Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Lucia Škripková

Autoreferát dizertačnej práce

Stabilita systémov diferenciálnych, diferenčných a integro-diferenciálnych rovníc

definovaných komutujúcimi maticami

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
9.1.9. aplikovaná matematika

Miesto a dátum:

Dizertačná práca bola vypracovaná
v dennej forme doktorandského štúdia

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského

Predkladateľ: **Mgr. Lucia Škripková**
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: **prof. RNDr. Milan Medveď, DrSc.**

Oponenti: ....
....
....
....
....
....
(meno a priezvisko oponenta s uvedením jeho titulov a hodností
a názov ustanovizne, s ktorou je oponent v pracovnom pomere)

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....
(uviesť dátum vymenovania)

9.1.9. aplikovaná matematika

na ....
(presná adresa miesta konania obhajoby dizertačnej práce)

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Úvod

Diferenciálne rovnice tvoria rozsiahlu oblasť v teórii matematickej analýzy. Venuje sa im pozornosť, pretože sa pomocou nich modeluje mnoho fyzikálnych javov. V posledných rokoch sa špeciálny záujem dostal diferenciálnym rovniciam s oneskorením. Pre ne je vybudovaná pomerne rozsiahla teória, napr. v knihách [9,10]. Pokračujúci trend študovania rovníc s oneskorením rozširuje aj čoraz väčší záujem o frakcionálne diferenciálne rovnice. V súčasnosti sa tejto problematike na Slovensku venuje Podlubný, ktorý rozpracoval túto tému vo svojej monografii [21]. Ako uvádza, začiatky zlomkového kalkulu vedú do roku 1695. Vtedy položil L'Hospital zásadnú otázku Lebnizovi: „Čo ak v $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}$ položíme $n = \frac{1}{2}$?“ Ten hneď zareagoval a odpovedal, že to povedie k paradoxu, od ktorého raz budú odvodené užitočné dôsledky. Od tohto okamihu sa začali zaujímať o derivovanie neceločíselného rádu viacerí matematici, spomeňme napríklad Bernoulliho, Eulera, Abela, Riemanna i Fouriera, ktorý zovšeobecnil pojem derivovania pre ľubovoľné funkcie. Mnohí z nich definovali vlastnú zlomkovú deriváciu, preto máme v súčasnoti bohatý výber definícií. Až Liouville pristúpil na definovanie zlomkového integrálu zľava a sprava. Aj vďaka tomu je najpoužívanejšou definíciou zlomkového integrálu práve Riemann-Liouvilleova definícia. V práci používame aj Caputovu definíciu zlomkovej derivácie, tá lepšie modeluje pamäťové a dedičné vlastnosti rôznych materiálov vo fyzikálnych modeloch. Toto sú hlavné výhody frakcionálnych diferenciálnych rovníc. Jednou z najpoužívanejších metód pri riešení takýchto rovníc je Laplaceova transformácia. Pri tomto postupe treba nájsť inverznú Laplaceovu transformáciu vhodnej funkcie, čím sa riešenia dostávajú v tvare špeciálnych funkcií, ako napr. Mittag-Lefflerova, či Wrightova funkcia. Pre výsledky uvedené v práci sme nepotrebovali použiť túto metódu.

V práci uvažujeme začiatočné úlohy, ktoré majú lineárnu časť tvaru

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad t \geq 0, \tag{0.1}$$

kde $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie, $x \in \mathbb{R}^n$. Predpokladáme, že matice A, B typu $n \times n$ sú komutujúce, t.j. spĺňajúce rovnosť $AB = BA$. Množina M_n všetkých reálnych $n \times n$ matíc obsahuje širokú triedu matíc, ktoré komutujú s danou maticou A. Množina Z_A takých matíc sa nazýva centralizátor algebry M_n. Orbita $\mathrm{Orb}(A)$ matice A, t.j. množina všetkých matíc z M_n, podobných s maticou A je hladká podvarieta množiny M_n rovnakej kodimenzie akú má centralizátor Z_A (pozri [2, Lema 4, Časť 30, C] alebo [5, Dôsledok 9.8, str. 152]). Nutné a postačujúce podmienky pre množinu matíc komutujúcich s danou maticou A môžeme nájsť v práci [6]. Všimnime si, že ak v rovnici (0.1) položíme za maticu B nulovú maticu, teda $B = \Theta$, dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu. Pre takéto rovnice je už vypracovaná rozsiahla teória (napr. [4, 11, 16]). Odtiaľ vieme, že fundamentálnu maticu môžeme vyjadriť v tvare exponenty matice. Pri vyšetrovaní stability riešení rovnice (0.1) s $B = \Theta$ stačí poznať vlastné čísla danej matice A. Pre úlohy s $B \neq \Theta$, je určenie stability náročnejšie. Takisto aj riešenie nelineárnych diferenciálnych rovníc, ktoré nájdeme pomocou metódy variácie konštánt, má zložitejší tvar. V práci využívame reprezentáciu riešenia pomocou funkcie e_τ^{Bt}, tzv. oneskorenej exponenty matice B. Definícia tejto funkcie a jej vlastnosti sú podrobnejšie opísané v článkoch [7, 8, 12]. Aplikovaním integrálnych nerovností, ako sú Gronwallova, Bihariho a Pintova nerovnosť spolu s ich diskrétnymi verziami [1, 3, 14, 20], dokazujeme postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia pre rôzne typy nelineárnych diferenciálnych a diferenčných rovníc definovaných komutujúcimi maticami. Potrebné definície, tvrdenia a nerovnosti sú uvedené v prvej časti práce. V druhej kapitole študujeme postačujúce podmienky pre stabilitu nelineárnych diferenciálnych rovníc s konštantným oneskorením. Postupne uvažujeme rôzne typy nelineárnych častí pravých strán, kde je aj nelinearita závislá od oneskorenia. V prípade takýchto začiatočných úloh využívame metódu uvedenú v článkoch [15, 17]. Ide o ohraničenie oneskoreného člena pomocou supréma funkcie. Niektoré výsledky z tejto časti boli publikované v článku [19]. V tretej kapitole skúmame vlastnosti integro-diferenciálnych rovníc. Uvažujeme rôzne typy začiatočných úloh, v ktorých pripúšťame aj člen so zlomkovým integrálom, resp. integrálom so singulárnym jadrom. Preto bolo nutné, pri vyšetrovaní stability týchto úloh, použiť metódu tzv. desingularizácie, teda odstránenie singulárneho jadra, uvedenú v práci [15]. Na takéto typy úloh bola táto metóda použitá prvýkrát. Dosiahnuté výsledky prezentujeme na príklade frakcionálneho kyvadla. V ďalšej časti venujeme svoju pozornosť začiatočným úlohám so zlomkovou deriváciou. Majú tvar

