Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

RNDr. Edita Rollová

Autoreferát dizertačnej práce

# NOWHERE-ZERO FLOWS AND CIRCUIT COVERS OF GRAPHS AND SIGNED GRAPHS

(NIKDE-NULOVÉ TOKY A POKRYTIA KRUŽNICAMI
NA GRAFOCH A SIGNOVANÝCH GRAFOCH)

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.1.6. diskrétna matematika

Bratislava 2012

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Edita Rollová
Katedra informatiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Katedra informatiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK

Oponenti: Prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc.
Ústav matematických vied, Univerzity P. J. Šafárika

Doc. RNDr. Tomáš Kaiser, Ph.D.
Katedra matematiky, Západočeská univerzita v Plzni

RNDr. Ján Mazák, Ph.D.
Informatický ústav Univerzity Karlovy, Praha

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa ................ o .......... pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ................

v študijnom odbore 9.1.6. diskrétna matematika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, ................................

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

# 1 Úvod

V predkladanej dizertačnej práci sa venujeme niektorým vlastnostiam grafov a signovaných grafov. Nikde-nulové toky a pokrytia grafov kružnicami patria k najintenzívnejšie študovaným problematikám skúmaných na grafoch. Keďže tieto dve témy úzko súvisia [68, 69], bývajú často študované spolu. Ich štúdium je motivované praktickými aplikáciami ako aj dlhodobo otvorenými hypotézami ako sú napr. Tutteove tokové hypotézy [29], či Hypotéza o dvojitom pokrytí kružnicami (tzv. Cycle Double Cover Conjecture) [49, 55].

V tejto práci predstavujeme aj signované grafy, grafy, kde každá hrana je kladná alebo záporná. Takýto typ grafov sa po prvýkrát objavil v psychológii [7], no jeho aplikácie siahajú aj do manažmentu [17, 34], bioinformatiky [1] a všetkých oblastí matematiky [16, 35, 53], [63]–[67]. Štúdium nikde-nulových tokov na signovaných grafoch pochádza z topologickej teórie grafov. Signované grafy totiž predstavujú prirodzený spôsob na opísanie nakrytí grafov na neorientovateľných plochách. Problematika nikde-nulových tokov na signovaných grafoch, ktorú študujeme v tejto práci, je tak zovšeobecnením problematiky nikde-nulových tokov na grafoch. Popri tokoch na signovaných grafoch sa v práci venujeme aj pokrytiam kružnicami. Stanovíme ekvivalentnú definíciu tohto pojmu, známeho a vysoko študovaného na grafoch, pre signované grafy. V práci dokazujeme niekoľko tvrdení o pokrytiach kružnicami na signovaných grafoch a o nikde-nulových tokoch na grafoch a signovaných grafoch.

Práca je založená na nasledujúcich článkoch a rukopisoch.

[I] R. Lukoťka and E. Rollová, *Flows on the join of two graphs*, zaslané na publikáciu.

[II] E. Máčajová, A. Raspaud, E. Rollová and M. Škoviera, *Short signed circuit covers*, rukopis.

[III] E. Máčajová and E. Rollová, *On the flow numbers of signed complete and complete bipartite graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **38** (2011), 591–596.

[IV] E. Máčajová and E. Rollová, *Nowhere-zero flows on signed complete and complete bipartite graphs*, zaslané na publikáciu.

[V] E. Rollová and M. Škoviera, *Nowhere-zero flows in Cartesian bundles of graphs*, Europ. J. Combinatorics **33** (2012), no. 5, 867–871.

# 2 Hlavné výsledky práce

## 2.1 Grafy

Problém existencie nikde-nulového $k$-toku na neorientovanom grafe vieme stručne sformulovať takto. Je možné hrany daného bezmostového grafu orientovať a ohodnotiť celými nenulovými číslami s absolútnou hodnotou menšou ako $k$ tak, aby sa súčet hodnôt vstupujúcich do vrcholu rovnal súčtu hodnôt vystupujúcich z vrcholu? Ak áno, hovoríme, že graf pripúšťa nikde-nulový $k$-tok, pričom najmenšie také $k$, ak existuje, nazývame tokové číslo grafu.

