 132. ISBN 80-227-1914-5

[Vra05] VRANKOVÁ, E. Niektoré vlastnosti množiny hustých rozmiestení zhodných mnohouholníkov. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG*' 2005, Kočovce, September 2005. STU, Bratislava, str. 87 - 92. ISBN 80-227-2278-2

[Wag88] WAGENER, H. Triangulating a monotone polygon in paralell. In *Proceedings on International Workshop on Computational Geometry on Computational Geometry and its Applications*, 1988, pp. 136-147, ISBN: 0-387-50335-8

[Wil98] WILLARD, S. *General Topology*, University of Alberta, Dower Puplications, Inc., Mineola, New York, 1998. ISBN 0-486-43479-6.

[ZSS95] ZHU CH., SUNDARAM G., SNOEYINK J., MITCHELL J. S. B. Generating random polygons with given vertices. In *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1996, Vol. 6, No. 5, pp. 277-290. ISSN:0925-7721

SUMMARY

In the presented Ph.D. thesis, we focus on generalization of notion of monotone polygon to bodies in the Euclidean space of arbitrary dimension from the point of view of their dense placements. We have proved that, under some additional assumptions, the set $D(M, N)$ of all dense placements (with respect to translations) of two normally monotone geometric bodies with convex bases, is the boundary of the set $I(M, N)$ of all intersections (with respect to translations) of the bodies M and N. The result is relevant from the perspective of time complexity of algorithms for computing of all translations which move a body M in a contact position with respect to a fixed body N.