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}\left[h(t)\left(\dot{x}(t)-Ax(t)-Bx(t-\tau)\right)\right] &= F(t), \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \\ \dot{x}(0^{+}) &= x_0. \end{aligned}$$

Dôležitú úlohu v tomto systéme má funkcia $h \in C\left([0,\infty), \mathbb{R}\backslash\{0\}\right)$. Ide o stabilizačný faktor. Bez prítomnosti tejto funkcie sa nepodarilo nájsť postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia. Pomocou integrálnych nerovností dokážeme stabilitu pre rôzne typy nelineárnej funkcie F závislej od x aj pre takéto úlohy. V poslednej kapitole študujeme stabilitu diferenčných rovníc tvaru

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bx(k-m) + f(x(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_0^{\infty} \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^{0}, \end{aligned}$$

kde matice A, B sú typu $n \times n$, $m \geq 1$ je konštantné oneskorenie a f je daná spojitá, nelineárna funkcia. V článkoch [7, 8] sa autori venovali nájdeniu riešenia nehomogénnej úlohy. Riešenie vyjadrili pomocou funkcie e_m^{Bk}, tzv. diskrétnej oneskorenej exponenty matice B. Túto reprezentáciu riešenia aplikujeme na dané systémy. Použitie postačujúcich podmienok ilustrujeme na príklade populačného dynamického systému. Výsledky z tejto časti boli publikované v článku [18].

Dosiahnuté výsledky

V práci študujeme nelineárne diferenciálne rovnice s oneskorením, integro-diferenciálne rovnice, frakcionálne diferenciálne rovnice a diferenčné rovnice. Ukážeme postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia nelineárnych systémov takýchto typov rovníc. V tejto časti stručne naznačíme dosiahnuté výsledky. Tvrdenia uvedieme bez podrobnejších dôkazov, ktoré sú detailne prevedené v dizertačnej práci.

1 Základné vety a definície

V tejto kapitole uvádzame potrebný matematický aparát a definujeme označenie, ktoré v práci používame.

Definícia 1.0.1. Oneskorenou exponentou matice B, nazveme funkciu definovanú, ako

$$\mathrm{e}_{\tau}^{Bt} = \begin{cases} \Theta, & t < -\tau, \\ \mathbb{I}, & -\tau \leq t < 0, \\ \mathbb{I} + Bt + B^2\frac{(t-\tau)^2}{2} + \cdots + B^k\frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

kde $\mathbb{I}$ je identická matica a symbolom Θ označíme nulovú maticu. Konštanta $\tau > 0$ reprezentuje oneskorenie. Podobne, diskrétna oneskorená exponenta matice B je funkcia

$$\mathrm{e}_{m}^{Bk} = \begin{cases} \Theta, & k < -m, \\ \mathbb{I} + \sum\limits_{j=1}^{l} B^j \binom{k-(j-1)m}{j}, & k \in \mathbb{Z}_{(l-1)(m+1)+1}^{l(m+1)}, l \in \mathbb{Z}_0^{\infty}, \end{cases}$$

kde pod symbolom $\mathbb{Z}_s^q$ budeme rozumieť pre $s, q \in \mathbb{Z}$ také, že $s < q$, množinu celých čísel definovanú nasledovne $\mathbb{Z}_s^q := \{s, s+1, \ldots, q\}$.

Lema 1.0.2. *Pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\|\mathrm{e}_{\tau}^{Bt}\| \leq \mathrm{e}^{\|B\|(t+\tau)}.$$

Lema 1.0.3. *Nech $m \geq 1$ je konštantné oneskorenie. Potom pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí nasledujúca nerovnosť*

$$\|\mathrm{e}_{m}^{Bk}\| \leq \mathrm{e}^{\|B\|(k+m)}. \tag{1.1}$$

Definícia 1.0.4. Pod Riemannovým-Liouvilleovým integrálom funkcie $x \in C([0,\infty))$ v bode $t \in [0,\infty)$ rádu α rozumieme integál

$$I^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s,$$

kde $0 < \alpha < 1$.

Definícia 1.0.5. Pod Caputovou deriváciou funkcie $x \in C^1([0,\infty))$ v bode $t \in [0,\infty)$ rádu α rozumieme hodnotu

$${}^{C}D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

kde $0 < \alpha < 1$, $x(t) \in C^1([0,\infty))$ a $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.

Lema 1.0.6 ([16])**.** *Nech má matica A typu $n \times n$ vlastné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, pre ktoré platí:* $\operatorname{Re}\lambda_i \leq -k < 0$, *pre $i = 1, \ldots, n$. Potom existuje číslo $K > 0$ také, že pre všetky $t \geq 0$ platí:*

$$\|\mathrm{e}^{At}\| \leq K\mathrm{e}^{-kt}. \tag{1.2}$$

Definícia 1.0.7. Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a $l_1, \ldots, l_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že $f(x) = o(\|x\|^{l_1} + \cdots + \|x\|^{l_k})$, ak

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^{l_1} + \cdots + \|x\|^{l_k}} = 0.$$

Definícia 1.0.8. Nech $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a $l_1, \ldots, l_k, n_1, \ldots, n_r > 0$ pre $k, r \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že $f(x,y) = o(\|x\|^{l_1} + \cdots + \|x\|^{l_k} + \|y\|^{n_1} + \cdots + \|y\|^{n_r})$, ak

$$\lim_{\substack{\|x\|\to 0\\ \|y\|\to 0}} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\|^{l_1} + \cdots + \|x\|^{l_k} + \|y\|^{n_1} + \cdots + \|y\|^{n_r}} = 0.$$

Lema 1.0.9. *Nech $0 \leq \alpha < 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladná konštanta $C = C(\alpha,\beta)$ taká, že*

$$\int_0^t s^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}s \leq \begin{cases} C\mathrm{e}^{\beta t}, & \textit{pre} \quad \beta > 0 \\ C(t+1), & \textit{pre} \quad \beta = 0 \\ C, & \textit{pre} \quad \beta < 0. \end{cases}$$

Definícia 1.0.10. Nech funkcie $\omega_1, \omega_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sú spojité, nezáporné a neklesajúce na intervale $[0,\infty)$, pričom sú kladné na intervale $(0,\infty)$. Symbolom $\omega_1 \propto \omega_2$ označujeme, že funkcia $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ je neklesajúca na $(0,\infty)$.

2 Diferenciálne rovnice s oneskorením

V tejto časti študujeme rôzne systémy nelineárnych diferenciálnych rovníc. Dokážeme jednu z hlavných kvalitatívnych vlastností, a to exponenciálnu stabilitu triviálnych riešení takýchto rovníc pre rôzne typy nelineárnej funkcie.

