Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Mgr. Tomáš Rusin

Autoreferát dizertačnej práce

GEOMETRICKÉ A TOPOLOGICKÉ VLASTNOSTI HLADKÝCH VARIET A FIBRÁCIÍ SO ZAMERANÍM NA CHARAKTERISTICKÝ RANG KÁNONICKEJ VEKTOROVEJ FIBRÁCIE NAD ORIENTOVANOU GRASSMANNOVOU VARIETOU

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia
1116 geometria a topológia

Bratislava, 2016

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Predkladateľ:	Mgr. Tomáš Rusin Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave Mlynská dolina 842 48 Bratislava 4
Školiteľ:	prof. RNDr. Július Korbaš, CSc. KAGDM FMFI UK v Bratislave Mlynská dolina 842 48 Bratislava 4
Oponenti:	....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....
študijného odboru 1116 geometria a topológia
na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI, UK,
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
Katedra algebry, geometrie a
didaktiky matematiky,
FMFI UK v Bratislave,
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4

Úvod

Pri skúmaní $\mathbb{Z}_2$-kohomologickej dĺžky variet neorientovane kobordantných nule J. Korbaš [11] dokázal nasledovné tvrdenie.

Veta 1. [11, Theorem 1.1] *Nech M je súvislá uzavretá varieta dimenzie d neorientovane kobordantná nule. Nech $\widetilde{H}^r(M;\mathbb{Z}_2)$, $r < d$, je prvá nenulová redukovaná kohomologická grupa variety M. Nech z ($z < d-1$) je celé číslo také, že pre $j \leq z$ sa každý prvok v $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach variety M. Potom platí*

$$\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}_2}(M) \leq 1 + \frac{d-z-1}{r}. \tag{1}$$

Tento výsledok podnietil zavedenie nového homotopického invariantu nazývaného *charakteristický rang*, ktorý reprezentuje najväčšiu hodnotu z, ktorá spĺňa predpoklady vety 1 pre danú súvislú uzavretú varietu M.

Definícia 1. [11, str. 70] *Charakteristický rang* uzavretej súvislej hladkej variety M dimenzie d, označovaný $\mathrm{charrank}(M)$, je najväčšie celé číslo k, $0 \leq k \leq d$, také, že pre $j \leq k$ sa každý prvok v $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach variety M.

Je zrejmé, že na optimálne použitie nerovnosti (1) je potrebné dosadiť hodnotu $z = \mathrm{charrank}(M)$. Výpočet tohto invariantu však vo všeobecnosti predstavuje náročný problém.

V článku [11] tieto úvahy viedli k novým horným ohraničeniam $\mathbb{Z}_2$-kohomologickej dĺžky orientovaných Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,k}$ orientovaných k-rozmerných podpriestorov v $\mathbb{R}^n$ a pre $\widetilde{G}_{2^t-1,3}$ ($t \geq 3$) k presnej hodnote $\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}) = 2^t - 3$ (túto hodnotu nezávisle od neho vypočítal inou metódou T. Fukaya [7]).

Pojem charakteristického rangu *variety* bol neskôr zovšeobecnený v článku A. C. Naolekara a A. S. Thakura [19] na pojem charakteristického rangu *vektorovej fibrácie*.

Definícia 2. [19, Definition 1.1] Nech X je konečný súvislý CW-komplex a ξ je vektorová fibrácia nad X. *Charakteristický rang fibrácie* ξ, označovaný $\operatorname{charrank}(\xi)$, je najväčšie celé číslo k, $0 \leq k \leq \dim(X)$ také, že pre $j \leq k$ sa každý prvok v $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach fibrácie ξ.

Charakteristický rang fibrácie vystupuje v nasledovnej adaptácii vety 1.

Veta 2. [19, Theorem 1.2] *Nech M je súvislá uzavretá varieta dimenzie d. Nech ξ je vektorová fibrácia nad M taká, že existuje j, $j \leq \operatorname{charrank}(\xi)$ také, že každý monóm $w_{i_1}(\xi), \dots w_{i_r}(\xi)$ pre $0 \leq i_t \leq j$ ležiaci v dimenzii d je nulový. Potom*

$$\operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(M) \leq 1 + \frac{d-j-1}{r_M}, \tag{2}$$

kde r_M je najmenšie kladné číslo, také, že $\widetilde{H}^{r_M}(M;\mathbb{Z}_2) \neq 0$.