Najviac pozornosti sa v oblasti tokov na grafoch venuje Tutteovej 5-tokovej hypotéze, ktorá stanovuje, že každý bezmostový graf má nikde-nulový 5-tok. Hoci je táto hypotéza otvorená, v danej oblasti sa dosiahol značný pokrok. Najlepšie všeobecné priblíženie doposiaľ dosiahol Seymour [50] v roku 1981, keď dokázal, že hypotéza je pravdivá, ak nahradíme konštantu 5 číslom 6. Okrem iného je známe, aké vlastnosti by mal mať najmenší kontrapríklad [38] a takisto, že hypotéza je pravdivá pre mnoho nekonečných tried grafov s danou súvislosťou rovnako ako aj pre rôzne typy súčinov grafov [23, 26, 51, 71].

V tejto práci rozširujeme tieto výsledky o dva nové – pre šikmé karteziánske súčiny a spojenia grafov. Šikmý karteziánsky súčin dvoch grafov $G$ a $H$ je graf $G \square^{\phi} H$ s vrcholovou množinou $V(G) \times V(H)$, kde dva vrcholy $(v, v')$ a $(w, w')$ sú susedné, ak buď $v = w$ a $v'w' \in E(H)$, alebo $vw \in E(G)$ a $w' = \phi_{vw}(v')$, pričom $\phi\colon D(G) \to \mathrm{Aut}(H)$ je zobrazenie, ktoré každému šípu $z$ grafu $G$ priradí automorfizmus $\phi_z$ grafu $H$ a opačným šípom priradí inverzné automorfizmy. Šikmý karteziánsky súčin je zovšeobecnením karteziánskeho súčinu grafov. Spojenie dvoch grafov $G$ a $H$ je graf $G + H$, ktorý vznikne z disjunktných kópií grafov $G$ a $H$ tak, že spojíme hranou každý vrchol grafu $G$ s každým vrcholom grafu $H$.

V dizertačnej práci prispievame k spomínaným výsledkom pre súčiny grafov dôkazmi nasledujúcich tvrdení.

**Veta 1** ([V]). *Každý šikmý karteziánsky súčin dvoch grafov bez izolovaných vrcholov má nikde-nulový* 4*-tok.*

**Veta 2** ([I]). *Nech $G$ a $H$ sú ľubovoľné dané dva grafy bez slučiek, kde $|V(G)| \leq |V(H)|$. Ak $G = K_1$ a $H$ obsahuje izolované vrcholy, potom spojenie $G + H$ nemá nikde-nulový tok. Inak má spojenie $G + H$ grafov $G$ a $H$ nikde-nulový* 3*-tok, okrem nasledujúcich prípadov, kedy má $G + H$ tokové číslo* 4*:*

- *$G = K_1$ a $H$, ktorý nemá izolované vrcholy, je strom nepárnych kružníc – graf, kde je každý blok kružnicou nepárnej dĺžky.*

- *$G = K_1 \cup K_2$ a $H = n \cdot K_1$, kde $n \geq 2$,*
- *$G = K_2$ a $H = n \cdot K_2$, kde $n \geq 1$,*
- *$G = 2 \cdot K_1$ a $H = K_1 \cup (n \cdot K_2)$, kde $n \geq 1$,*

*pričom $m \cdot L$ označuje graf pozostávajúci z $m$ disjunktných kópií grafu $L$, a $K \cup L$ značí graf pozostávajúci z disjunktného zjednotenia grafov $K$ a $L$.*

## 2.2 Signované grafy

Signovaný graf je graf, ktorého každá hrana má znamienko $+1$ alebo $-1$. Pre daný signovaný graf $G$ a vrchol $v \in V(G)$ definujeme prepnutie vo vrchole $v$ ako zmenu znamienka každej hrany susednej s $v$ na opačné. Ak signovaný graf $H$ dostaneme zo signovaného grafu $G$ sériou prepnutí vo vrcholoch, hovoríme, že $G$ a $H$ sú ekvivalentné.