Zameriame sa na začiatočnú úlohu tvaru

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + F(t), \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$
$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \tag{2.2}$$

kde matice A, B typu $n \times n$ spolu komutujú, t.j. platí $AB = BA$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie. Postupne ukážeme, že triviálne riešenie začiatočnej úlohy (2.1), (2.2) je asymptoticky, presnejšie exponenciálne stabilné, v závislosti od voľby funkcie F. Vychádzame z práce [12], kde autori našli reprezentáciu riešenia začiatočnej úlohy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad t \geq 0 \tag{2.3}$$
$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{2.4}$$

ktorá má tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)}\mathrm{e}_\tau^{B_1 t}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)}(\varphi'(s) - A\varphi(s))\mathrm{d}s.$$

kde $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau}B$ a funkcia e_τ^{Bt} je tzv. oneskorená exponenta matice. Na nájdenie riešenia začiatočnej úlohy (2.1), (2.2), použili autori metódu variácie konštánt. Dostali ho v tvare

$$\begin{aligned} x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)}\mathrm{e}_\tau^{B_1 t}\varphi(-\tau) &+ \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)}\left(\varphi'(s) - A\varphi(s)\right)\mathrm{d}s \\ &+ \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)}F(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pre rôzne typy nelineárnej funkcie F závislej od x ukážeme postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia rovnice (2.1) v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 2.0.1. Riešenie $x_\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ rovnice (2.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku (2.2) nazveme exponenciálne stabilné, ak existujú kladné konštanty c_1, c_2, δ závislé od A, B, F a $\|\varphi\|_1$, kde $\|\varphi\|_1 = \max_{-\tau\leq t\leq 0}\|\varphi(t)\| + \max_{-\tau\leq t\leq 0}\|\varphi'(t)\|$ také, že pre $t \geq 0$ platí

$$\|x_\psi - x_\varphi\| \leq c_1\mathrm{e}^{-c_2 t}$$

pre každé riešenie x_ψ rovnice (2.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$x_\psi(t) = \psi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0$$

a $\|\psi - \varphi\|_1 < \delta$.

2.1 Úlohy s nelinearitou nezávislou od oneskorenia

Uvažujeme začiatočnú úlohu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t)), \quad t \geq 0 \tag{2.6}$$
$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{2.7}$$

kde A, B sú komutujúce matice typu $n \times n$, $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie, $\varphi : [-\tau, 0) \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sú dané spojité funkcie. Riešenie tejto úlohy, nájdené pomocou metódy variácie konštánt, má tvar (porovnaj s (2.5))

$$\begin{aligned} x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)}\mathrm{e}_\tau^{B_1 t}\varphi(-\tau) &+ \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)}(\varphi'(s) - A\varphi(s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)}f(x(s))\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Veta 2.1.1. *Nech matice A, B typu $n \times n$ spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Ďalej nech $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau} B$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \cdots \leq \operatorname{Re}\lambda_n \leq -k < 0.$$

Predpokladajme, že $f(x) = o(\|x\|)$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (2.6) *exponenciálne stabilné.*

Veta 2.1.2. *Nech sú matice A, B a B_1 definované ako vo Vete 2.1.1. Predpokladajme, že $f(x) = o(\|x\|^{\alpha})$ pre $\alpha > 1$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice* (2.6) *exponenciálne stabilné.*

Veta 2.1.3. *Nech sú matice A, B a B_1 definované ako vo Vete 2.1.1. Predpokladajme, že $f(x) = o(\|x\|^{\alpha_1} + \cdots + \|x\|^{\alpha_a})$ pre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a > 1$, $1 < a \in \mathbb{N}$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice* (2.6) *exponenciálne stabilné.*

2.2 Úlohy s nelinearitou závislou od oneskorenia

V tejto časti skúmame vlastnosti začiatočnej úlohy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)), \quad t \geq 0 \tag{2.9}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{2.10}$$

kde A, B sú komutujúce matice typu $n \times n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [-\tau, 0) \to \mathbb{R}^n$ sú dané spojité funkcie a $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie. Pomocou metódy variácie konštánt nájdeme riešenie

$$\begin{aligned} x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)} \mathrm{e}_{\tau}^{B_1 t} \varphi(-\tau) &+ \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)} \mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)} (\varphi'(s) - A\varphi(s)) \mathrm{d}s \\ &+ \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)} \mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)} f(x(s), x(s-\tau)) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ďalej dokážeme, že triviálne riešenie rovnice (2.9) je exponenciálne stabilné za rôznych predpokladov na funkciu f.

Veta 2.2.1. *Nech matice A, B typu $n \times n$ spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Ďalej nech $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau} B$ a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \cdots \leq \operatorname{Re}\lambda_n \leq -k < 0.$$

Predpokladajme, že $f(x, y) = o\left(\|x\| + \|y\|\right)$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (2.9) *exponenciálne stabilné.*

Veta 2.2.2. *Nech sú matice A, B a B_1 ako vo Vete 2.2.1. Predpokladajme, že*

$$f(x, y) = o\left(\|x\|^{\alpha_1} + \|y\|^{\alpha_2}\right)$$

pre $\alpha_1, \alpha_2 > 1$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (2.9) *exponenciálne stabilné.*

Veta 2.2.3. *Nech sú matice A, B a B_1 definované ako vo Vete 2.2.1. Predpokladajme, že $f(x, y) = o\left(\|x\|^{\alpha_1} + \cdots + \|x\|^{\alpha_a} + \|y\|^{\beta_1} + \cdots + \|y\|^{\beta_b}\right)$ pre $\alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b > 1$ a $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b > 2$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice* (2.9) *exponenciálne stabilné.*

3 Integro-diferenciálne rovnice

3.1 Úlohy s pravou stranou bez oneskorenia

V tejto kapitole študujeme začiatočnú úlohu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t)\int_0^t (t-s)^{-\alpha} h(s,x(s))\mathrm{d}s, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

kde matica A je typu $n \times n$, $0 < \alpha < 1$ a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sú dané spojité funkcie, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je konštanta. Riešenie úlohy (3.1), (3.2) nájdeme pomocou metódy variácie konštánt a dostaneme

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 + \int_0^t \int_0^\tau \mathrm{e}^{A(t-\tau)} F(\tau)(\tau - s)^{-\alpha} h(s,x(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.3}$$

Voľbou rôznych typov nelineárnej funkcie na pravej strane rovnice (3.1) dokážeme postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 3.1.1. Riešenie $x_{x_0} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (3.1) nazveme (lokálne) exponenciálne stabilné, ak existujú kladné konštanty c_1, c_2, δ závislé od A, F, h a x_0 také, že pre každé $t \geq 0$ platí

$$\|x_{x_0} - x_{y_0}\| \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_2 t} \tag{3.4}$$

pre každé riešenie x_{y_0} rovnice (3.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku $x_{y_0}(0) = y_0$ a $\|x_0 - y_0\| < \delta$. Ak nerovnosť (3.4) platí pre každé $y_0 \in \mathbb{R}^n$, potom hovoríme o globálnej exponenciálnej stabilite.