Z hľadiska výpočtu $\mathbb{Z}_2$-kohomologickej dĺžky orientovaných Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,k}$ sa práve skúmanie charakteristického rangu kánonickej orientovanej fibrácie $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ nad $\widetilde{G}_{n,k}$ ukazuje ako veľmi sľubný prístup. Prvé výsledky v tomto smere priniesol článok J. Korbaša [12], v ktorom sú odvodené dolné odhady charakteristického rangu $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ a jeho presné hodnoty pre $n = 2^t - i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ a $k = 3, 4$. Tieto výsledky vylepšujú horné odhady $\mathbb{Z}_2$-kohomologickej dĺžky zodpovedajúcich variet $\widetilde{G}_{n,k}$ a pre $\widetilde{G}_{2^t,3}$ ($t \geq 3$) dokonca implikujú presnú hodnotu $\operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t,3}) = 2^t - 3$.

V dizertačnej práci sa zameriame na pokračovanie skúmania charakteristického rangu kánonickej orientovanej fibrácie s cieľom prehĺbiť poznatky v tomto smere vylepšením dolných odhadov charakteristického rangu $\widetilde{\gamma}_{n,k}$, najmä pre prípad $k = 3$, kde takto získané odhady poskytnú nové informácie o $\mathbb{Z}_2$-kohomologickej dĺžke variet $\widetilde{G}_{n,3}$ a v istých prípadoch postačia na opis ich kohomologického okruhu.

Zhrnutie obsahu práce

Kohomologický okruh orientovaných Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,k}$ je do veľkej miery neznámy; výnimka sú sféry $\widetilde{G}_{n,1} \cong S^{n-1}$ a variety $\widetilde{G}_{n,2}$. Pre $k \geq 3$ dôležitú informáciu poskytuje nasledujúca úvaha.

Orientovaná Grassmannova varieta $\widetilde{G}_{n,k}$ $(3 \leq k \leq n-k)$ je dvojnásobné univerzálne nakrytie Grassmannovej variety $G_{n,k}$ pozostávajúcej z (neorientovaných) k-rozmerných podpriestorov v $\mathbb{R}^n$. Označme príslušné nakrývajúce zobrazenie $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$. Potom máme nasledovnú Gysinovu exaktnú postupnosť [18, Corollary 12.3] pre kohomologické grupy s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$

$$\cdots \xrightarrow{\psi} H^{j-1}(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} H^j(G_{n,k}) \xrightarrow{p^*} H^j(\widetilde{G}_{n,k}) \xrightarrow{\psi} H^j(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} \cdots \quad (3)$$

v ktorej $H^{j-1}(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} H^j(G_{n,k})$ označuje homomorfizmus daný násobením prvou Stiefelovou-Whitneyho triedou $w_1(\xi)$ asociovanej netriviálnej priamkovej fibrácie ξ určenej nakrytím $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$. O tejto triede sa ukáže, že je nenulová a teda rovná prvej Stiefelovej-Whitneyho triede $w_1(\gamma_{n,k})$ kánonickej fibrácie $\gamma_{n,k}$ nad $G_{n,k}$.

Keďže $\mathbb{Z}_2$-kohomologický okruh Grassmannovej variety $G_{n,k}$ ([4]) pozostáva z kohomologických tried, z ktorých každá je vyjadriteľná ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach $w_i(\gamma_{n,k})$ kánonickej fibrácie $\gamma_{n,k}$, a homomorfizmus p^* zobrazuje $w_i(\gamma_{n,k})$ na $w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k})$, charakteristický rang kánonickej fibrácie $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ je potom najväčšie celé číslo q, také, že $p^* : H^j(G_{n,k}) \to H^j(\widetilde{G}_{n,k})$ je surjekcia pre $0 \leq j \leq q$.

Vďaka exaktnosti postupnosti (3), overovať surjektívnosť homomorfizmu $p^* : H^j(G_{n,k}) \to H^j(\widetilde{G}_{n,k})$ znamená overovať injektívnosť homomorfizmu $w_1 : H^j(G_{n,k}) \to H^{j+1}(G_{n,k})$.

V dizertačnej práci na tento účel používame prístup opísaný v článku s J. Korbašom [13] založený na využití vhodnej bázy (poz. [9]) $\mathbb{Z}_2$-vektorového priestoru $H^j(G_{n,k})$.