V signovaných grafoch rozlišujeme dva typy kružníc: balansovaná kružnica je taká, ktorá má párny počet záporných hrán a nebalansovaná je taká, ktorá má nepárny počet záporných hrán. Ak prepneme vo vrchole danej kružnice $C$, zmení sa párny počet znamienok a teda kružnica ostane rovnakého typu. Preto je množina nebalansovaných kružníc invariantom vzhľadom na prepnutie vo vrcholoch. Hovoríme, že signovaný graf je balansovaný, ak neobsahuje nebalansovanú kružnicu a teda je ekvivalentný so všade-kladným signovaným grafom. Balansovaný signovaný graf zodpovedá nesignovanému prípadu.

Dva signované grafy sú izomorfné, ak existuje bijekcia medzi vrcholovými množinami, ktorá zachováva susednosť vrcholov a zobrazuje balansovanú kružnicu na balansovanú a nebalansovanú kružnicu na nebalansovanú.

**NIKDE-NULOVÉ TOKY** Nikde-nulový tok na signovanom grafe vieme zadefinovať rovnako ako pre nesignovaný, potrebujeme však zaviesť orientáciu hrán. Hranu signovaného grafu zorientujeme tak, že každý koniec hrany bude mať osobitnú o-rientáciu, pričom pre kladné hrany je táto orientácia konzistentná (jeden koniec je orientovaný smerom ku koncovému vrcholu a druhý koniec smerom od koncového vrcholu) a pre záporné hrany sú oba konce orientované buď smerom ku koncovým vrcholom alebo do stredu hrany. Nikde-nulový $k$-tok pre orientovaný signovaný graf priradí nenulové hodnoty v absolútnej hodnote menšie ako $k$ hranám tak, že sa súčet vstupujúcich hodnôt pre každý vrchol rovná súčtu vystupujúcich hodnôt. Na rozdiel od nesignovaného prípadu, signovaný graf má nikde-nulový tok, ak je každá jeho hrana obsiahnutá v balansovanej kružnici alebo nebalansovanej dvojkružnici [5]. Nebalansovaná dvojkružnica je súvislý signovaný graf pozostávajúci z dvoch nebalansovaných vrcholovo disjunktných kružníc spojených cestou, ktorá má s týmito kružnicami spoločné iba koncové vrcholy. Táto kružnica môže byť aj nulovej dĺžky, v takom prípade zdieľajú dané kružnice práve jeden vrchol.

Definícia nikde-nulového toku na signovanom grafe nezávisí od orientácie hrán ani od prepnutia vo vrcholoch. Preto majú izomorfné grafy, ktoré pripúšťajú nikde-nulový tok, rovnaké tokové číslo (opäť je to najmenšie $k$, ak existuje, pre ktoré vieme nájsť nikde-nulový $k$-tok na danom signovanom grafe). Tento koncept predstavil ako prvý Bouchet [5], ktorý stanovil aj hlavnú hypotézu, že každý signovaný graf s nikde-nulovým tokom má nikde-nulový 6-tok. Uviedol tiež príklad signovaného grafu, ktorý túto hranicu dosahuje a dokázal, že táto hypotéza platí pre konštantu 216 namiesto 6. Najlepším všeobecným priblížením k tejto hypotéze je výsledok Zýku, ktorý dokázal nikde-nulový 30-tok [72]. V danej oblasti je známych ešte niekoľko výsledkov pre signované grafy s danou súvislosťou [61, 47, 60] a výsledok pre signované eulerovské grafy [41].

V tejto práci dokazujeme nasledujúce tvrdenia, ktoré rozširujú platnosť Bouchetovej hypotézy na ďalšie dve základné triedy signovaných grafov a určujú ich tokové číslo $\Phi$.