Uvedieme v práci dokázané tvrdenia.

Veta 3.1.2. *Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A typu $n \times n$, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \cdots \leq \operatorname{Re}\lambda_n \leq -k < 0.$$

Ďalej nech existujú konštanty $r, \rho > 0$ a spojitá, nezáporná, neklesajúca funkcia R taká, že $|F(t)| \leq r\mathrm{e}^{-\rho t}$, $\|h(t,x)\| \leq R(t)\|x\|$ pre každé $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Predpokladajme, že

$$\int_1^\infty s\mathrm{e}^{(k-\rho)s} R(s)\mathrm{d}s < \infty.$$

Potom je triviálne riešenie rovnice (3.1) *globálne exponenciálne stabilné.*

Veta 3.1.3. *Nech je matica A definovaná ako vo Vete 3.1.2. Ďalej nech existujú konštanty $r, \rho > 0$ a spojitá, nezáporná, neklesajúca funkcia R taká, že $|F(t)| \leq r\mathrm{e}^{-\rho t}$, $\|h(t,x)\| \leq R(t)\|x\|^m$, $m > 1$ pre každé $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, spĺňajúce*

$$\int_1^\infty s\mathrm{e}^{(k-\rho)s} R(s)\mathrm{d}s < \infty.$$

Potom je triviálne riešenie rovnice (3.1) *exponenciálne stabilné.*

Veta 3.1.4. *Predpokladajme, že matica A je definovaná ako vo Vete 3.1.2. Nech existujú $r, \rho > 0$ a spojité, nezáporné, neklesajúce funkcie R_i, $i = 1, \ldots, a$ také, že $|F(t)| \leq r\mathrm{e}^{-\rho t}$, $\|h(t,x)\| \leq \sum_{i=1}^a R_i(t)\|x\|^{\alpha_i}$, kde $\alpha_i > 1$ pre každé $i = 1, \ldots, a$, $1 < a \in \mathbb{N}$ pre $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ a spĺňajúce*

$$\int_1^\infty s\mathrm{e}^{(k-\rho)s} R_i(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad i = 1, \ldots, a.$$

Potom je triviálne riešenie rovnice (3.1) *exponenciálne stabilné.*

3.2 Úlohy s pravou stranou obsahujúcou Riemannov-Liouvilleov integrál

Teraz uvažujeme začiatočnú úlohu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t (t-s)^{-\alpha} h(s, x(s))\mathrm{d}s\right), \quad t \geq 0 \tag{3.5}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.6}$$

kde $0 < \alpha < 1$, matica A je typu $n \times n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sú dané spojité funkcie. Riešenie tejto úlohy, nájdené pomocou metódy variácie konštánt, má tvar

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} h(s, x(s))\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\tau \,. \tag{3.7}$$

Ukážeme, že pre rôzne predpoklady na funkciu f dostaneme exponenciálnu stabilitu triviálneho riešenia rovnice (3.5).

Veta 3.2.1. *Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A typu $n \times n$, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \cdots \leq \operatorname{Re} \lambda_n \leq -k < 0.$$

Ďalej nech existujú $r, \rho > 0$ a spojité, nezáporné funkcie R_1, R_2 také, že $\|f(t,u,v)\| \leq R_1(t)\|u\| + r\mathrm{e}^{-\rho t}\|v\|$, $\|h(t,x)\| \leq R_2(t)\|x\|$, naviac R_2 je neklesajúca pre každé $t \geq 0$, $u, v, x \in \mathbb{R}^n$ a spĺňajúce

$$\int_0^\infty R_1(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad \int_1^\infty s\mathrm{e}^{(k-\rho)s} R_2(s)\mathrm{d}s < \infty.$$

Potom je triviálne riešenie rovnice (3.5) *globálne exponenciálne stabilné.*

Veta 3.2.2. *Nech je matica A definovaná ako vo Vete 3.2.1. Ďalej nech existujú konštanty $r, \rho > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ a spojité, nezáporné, neklesajúce funkcie R_1, R_2 také, že*

$$\|f(t,u,v)\| \leq R_1(t)\|u\|^{\alpha_1} + r\mathrm{e}^{-\rho t}\|v\|, \quad \|h(t,x)\| \leq R_2(t)\|x\|^{\alpha_2}$$

pre každé $t \geq 0$, $u, v, x \in \mathbb{R}^n$, spĺňajúce

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-\alpha_1)ks} R_1(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad \int_1^\infty s\mathrm{e}^{(k-\rho)s} R_2(s)\mathrm{d}s < \infty.$$

Potom je triviálne riešenie rovnice (3.5) *exponenciálne stabilné.*

3.3 Úlohy s pravou stranou závislou od oneskorenia

Teraz uvažujeme začiatočnú úlohu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f\left(t, x(t), x(t-\tau), \int_0^t (t-s)^{-\alpha} h(s, x(s), x(s-\tau))\mathrm{d}s\right), \tag{3.8}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{3.9}$$

kde $0 < \alpha < 1$, matice A, B typu $n \times n$ spĺňajú rovnosť $AB = BA$ a $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sú dané spojité funkcie. Riešenie tejto úlohy, nájdené pomocou metódy variácie konštánt, má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{A(t+\tau)} \mathrm{e}_\tau^{B_1 t} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \mathrm{e}^{A(t-s)} \mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)} \left(\varphi'(s) - A\varphi(s)\right) \mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} \mathrm{e}_\tau^{B_1(t-\tau-s)} f\left(s, x(s), x(s-\tau), \int_0^s (s-z)^{-\alpha} h(z, x(z), x(z-\tau))\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.10}$$

V nasledujúcom tvrdení ukážeme exponenciálnu stabilitu triviálneho riešenia rovnice (3.8).