Podrobný rozbor v tomto smere priniesol zaujímavé výsledky, ktoré možno zhrnúť nasledovne. Pre variety $\widetilde{G}_{6,3}, \widetilde{G}_{7,3}, \widetilde{G}_{8,3}, \widetilde{G}_{9,3}, \widetilde{G}_{10,3}, \widetilde{G}_{11,3}$ sme opísali všetky ich kohomologické grupy (s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$). Pre $t \geq 4$ máme

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,3}) \begin{cases} \geq 2^t - 5, & \text{ak } 2^{t-1} + 2^{t-2} \leq n \leq 2^t - 4, \\ = 2^t - 5, & \text{ak } 2^t - 3 \leq n \leq 2^t - 1, \quad [12] \\ = 2^t - 2, & \text{ak } n = 2^t, \quad [12] \\ = 2^t + 1, & \text{ak } n = 2^t + 1, \\ = 2^t + 4, & \text{ak } n = 2^t + 2, \\ = 2^t + 7, & \text{ak } n = 2^t + 3, \\ \geq n + 4, & \text{ak } 2^t + 4 \leq n < 2^t + 2^{t-1}. \end{cases}$$

Pre $\mathbb{Z}_2$-kohomologickú dĺžku z toho vyplýva nasledujúce (pre $t \geq 4$):

$$\begin{aligned} \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+1,3}) &= 2^t - 3, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2,3}) &= 2^t - 3, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+3,3}) &= 2^t - 3. \end{aligned}$$

Nakoniec, pre $t \geq 4$ máme

$$\begin{aligned} \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2^{t-1}+1,3}) &= 2^t + 2^{t-2}, & \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t+2^{t-1}+1,3}) &= 2^{t+1} - 5, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2^{t-1}+2,3}) &= 2^t + 2^{t-2} + 1, & \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t+2^{t-1}+2,3}) &= 2^{t+1} - 5. \end{aligned}$$

Summary

In his study of the $\mathbb{Z}_2$-cup-length of zero-cobordant manifolds, J. Korbaš [11] introduced a new homotopy invariant, called the *characteristic rank* of a connected closed smooth manifold, and obtained new upper bounds for the $\mathbb{Z}_2$-cup-length of the oriented Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{n,k}$ of oriented k-dimensional subspaces in Euclidean space $\mathbb{R}^n$, and for $\widetilde{G}_{2^t-1,3}$ he determined the exact value $\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}) = 2^t - 3$ (also proved, independently, by T. Fukaya [7]).

The notion of characteristic rank of a manifold was later generalized by A. C. Naolekar and A. S. Thakur [19] by defining the characteristic rank of a real vector bundle over a connected finite CW-complex.

Studies of the characteristic rank of the canonical vector bundle $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ over the oriented Grassmann manifold $\widetilde{G}_{n,k}$ proved fruitful as J. Korbaš [12] derived interesting lower bounds for the characteristic rank of $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ and its exact values for $n = 2^t - i, i \in \{0,1,2,3\}$ and $k = 3$ or 4. These results implied that $\mathrm{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t,3}) = 2^t - 3$.

In this thesis, we continue the study of the characteristic rank of $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ with emphasis on the case $k = 3$.

Our approach is based upon the following observation. The oriented Grassmann manifold $\widetilde{G}_{n,k}$ is a double cover of the Grassmann manifold $G_{n,k}$ of (unoriented) k-dimensional subspaces in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Let us denote $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$ the covering projection . Then we have an associated Gysin

exact sequence [18, Corollary 12.3] with $\mathbb{Z}_2$ coefficients

$$\cdots \xrightarrow{\psi} H^{j-1}(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} H^j(G_{n,k}) \xrightarrow{p^*} H^j(\widetilde{G}_{n,k}) \xrightarrow{\psi} H^j(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} \cdots \quad (4)$$

where $H^{j-1}(G_{n,k}) \xrightarrow{w_1} H^j(G_{n,k})$ denotes a homomorphism given by the cup-product with the first Stiefel-Whitney class $w_1(\xi)$ of a certain nontrivial line bundle ξ, for which $w_1(\xi)$ is equal to the first Stiefel-Whitney class $w_1(\gamma_{n,k})$ of the canonical vector bundle $\gamma_{n,k}$ over the Grassmann manifold $G_{n,k}$.

Since the $\mathbb{Z}_2$-cohomology ring of $G_{n,k}$ ([4]) consists entirely of classes, which can be expressed as polynomials in the Stiefel-Whitney classes $w_i(\gamma_{n,k})$ of the canonical vector bundle $\gamma_{n,k}$, and the homomorphism p^* maps $w_i(\gamma_{n,k})$ to $w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k})$, the characteristic rank of $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ is the greatest integer q, such that $p^* : H^j(G_{n,k}) \to H^j(\widetilde{G}_{n,k})$ is surjective for all j, $0 \leq j \leq q$.

By the exactness of the sequence (4), the last condition is equivalent to homomorphism $w_1 : H^j(G_{n,k}) \to H^{j+1}(G_{n,k})$ being injective for all j, $0 \leq j \leq q$.

So we are faced with the problem of deciding whether the homomorphism (and actually a $\mathbb{Z}_2$-linear map) $w_1 : H^j(G_{n,k}) \to H^{j+1}(G_{n,k})$ is a monomorphism.