**Veta 3** ([III, IV]). *Nech $G$ je signovaný kompletný graf na $n$ vrcholoch, kde $n \geq 3$. Potom*

- *$G$ nemá nikde-nulový tok, ak je ekvivalentný so signovaným grafom s práve jednou zápornou hranou;*
- *$\Phi(G) = 2$ práve vtedy, keď $n$ je nepárne a $G$ má párny počet záporných hrán;*
- *$\Phi(G) = 4$ práve vtedy, keď je ekvivalentný s balansovaným $K_4$ alebo je izomorfný so signovaným $K_5$, kde všetky záporné hrany tvoria 5-cyklus;*
- *$\Phi(G) = 3$ inak.*

**Veta 4** ([III, IV]). *Nech $G$ je signovaný kompletný bipartitný graf s partíciami veľkosti $m$ a $n$, kde $m, n \geq 2$. Potom*

- *$G$ nemá nikde-nulový tok, ak je ekvivalentný so signovaným grafom s práve jednou zápornou hranou;*
- *$\Phi(G) = 2$ práve vtedy, keď majú obe partície párny počet vrcholov a $G$ má párny počet záporných hrán;*

- $\Phi(G) = 4$ *práve vtedy, keď $G$ je izomorfný so signovaným $K_{4,4}$ s nepárnym počtom záporných hrán alebo je izomorfný so signovaným grafom $K_{3,n}$, kde $n \geq 3$ a každý vrchol stupňa 3 susedí najviac s jednou zápornou hranou a vrcholy stupňa $n$ susedia po poradí s 0, 1 a $r$ zápornými hranami pre $1 \leq r \leq n-2$;*

- $\Phi(G) = 3$ *inak.*

**POKRYTIA KRUŽNICAMI** Pre nesignovaný graf $G$ je pokrytie kružnicami grafu $G$ množina kružníc $\mathcal{C}$, teda súvislých grafov s vrcholmi stupňa 2, taká, že každá hrana grafu $G$ je obsiahnutá aspoň v jednej kružnici z $\mathcal{C}$. Takéto pokrytie existuje práve vtedy keď je graf $G$ bezmostový, čo je ekvivalentné s tým, že má nikde-nulový tok. Dĺžka pokrytia $\mathcal{C}$ grafu $G$ je súčet dĺžok kružníc v $\mathcal{C}$. Toto číslo zvyčajne hľadáme minimálne vzhľadom na počet hrán daného grafu a pokrytie s minimálnou dĺžkou nazývame najkratšie. Problém najkratšieho pokrytia kružnicami ako prvý študovali Itai a Rodeh [25] v roku 1978. Tí určili hornú hranicu dĺžky najkratšieho pokrytia, navrhli algoritmus na jeho nájdenie s časovou zložitosťou $O(|V|^2)$ a opísali jeho aplikáciu na zavlažovací systém. Okrem ďalších aplikácií ako napr. v navigácii [11, 18], je jedným známym praktickým problémom tohto typu aj Problém čínskeho poštára. Hoci Problém čínskeho poštára sa dá vyriešiť v polynomiálnom čase, problém nájsť najkratšie pokrytie kružnicami je NP-úplný [56]. Najznámejšia hypotéza [2] tejto oblasti stanovuje, že každý bezmostový graf má najkratšie pokrytie kružnicami s celkovou dĺžkou nanajvýš $\frac{7}{5} \cdot |E|$. Najlepším priblížením k tejto hypotéze pre všeobecné grafy je výsledok Bermonda a kol. [3], nezávisle dokázaný Alonom a Tarsim [2], ktorý dokazuje tvrdenie s hranicou $\frac{5}{3} \cdot |E|$. Tutteova 5-toková hypotéza implikuje, že každý bezmostový graf má pokrytie kružnicami s dĺžkou $\frac{8}{5} \cdot |E|$ [31].

Prirodzená otázka je: ako zadefinovať pokrytie kružnicami pre signované grafy? Aby sme zachovali analógiu s nikde-nulovými tokmi, musíme najprv vhodne zadefinovať pojem signovanej kružnice. Signovaná kružnica je balansovaná kružnica alebo nebalansovaná dvojkružnica (pozri predchádzajúci paragraf). Potom pokrytie kružnicami signovaného grafu $G$ je množina $\mathcal{C}$ signovaných kružníc z $G$ taká, že každá hrana $G$ sa nachádza aspoň v jednej signovanej kružnici $\mathcal{C}$ a opäť dĺžka pokrytia $\mathcal{C}$ je súčet dĺžok kružníc v $\mathcal{C}$. V tomto prípade má podľa [5] signovaný graf pokrytie kružnicami práve vtedy, keď pripúšťa nikde-nulový tok a teda táto analógia je zachovaná.