Veta 3.3.1. *Nech sú matice A, B typu $n \times n$ komutujúce a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \le \operatorname{Re}\lambda_2 \le \cdots \le \operatorname{Re}\lambda_n \le -k < 0.$$

Ďalej nech $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau}B$, kde $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie. Predpokladajme, že existujú konštanty $r, \rho > 0$ a spojité, nezáporné funkcie $R_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ také, že

$$\|f(t,x,y,z)\| \le R_1(t)\left(\|x\| + \|y\|\right) + r\mathrm{e}^{-\rho t}\|z\|, \quad \|h(t,x,y)\| \le R_2(t)\left(\|x\| + \|y\|\right)$$

pre každé $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, spĺňajúce

$$\int_0^\infty R_1(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad \int_1^\infty s\mathrm{e}^{-(\|B_1\|-k+\rho)s}R_2(s)\mathrm{d}s < \infty,$$

pričom funkcia R_2 je navyše neklesajúca. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (3.8) *globálne exponenciálne stabilné.*

3.4 Aplikácia

Uvažujeme rovnicu s Caputovou deriváciou:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + b^2x + l(t)^C\mathrm{D}^\alpha[g(t)x(t)] = F(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{3.11}$$

kde $c, b > 0$ sú parametre charakterizujúce uvedený systém. Ďalej $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie a $0 < \alpha < 1$. Funkcia F je spojitá a l, g sú spojité, nezáporné také, že:

1. $\|F(t,x,y)\| \le R_1(t)\left(\|x\| + \|y\|\right)$, kde R_1 je spojitá, nezáporná funkcia,
2. $\|l(t)\| \le L\mathrm{e}^{-\rho t}$, kde $L, \rho > 0$.

Predpokladajme, že

$$\int_1^\infty s\mathrm{e}^{(\|B_1\|-k+\rho)s}R_2(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad \int_0^\infty R_1(s)\mathrm{d}s < \infty,$$

kde $R_2(t) := \sqrt{2}\sup_{0\le\sigma\le t}\max\{|\dot{g}(\sigma)|, |g(\sigma)|\}$, čo je neklesajúca funkcia. Rovnicu (3.11) prepíšeme na systém rovníc, potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -b^2x_1 - cx_2 - l(t)^C\mathrm{D}^\alpha[g(t)x_1(t)] + F(t, x_1(t), y_1(t)).
\end{aligned}$$

Matice A, B majú v tomto prípade tvar: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -c \end{pmatrix}$. Pre funkciu

$$f\left(t, x_1, y_1, \int_0^t (t-s)^{-\alpha}h(s, x_1(s), x_2(s))\mathrm{d}s\right) := $$
$$F(t, x_1, y_1) - \frac{l(t)}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}[\dot{g}(s)x_1(s) + g(s)x_2(s)]\mathrm{d}s.$$

platí odhad normy

$$\left\| f\left(t, x_1, y_1, \int_0^t (t-s)^{-\alpha}h(s, x_1(s), x_2(s))\mathrm{d}s\right)\right\|$$
$$\le R_1(t)\left(\|x_1\| + \|y_1\|\right) + r\mathrm{e}^{-\rho t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}R_2(s)\|x(s)\|\mathrm{d}s,$$

kde $r := -\frac{L}{\Gamma(\alpha-1)}$. Nájdeme vlastné čísla matice A, tie majú tvar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4b^2}}{2}.$$

Odtiaľ dostaneme $k := -\operatorname{Re}\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4b^2}}{2}\right) > 0$. Z Vety 3.3.1 a predpokladov dostaneme, že triviálne riešenie rovnice (3.11) je exponenciálne stabilné.

4 Frakcionálne diferenciálne rovnice

V tejto časti venujeme pozornosť nasledujúcej začiatočnej úlohe

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}\left[h(t)\left(\dot{x}(t)-Ax(t)-Bx(t-\tau)\right)\right] &= F(t), \quad t \geq 0 && (4.1)\\
x(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 && (4.2)\\
\dot{x}(0^{+}) &= x_0, && (4.3)
\end{aligned}
$$

pre $0<\alpha<1$, $\varphi \in C^{1}\left([-\tau,0],\mathbb{R}^{n}\right)$, $h \in C\left([0,\infty),\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)$, $F \in C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n}\right)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^{n}$. Predpokladáme, že matice A, B spolu komutujú, t.j. spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Riešenie tohto systému nájdeme preformulovaním úlohy pomocou substitúcie

$$y(t) = h(t)\left(\dot{x}(t)-Ax(t)-Bx(t-\tau)\right).$$

Dostaneme tak novú začiatočnú úlohu

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathrm{D}^{\alpha}y(t) &= F(t), \quad t \geq 0 && (4.4)\\
y(0) &= h(0)\left(x_0 - A\varphi(0) - B\varphi(-\tau)\right). && (4.5)
\end{aligned}
$$

Riešenie tejto úlohy so zlomkovou deriváciou nájdeme metódou uvedenou v článku [13] a dostaneme

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F(s)\mathrm{d}s.$$

Odtiaľ dostaneme pre riešenie x nasledujúcu začiatočnú úlohu

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) &+ \frac{h(0)}{h(t)}\left(x_0 - A\varphi(0) - B\varphi(-\tau)\right)\\
&+ \frac{1}{h(t)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.6)\\
x(t) &= \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Riešenie tejto úlohy nájdeme pomocou metódy variácie konštánt. Využijeme reprezentáciu riešenia pomocou oneskorenej exponenty, uvedenú v článku [12]. Potom má riešenie tvar

$$
\begin{aligned}
x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1 t}\varphi(-\tau) &+ \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)}\left(\varphi'(s) - A\varphi(s)\right)\mathrm{d}s\\
&+ \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)}\frac{h(0)}{h(s)}\left(x_0 - A\varphi(0) - B\varphi(-\tau)\right)\mathrm{d}s \qquad (4.8)\\
&+ \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)}\frac{1}{h(s)\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-z)^{\alpha-1}F(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

kde $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau}B$. Nájdeme postačujúce podmienky exponenciálnej stability triviálneho riešenia rovnice (4.1) v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 4.0.1. Riešenie $x_{\varphi,x_0} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n}$ rovnice (4.1) spĺňajúce začiatočné podmienky (4.2), (4.3) nazveme exponenciálne stabilné, ak existujú kladné konštanty c_1, c_2, δ závislé od A, B, F, x_0 a $\|\varphi\|_1 = \max_{[-\tau,0]}\|\varphi(t)\| + \max_{[-\tau,0]}\|\varphi'(t)\|$ také, že pre každé $t \geq 0$ platí

$$\|x_{\psi,y_0}(t) - x_{\varphi,x_0}(t)\| \leq c_1\mathrm{e}^{-c_2 t} \qquad (4.9)$$

pre každé riešenie $x_{\psi,y_0}(t)$ rovnice (4.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku $x_{\psi,y_0}(t) = \psi(t)$ pre $-\tau \leq t \leq 0$ a $\dot{x}_{\psi,y_0}(0^{+}) = y_0$, kde $\|\psi - \varphi\|_1 < \delta$, $\|x_0 - y_0\| < \delta$. Ak nerovnosť (4.9) platí pre každé $y_0 \in \mathbb{R}^{n}$, $\psi \in C^{1}\left([-\tau,0],\mathbb{R}^{n}\right)$, potom hovoríme o globálnej exponenciálnej stabilite.