To this end, we employ a new approach described in our joint paper with J. Korbaš [13] making use of convenient bases (see [9]) for $\mathbb{Z}_2$-vector spaces $H^j(G_{n,k})$.

Our results can be summarised as follows. For the oriented Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{6,3}, \widetilde{G}_{7,3}, \widetilde{G}_{8,3}, \widetilde{G}_{9,3}, \widetilde{G}_{10,3}, \widetilde{G}_{11,3}$ we describe, in terms of generators, all the cohomology groups with $\mathbb{Z}_2$ coefficients.

In addition, for $t \geq 4$ we have

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,3}) \begin{cases} \geq 2^t - 5, & \text{if } 2^{t-1} + 2^{t-2} \leq n \leq 2^t - 4, \\ = 2^t - 5, & \text{if } 2^t - 3 \leq n \leq 2^t - 1, \qquad [12] \\ = 2^t - 2, & \text{if } n = 2^t, \qquad [12] \\ = 2^t + 1, & \text{if } n = 2^t + 1, \\ = 2^t + 4, & \text{if } n = 2^t + 2, \\ = 2^t + 7, & \text{if } n = 2^t + 3, \\ \geq n + 4, & \text{if } 2^t + 4 \leq n < 2^t + 2^{t-1}, \end{cases}$$

implying the following results on the $\mathbb{Z}_2$-cup-length:

$$\begin{aligned} \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+1,3}) &= 2^t - 3, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2,3}) &= 2^t - 3, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+3,3}) &= 2^t - 3. \end{aligned}$$

Lastly, for $t \geq 4$ we have:

$$\begin{aligned} \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2^{t-1}+1,3}) &= 2^t + 2^{t-2}, & \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t+2^{t-1}+1,3}) &= 2^{t+1} - 5, \\ \operatorname{cup}_{\mathbb{Z}_2}(\widetilde{G}_{2^t+2^{t-1}+2,3}) &= 2^t + 2^{t-2} + 1, & \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t+2^{t-1}+2,3}) &= 2^{t+1} - 5. \end{aligned}$$

Literatúra

[1] Ľ. Balko, J. Korbaš: *A note on the characteristic rank of a smooth manifold*, Proc. Bratislava Topology Symp. "Group Actions and Homogeneous Spaces", Comenius Univ., Sept. 7-11, 2009, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2010, 1-8.

[2] Ľ. Balko, J. Korbaš: *A note on the characteristic rank of null-cobordant manifolds*, Acta Math. Hungar. **140** (2013), 145-150.

[3] G. Andrews: *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976.

[4] A. Borel: *La cohomologie mod* 2 *de certains espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 165-197.

[5] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré: *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs, **103**, American Mathematical Society, 2003.

[6] S. Froloff, L. Elsholz: *Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donnée sur une variété*, Mat. Sb., **42**, 1935, 637-643.

[7] T. Fukaya: *Gröbner bases of oriented Grassmann manifolds*, Homology, Homotopy Appl. **10** (2008), 195-209.

[8] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[9] J. Jaworowski: *An additive basis for the cohomology of real Grassmannians*, Algebraic Topology Poznań 1989, 231-234, Lecture Notes in Math., **1474**, Springer, Berlin, 1991.

[10] J. Korbaš: *Bounds for the cup-length of Poincaré spaces and their applications*. Topology Appl. **153** (2006), 2976-2986.

[11] J. Korbaš: *The cup-length of the oriented Grassmannians vs a new bound for zero-cobordant manifolds*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, **17**, 2010, 69-81.

[12] J. Korbaš: *The characteristic rank and cup-length in oriented Grassmann manifolds*, Osaka J. Math. **52** (2015), 1163-1172.

[13] J. Korbaš, T. Rusin: *On the cohomology of oriented Grassmann manifolds*. Accepted (January 2016) for publication in Homology, Homotopy and Applications.

[14] L. Lusternik, L. Schnirelmann: *Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **189**, 1929, 269–271.

[15] J. P. May: *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1999.

[16] R. Meštrović: *Lucas' theorem: its generalizations, extensions and applications (1878-2014)* arXiv:1409.3820 [math.NT].

[17] J. Milnor: *Some consequences of a theorem of Bott*, Ann. of Math. **68** (1958), 444-449.

[18] J. Milnor; J. Stasheff: *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[19] A. C. Naolekar, A. S. Thakur: *Note on the characteristic rank of vector bundles*, Math. Slovaca **64** (2014), 1525-1540, preprint, arXiv:1209.1507v1 [math.AT] 2012.

[20] E. H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

[21] N. Steenrod: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[22] N. Steenrod, D. Epstein: *Cohomology Operations*, Annals of Mathematics Studies No. 50, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.