V prekladanej práci dokazujeme nasledujúce tvrdenia pre pokrytia signovaných grafov signovanými kružnicami. Tieto výsledky sú úplne prvé z oblasti pokrytí signovaných grafov signovanými kružnicami.

**Veta 5** ([II])**.** *Nech $G$ je signovaný graf s tokovým číslom 2. Potom existuje pokrytie grafu $G$ signovanými kružnicami s celkovou dĺžkou nanajvýš $\frac{4}{3} \cdot |E(G)|$, pričom táto* *hranica je najlepšia možná.*

**Veta 6** ([II]). *Každý signovaný graf $G$, ktorý pripúšťa nikde-nulový tok má pokrytie signovanými kružnicami s celkovou dĺžkou nanajvýš* $11 \cdot |E(G)|$.

Predkladaná dizertačná práca bola podporovaná grantom VEGA 1/0634/09, VEGA 1/0406/09 a VEGA 1/1005/12 a projektom APVV 0111-07 a APVV 0223-10.

# 3 Zoznam použitej literatúry


[1] A. Alhazov, I. Petre and V. Rogojin, *The parallel complexity of signed graphs: Decidability results and an improved algorithm*, Theoret. Comput. Sci **410** (2009), 2308–2315.

[2] N. Alon and M. Tarsi, *Covering multigraphs by simple circuits*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **6** (1985), 345–350.

[3] J.C. Bermond, B. Jackson, and F. Jaeger, *Shortest covering of graphs with cycles*, J. Combin. Theory Ser. B **35** (1983), 297–308.

[4] M. Blässer and B. Siebert, *Computing Cycle Covers without Short Cycles*, ESA '01 Proceedings of the Annual European Symposium on Algorithms, Springer-Verlag, London, UK 2001.

[5] A. Bouchet, *Nowhere-zero integral flows on a bidirected graph*, J. Combin. Theory Ser. B **34** (1983), 279–292.

[6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer, Heidelberg, 2008.

[7] D. Cartwright and F. Harary, *Structural balance: a generalisation of Heider's theory*, Psychological Review **63** (1956), 277–293.

[8] J.J. Chen, E. Eschen and H.-J. Lai, *Group connectivity of certain graphs*, Ars Combin. **89** (2008), 141 – 158.

[9] J. Delamater (ed.), *Handbook of Social Psychology*, Springer, New York, 2006.

[10] R. Diestel, *Graph Theory, Third Ed.*, Springer, Heidelberg, 2005.

[11] O. Ernug, G. Kuyzu and M. Savelsbergh, *The time-constrained lane covering problem*, Transportation Science **41** (2007), 206–221.

[12] G. H. Fan, *Tutte's 3-flow conjecture and short cycle cover*, J. Combin. Theory Ser. B **57** (1993), 36–43.

[13] G. H. Fan, *Proofs of two minimum circuit covers conjectures*, J. Combin. Theory Ser. B **74** (1998), 353–367.

[14] G. Fan, H. Lai, R. Xu, C.-Q. Zhang and Ch.Zhou, *Nowhere-zero* 3*-flows in triangularly connected graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **98** (2008), 1325–1336.

[15] J. L. Gross and T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley–Interscience, New York, 1987.

[16] N. Gulpinar, G. Gutin, P. Mitra and A. Zverovitch, *Extracting pure network submatrices in linear programs using signed graphs*, Discrete Appl. Math **137** (2004), 359–372.

[17] F. Harary, M.-H. Lim and D. C. Wunsch, *Signed graphs for portofolio analysis in risk management*, IMA J. Management Math. **13** (2002), 201–210.