4.1 Frakcionálne rovnice s pravou stranou bez oneskorenia

V tejto časti uvádzame niekoľko tvrdení o exponenciálnej stabilite triviálneho riešenia rovnice (4.1).

Veta 4.1.1. *Nech matice A, B typu $n \times n$ spolu komutujú a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re}\lambda_n \leq -k < 0.$$

Ďalej nech $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau}B$, kde $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie. Predpokladajme, že existuje konštanta $P > 0$ taká, že $\|F(t)\| \leq P$ pre každé $t \geq 0$. Nech existujú konštanty $r > 0$, $\gamma > 1 + k - \|B_1\|$ také, že $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ pre každé $t \geq 0$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (4.1) *globálne exponenciálne stabilné.*

Veta 4.1.2. *Predpokladajme, že matice A, B a B_1 sú ako vo Vete 4.1.1. Nech v rovnici* (4.1) *je $F(t) = f(t, x(t))$, kde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t,x) = o(\|x\|)$ a existujú konštanty $r > 0$, $\gamma > 1 - \|B_1\| + k$ také, že $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ pre každé $t \geq 0$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice* (4.1) *exponenciálne stabilné.*

Veta 4.1.3. *Nech sú matice A, B a B_1 ako vo Vete 4.1.1 a v rovnici* (4.1) *je $F(t) = f(t, x(t))$, kde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ďalej nech pre $\alpha_0 > 1$ je $f(t,x) = o(\|x\|^{\alpha_0})$ a existujú konštanty $r > 0$, $\gamma > 1 - \|B_1\| + k$ také, že $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ pre všetky $t \geq 0$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice* (4.1) *exponenciálne stabilné.*

4.2 Frakcionálne rovnice s pravou stranou závislou od oneskorenia

V tejto kapitole uvažujeme začiatočnú úlohu

$$^{C}\mathrm{D}^{\alpha}\left[h(t)\left(\dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-\tau)\right)\right] = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \geq 0 \tag{4.10}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \tag{4.11}$$

$$\dot{x}(0^+) = x_0, \tag{4.12}$$

pre $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $h \in C([0,\infty), \mathbb{R}\backslash\{0\})$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a nech $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je ľubovoľná konštanta. Predpokladáme, že matice A, B spolu komutujú, t.j. spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Všimnime si, že konštantné oneskorenie $\tau > 0$ vystupuje aj v danej spojitej funkcii f. Pomocou metódy variácie konštánt nájdeme riešenie začiatočnej úlohy (4.10), (4.11), (4.12). Vyjadríme ho pomocou oneskorenej exponenty matice v tvare:

$$\begin{aligned} x(t) = \mathrm{e}^{A(t+\tau)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1 t}\varphi(-\tau) &+ \int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)}\left(\varphi'(s) - A\varphi(s)\right)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)}\frac{h(0)}{h(s)}\left(x_0 - A\varphi(0) - B\varphi(-\tau)\right)\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\mathrm{e}_{\tau}^{B_1(t-\tau-s)} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)h(s)}\int_0^s (s-z)^{\alpha-1}f(z, x(z), x(z-\tau))\mathrm{d}z\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ďalej uvádzame niekoľko tvrdení o exponenciálnej stabilite triviálneho riešenia rovnice (4.10) s rôznou voľbou nelineárnej funkcie f.

Veta 4.2.1. *Nech matice A, B typu $n \times n$ spĺňajú rovnosť $AB = BA$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A, pre ktoré platí:*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re}\lambda_n \leq -k < 0.$$

Ďalej nech $B_1 = \mathrm{e}^{-A\tau}B$, kde $\tau > 0$ je konštantné oneskorenie a nech existujú konštanty $r > 0$, $\gamma > 1 + k - \|B_1\|$ také, že $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ pre každé $t \geq 0$. Predpokladajme, že $f(t,x,y) = o(\|x\| + \|y\|)$. Ak $\|B_1\| < k$, potom je triviálne riešenie rovnice (4.10) *exponenciálne stabilné.*

Veta 4.2.2. *Nech sú matice* A, B *a* B_1 *ako vo Vete 4.2.1. Ďalej nech pre* $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ *platí* $f(t,x,y) = o(\|x\|^{\alpha_1} + \|y\|^{\alpha_2})$. *Predpokladajme, že existujú konštanty* $r > 0$, $\gamma > 1 + k - \|B_1\|$ *také, že* $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ *pre všetky* $t \geq 0$. *Ak* $\|B_1\| < k$, *potom je triviálne riešenie rovnice* (4.10) *exponenciálne stabilné.*

Veta 4.2.3. *Nech sú matice* A, B *a* B_1 *ako vo Vete 4.2.1. Ďalej nech existujú konštanty* $r > 0, \gamma > 1 - \|B_1\| + k$ *také, že* $\frac{1}{|h(t)|} \leq r\mathrm{e}^{-\gamma t}$ *pre všetky* $t \geq 0$. *Predpokladajme, že pre* $\alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b > 1$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b > 2$, *platí*

$$f(t,x,y) = o\left(\|x\|^{\alpha_1} + \cdots + \|x\|^{\alpha_a} + \|y\|^{\beta_1} + \cdots + \|y\|^{\beta_b}\right).$$

Ak $\|B_1\| < k$, *potom je triviálne riešenie rovnice* (4.10) *exponenciálne stabilné.*

5 Diferenčné rovnice

V tejto kapitole študujeme diskrétne problémy. Definujeme súčet $\sum_{i=a}^{b} f_i = 0$, ak $b < a$ a súčin $\prod_{i=a}^{b} f_i = 1$, ak $b < a$. Ďalej využijeme odhad, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, kde A je matica typu $n \times n$. Zameriame sa na diferenčné rovnice typu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(x(k), x(k-m)), \quad k \in \mathbb{Z}_0^\infty, \tag{5.1}$$

$$x(k) = \varphi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^0, \tag{5.2}$$

kde $m \geq 1$ je konštantné oneskorenie, $\varphi : \mathbb{Z}_{-m}^0 \to \mathbb{R}^n$ je začiatočná funkcia a $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je daná spojitá funkcia. Ďalej predpokladáme, že konštantné matice A, B spolu komutujú, t.j. spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Pri hľadaní riešenia rovnice (5.1) vychádzame z článku [8]. Autori v ňom skúmajú začiatočnú úlohu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(k), \quad k \in \mathbb{Z}_0^\infty,$$

$$x(k) = \varphi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^0$$

pre $f : \mathbb{Z}_0^\infty \to \mathbb{R}^n$, ktorej riešenie našli pomocou metódy variácie konštánt. To má tvar:

$$x(k) = A^{k+m}\mathrm{e}_m^{B_1 k}\varphi(-m) + \sum_{j=-m+1}^{0} A^{k-j}\mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)}\left(\varphi(j) - A\varphi(j-1)\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} A^{k-j}\mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)} f(j-1), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^\infty,$$

kde $B_1 = A^{-1}BA^{-m}$. Pomocou metódy variácie konštánt nájdeme riešenie rovnice (5.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku (5.2). Použijeme reprezentáciu riešenia pomocou funkcie e_m^{Bk}. Dokážeme, že triviálne riešenie rovnice (5.1) je pre rôzne typy nelinearít exponenciálne stabilné v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 5.0.1. Nech $m \geq 1$ a funkcia $\varphi : \mathbb{Z}_{-m}^0 \to \mathbb{R}^n$ je daná. Riešenie $x_\varphi(k)$ rovnice (5.1) spĺňajúce začiatočnú podmienku (5.2) nazývame exponenciálne stabilné, ak existujú konštanty $c_1, c_2, \delta > 0$ závislé od A, B a $\|\varphi\| = \max_{k \in \mathbb{Z}_{-m}^0} \|\varphi(k)\|$, také, že

$$\|x_\varphi(k) - x_\psi(k)\| \leq c_1\mathrm{e}^{-c_2 k}, \quad k \geq 0,$$

pre každé riešenie $x_\psi(k)$ rovnice (5.1) spĺňajúce podmienku

$$x_\psi(k) = \psi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^0$$

pre ψ také, že $\|\varphi - \psi\| < \delta$.

5.1 Úlohy s nelinearitou nezávislou od oneskorenia

Uvažujeme začiatočnú úlohu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(x(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_0^\infty, \tag{5.3}$$

$$x(k) = \varphi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^0. \tag{5.4}$$

Riešenie úlohy (5.3), (5.4), nájdené metódou variácie konštánt, má tvar

$$\begin{aligned} x(k) = A^{k+m} \mathrm{e}_m^{B_1 k} \varphi(-m) + \sum_{j=-m+1}^{0} A^{k-j} \mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)} \left(\varphi(j) - A\varphi(j-1)\right) \\ + \sum_{j=1}^{k} A^{k-j} \mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)} f(x(j-1)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

V nasledujúcich tvrdeniach dokážeme exponenciálnu stabilitu triviálneho riešenia rovnice (5.3).

Veta 5.1.1. *Nech sú matice A, B typu $n \times n$ komutujúce. Ďalej nech $B_1 = A^{-1}BA^{-m}$ a $f(x) = o(\|x\|)$. Ak $\|A\|\mathrm{e}^{\|B_1\|} < 1$, potom je triviálne riešenie rovnice* (5.3) *exponenciálne stabilné.*

Veta 5.1.2. *Nech sú matice A, B a B_1 ako vo Vete 5.1.1. Ďalej nech $f(x) = o(\|x\|^\alpha)$ pre $\alpha > 1$. Ak $\|A\|\mathrm{e}^{\|B_1\|} < 1$, potom je triviálne riešenie rovnice* (5.3) *exponenciálne stabilné.*

5.2 Úlohy s nelinearitou závislou od oneskorenia

Uvažujeme začiatočnú úlohu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(x(k), x(k-m)), \quad k \in \mathbb{Z}_0^\infty \tag{5.6}$$

$$x(k) = \varphi(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{-m}^0, \tag{5.7}$$

kde $m \geq 1$ je konštantné oneskorenie, $\varphi : \mathbb{Z}_{-m}^0 \to \mathbb{R}^n$ je začiatočná funkcia, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je daná funkcia a matice A, B spolu komutujú. Riešenie tohto problému nájdeme pomocou metódy variácie konštánt. Má tvar:

$$\begin{aligned} x(k) = A^{k+m} \mathrm{e}_m^{B_1 k} \varphi(-m) + \sum_{j=-m+1}^{0} A^{k-j} \mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)} \left(\varphi(j) - A\varphi(j-1)\right) \\ + \sum_{j=1}^{k} A^{k-j} \mathrm{e}_m^{B_1(k-m-j)} f(x(j-1), x(j-m-1)). \end{aligned} \tag{5.8}$$

V nasledujúcich tvrdeniach dokážeme exponenciálnu stabilitu triviálneho riešenia rovnice (5.6) pre rôzne typy nelineárít.

Veta 5.2.1. *Nech matice A, B typu $n \times n$ spĺňajú rovnosť $AB = BA$. Ďalej nech $B_1 = A^{-1}BA^{-m}$ a $f(x, y) = o(\|x\| + \|y\|)$. Ak $\|A\|\mathrm{e}^{\|B_1\|} < 1$, potom je triviálne riešenie rovnice* (5.6) *exponenciálne stabilné.*

Veta 5.2.2. *Nech $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ a matice A, B a B_1 sú ako vo Vete 5.2.1. Predpokladajme, že $f(x, y) = o(\|x\|^{\alpha_1} + \|y\|^{\alpha_2})$. Ak $\|A\|\mathrm{e}^{\|B_1\|} < 1$, potom je triviálne riešenie rovnice* (5.6) *exponenciálne stabilné.*

Veta 5.2.3. *Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b > 1$ sú dané konštanty také, že $\alpha_i \neq \alpha_j$ a $\beta_k \neq \beta_l$ pre $i \neq j$, $k \neq l$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b > 2$. Ďalej nech matice A, B a B_1 sú ako vo Vete 5.2.1. Predpokladajme, že*

$$f(x, y) = o\left(\|x\|^{\alpha_1} + \cdots + \|x\|^{\alpha_a} + \|y\|^{\beta_1} + \cdots + \|y\|^{\beta_b}\right).$$

Ak $\|A\|\mathrm{e}^{\|B_1\|} < 1$, potom je triviálne riešenie rovnice (5.6) *exponenciálne stabilné.*

5.3 Populačný model

Uvažujeme logistický model opisujúci dynamiku populácií s pripustením oneskorenej pôrodnosti:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}(k) &= x_n(k)\left[1-\alpha-\gamma_1 y_n(k) - r\left(x_n(k-m)+y_n(k-m)\right)\right] + \varepsilon_1 x_n(k-m)\\
y_{n+1}(k) &= y_n(k)\left[1-\beta+\gamma_2 x_n(k) - r\left(x_n(k-m)+y_n(k-m)\right)\right] + \varepsilon_2 y_n(k-m),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

kde $\alpha, \beta \in \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $\alpha \leq \beta$ sú koeficienty úmrtnosti, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ reprezentujú vzájomné vzťahy medzi populáciami a $r > 0$ je logistický člen vyjadrujúci kapacitu prostredia. Koeficienty oneskoreného rastu sú dané $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Matice A, B majú v tomto prípade tvar: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{smallmatrix}\right)$. Pre funkciu $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$
f(x,y) = \left(-\gamma_1 x_1 x_2 - r x_1 y_1 - r x_1 y_2, \gamma_2 x_1 x_2 - r x_2 y_1 - r x_2 y_2\right)
$$

existuje konštanta $C > 0$ taká, že platí

$$
\|f(x,y)\| \leq C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
$$

Pre splnenie predpokladov Vety 5.2.2 využijeme nasledujúcu lemu.