[18] D. Hochbaum and E. Olinick, *The bounded cycle-cover problem*, INFORMS Journal on Computing **13**(2) (2001), 104–119.

[19] N. Immorlica, M. Mahdian, V. S. Mirrokni, *Cycle covers with short cycles*, Lectrue notes in Computer Science, **3404** (2005), 641–653.

[20] T. Inohara, *Characterization of clusterability of signed graph in terms of Newcomb's balance of sentiments*, appl. Math. Comput. **133** (2002), 93–104.

[21] W. Imrich and S. Klavžar, *Product Graphs*, Wiley-Interscience, New York, NY, 2000.

[22] A. Itai, J. Lipton, C. H. Papadimitriou and M. Rodeh, *Covering Graphs by Simple Circuits*, SIAM J. Comput **10** (4) (1981), 746–754.

[23] W. Imrich, I. Peterin, Simon Špacarpan and C.-Q. Zhang, *NZ-flows in strong products of graphs*, J. Graph Theory DOI 10.1002/jgt.20455 (2009).

[24] W. Imrich, T. Pisanski, and J. Žerovnik, *Recognizing Cartesian graph bundles*, Discrete Math. **167-168** (1997), 393–403.

[25] A. Itai and M. Rodeh, *Covering a graph by circuits*, Automata, Languages, and Programming, Lecture Notes in Computer Science **62**, Springer, Berlin (1978), 289–299.

[26] W. Imrich and R. Škrekovski, *A theorem on integer flows on Cartesian products of graphs*, J. Graph Theory **43** (2003), 93–98.

[27] J. B. Jackson, *Shortest circuit covers and postman tours of graphs with a nowhere-zero* 4*-flow*, SIAM J. Comput. **19** (1990) 659–665.

[28] F. Jaeger, *Flows and generalized coloring theorems in graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979) 205–216.

[29] F. Jaeger, *Nowhere-zero flow problems*, in: L. W. Beineke, R. J. Wilson (Eds.), Selected Topics in Graph Theory Vol. **3**, Academic Press, London, 1988, 71–95.

[30] F. Jaeger, N. Linial, C. Payan and M. Tarsi, *Group connectivity of graphs—A nonhomogeneous analogue of nowhere-zero flow properties*, J. Combin. Theory Ser. B **56** (1992), no. 2, 165–182.

[31] U. Jamshy, A. Raspaud and M. Tarsi, *Short circuit covers for regular matroids with a nowhere-zero* 5*-flow*, J. Combin. Theory Ser. B **42** (1987), 384–387.

[32] U. Jamshy and M. Tarsi, *Short cycle covers and the cycle double cover conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **56** (1992), no. 2, 197–204.

[33] T. Kaiser, D. Kráľ, B. Lidický, P Nejedlý and R. Šámal, *Short cycle covers of graphs with minimum degree three*, SIAM J Discrete Math **24** (2010), 330–355.

[34] N. Kapur, *Mathematical Modelling*, New Age International Publishers, New Delhi, 2005.

[35] L. H. Kaufmann, *New invariants in the theory of knots*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 195–242.

[36] A. Khelladi, *Nowhere-zero integral chains and flows in bidirected graphs*, J. Combin. Theory Ser. BB **43** (1987), 95–115.

[37] S. Klavžar and B. Mohar, *The chromatic numbers of graph bundles over cycles*, Discrete Math. **138** (1995), 301–314.

[38] M. Kochol, *Smallest counterexample to the 5-flow conjecture has girth at least eleven*, Journal of Combinatorial Theory Series B **100** (2010), no. 4, 381–389.

[39] J. H. Kwak and J. Lee, *Isomorphism classes of graph bundles*, Canad. J. Math. **42** (1990), 747–761.

[40] M.-K. Kwan, *Graphic Programming Using Odd or Even Points*, Chinese Math. **1** (1962), 273–277.

[41] E. Máčajová and M. Škoviera, *Determining the flow numbers of signed eulerian graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **38** (2011), 585–590.

[42] E. Máčajová and M. Škoviera, *Nowhere-zero flows on signed eulerian graphs*, rukopis.