Lema 5.3.1. *Nech $\beta > 1$ je ľubovoľná konštanta a $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je daná spojitá funkcia. Ak $f(x,y) = O\left(\|x\|^\beta + \|y\|^\beta\right)$, potom $f(x,y) = o\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha\right)$ pre každé $1 \leq \alpha < \beta$.*

Teraz nájdeme maticu $B_1 = A^{-1} B A^{-m}$,

$$
B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{(1-\alpha)^{m+1}} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{(1-\beta)^{m+1}} \end{pmatrix}.
$$

Použitím Frobeniovej normy $\|x\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |x_{ij}|^2}$ dostaneme pre normu matice A odhad

$$
\|A\| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2} \leq \sqrt{2(1-\alpha)^2} = \sqrt{2}(1-\alpha) < 1,
$$

lebo $\alpha \leq \beta$. Ďalej pre maticu B_1 platí

$$
\|B_1\| = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{(1-\alpha)^{2(m+1)}} + \frac{\varepsilon_2^2}{(1-\beta)^{2(m+1)}}} \leq \frac{\sqrt{2\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\beta)^{2(m+1)}}} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{(1-\beta)^{m+1}},
$$

kde $\varepsilon := \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Teraz určíme $\|A\| e^{\|B_1\|}$. Potom dostaneme vzťah

$$
\|A\| e^{\|B_1\|} = \sqrt{2}(1-\alpha) \exp\left\{\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{(1-\beta)^{m+1}}\right\}.
$$

Odtiaľ dostaneme, že ak

$$
\varepsilon < \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}(1-\alpha)}\right)(1-\beta)^{m+1}}{\sqrt{2}},
$$

potom je triviálne riešenie exponenciálne stabilné. Výsledok hovorí, že ak je malá pôrodnosť, tak sa obe populácie blížia, za predpokladu malého počtu jedincov v štartovacom okamihu, exponenciálne k nule. Inak povedané, exponenciálne vymierajú.

Summary

In the thesis, we have studied nonlinear delay differential equations, integrodifferential equations, fractional differential equations and difference equations. We have used the solutions of nonlinear delay equations represented in terms of delayed matrix exponential and discrete delayed matrix exponential derived by the method of steps in recent papers. Applying integral inequalities, such as Gronwall's, Bihari's and Pinto's inequality and their discrete versions, we have proved sufficient conditions for the exponential stability of the trivial solution for different types of nonlinearities in these equations, assuming the linear parts be given by permutable matrices. For the fist time, problems related to singular kernel in fractional differential equations were treated by the use of the desingularization method for nonlinear integral inequalities with weakly singular kernel. We have added some applications for the sufficient conditions of the exponential stability of the trivial solutions for these equations.

Literatúra

[1] Agarwal, R. *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, 2000.

[2] Arnol'd, V. *Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations*. Springer, 1988.

[3] Bihari, I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 7*, 1 (1956), 81–94.

[4] Chicone, C. *Ordinary Differential Equations With Applications*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1999.

[5] Chow, S., Li, C., and Wang, D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.

[6] De la Sen, M. Necessary and sufficient condition for a set of matrices to commute. *Applied Mathematical Sciences 3*, 48 (2009), 2397–2410.

[7] Diblík, J., and Khusainov, D. Representation of solutions of discrete delayed system $x(k+1) = ax(k) + bx(k-m) + f(k)$ with commutative matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 318*, 1 (2006), 63–76.

[8] Diblík, J., and Khusainov, D. Y. Representation of solutions of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay. *Advances in Difference Equations 2006* (2006), Article ID 80825, 13 pages.

[9] Driver, R. *Ordinary and delay differential equations*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1977.

[10] Hale, J. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.

[11] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial Mathematics, Mar. 2002.

[12] Khusainov, D., and Shuklin, G. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Studies of University in Žilina Mathematical Series 17*, 1 (2003), 101–108.

[13] Lakshmikantham, V., and Vatsala, A. Basic theory of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 69*, 8 (2008), 2677–2682.

[14] Medina, R., and Pinto, M. *Nonlinear discrete inequalities and stability of difference equations.* Inequalities and applications. World Sci. Publ., 1994, pp. 467–482.

[15] Medveď, M. A new approach to an analysis of henry type inequalities and their bihari type versions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 214 (1997), 349–366.

[16] Medveď, M. *Dynamické systémy.* Univerzita Komenského Bratislava, 2000.

[17] Medveď, M. Integral inequalities and global solutions of semilinear evolution equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267 (2002), 643–650.

[18] Medveď, M., and Škripková, L. Sufficient conditions for the exponential stability of delay difference equations with linear parts defined by permutable matrices. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 22 (2012), 1–13.

[19] Medveď, M., Pospíšil, M., and Škripková, L. Stability and the nonexistence of blowing-up solutions of nonlinear delay systems with linear parts defined by permutable matrices. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 74*, 12 (2011), 3903–3911.

[20] Pinto, M. Integral inequalities of Bihari-type and applications. *Funkcialaj Ekvacioj 33* (1990), 387–403.

[21] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1999.

Zoznam publikovaných prác

M. Medved', M. Pospíšil, L. Škripková, Stability and the nonexistence of blowing-up solutions of nonlinear delay systems with linear parts defined by permutable matrices, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74** (2011), 3903–3911.

Citácie:

- A. Boichuk, J. Diblík, D. Khusainov, M. Růžičková, Boundary-Value Problems for Weakly Nonlinear Delay Differential Systems, *Abstract and Applied Analysis*, **2011** (2011), Article ID 631412, 19 pages.

- J. Baštinec, G. Piddubna, Solutions and stability of solutions of a linear differential matrix system with delay, *Mathematical Models and Methods in Modern Science*, WSEAS Press, Puerto De La Cruz, Spain 2011, 94-99.

M. Medved', L. Škripková, Sufficient conditions for the exponential stability of delay difference equations with linear parts defined by permutable matrices, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **22** (2012), 1–13.