[43] K. R. Matthews, *On the eulericity of a graph*, J. Graph Theorey **2** (1978), 143–148.

[44] B. Mohar, T. Pisanski, and M. Škoviera, *The maximum genus of graph bundles*, European J. Combin. **9** (1988), 215–224.

[45] M. Nánásiová and M. Škoviera, *Nowhere-zero* 3*-flows in Cayley graphs and Sylow* 2*-subgroups*, J. of Algebraic Combinatorics, Springer U.S., Volume **30** (2009), no. 1, 103–111.

[46] T. Pisanski and J. Vrabec, *Graph bundles*, Preprint Ser. Dep. Math. Univ. of Ljubljana **20** (1982), No. 079, 213–298.

[47] A. Raspaud and X. Zhu, *Circular flow on signed graphs*, J. Combin. Theory Ser. B. **101** (2011), no. 6, 464–479.

[48] N. Robertson, P. D. Seymour and R. Thomas, *Tutte's edge colouring conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **70** (1997), no. 1, 166–183.

[49] P. D. Seymour, *Sums of circuits*, in Graph Theory and Related Topics (J. A. Bondy and U. S. M. Murty, eds.) Academic Press, New York, (1979), 342–355.

[50] P. D. Seymour, *Nowhere-zero* 6*-flows*, J. Combin. Theory Ser. B **30** (1981), no. 2, 130–135.

[51] J. Shu and C.-Q. Zhang, *Nowhere-zero* 3*-flows in products of graphs*, J. Graph Theory **50** (2005), 79-89.

[52] J. Shu and C.-Q. Zhang, *A note about shortest cycle covers*, Discrete Math. **301** (2005), 232–238.

[53] J. Širáň and M. Škoviera, *Characterization of the maximum genus of a signed graph*, J. Combin. Theory Ser. B **52** (1991), 124–146.

[54] E. Steffen, *Circular flow numbers of regular multigraphs*, J. Graph Theory **36** (2001), 24–34.

[55] G. Szekeres, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc., **8** (1973), 367–387.

[56] C. Thomassen, *On the complexity of minimum cycle covers of graphs*, MAT-Report 1994-18, Mathematical Institute, Technical University of Denmark, April (1994).

[57] C. Thomassen, *The weak* 3*-flow conjecture and the weak circular flow conjecture*, J. Comb. Theory, Ser. B **102** (2012), no. 2, 365–375.

[58] W. T. Tutte, *On the imbedding of linear graphs in surfaces*, Proc. London Math. Soc., Ser. 2 **51** (1949), 474–483.

[59] W. T. Tutte, *A Contribution on the Theory of Chromatic Polynomials*, Canad. J. Math. **6** (1954), 80–91.

[60] E. Wei, W. Tang, X. Wang, *Flows in* 3*-edge-connected bidirected graphs*, Front. Math. China **6** (2011), 339–348.

[61] R. Xu and C.-Q. Zhang, *On flows in bidirected graphs*, Discrete Math. **299** (2005), 335–343.

[62] J. W. T. Youngs, *The nonorientable genus of Kn*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 354–358.

[63] T. Zaslavsky, *The geometry of root systems and signed graphs*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 88–105.

[64] T. Zaslavsky, *Characterizations of signed graphs*, J. Graph Theory **5** (1981), 401–406.

[65] T. Zaslavsky, *Signed graphs*, Discrete Appl. Math. **4** (1982), 47–74.

[66] T. Zaslavsky, *Signed graph coloring*, Discrete Math. **32** (1982), 215–228.

[67] T. Zaslavsky, *Orientation embedding of signed graphs*, J. Graph Theory **16** (1992), 399-422.

[68] C.-Q. Zhang, *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, Dekker, New York, 1997.

[69] C.-Q. Zhang, *Minumum cycle coverings and integer flows*, J. Graph Theory **14** (1990), 537–546.

[70] R. Xu and C.-Q. Zhang, *Nowhere-zero* 3*-flows in squares of graphs*, Electronic J. Combin. **10** 2003, R5.

[71] Z. Zhang, Y. Zheng, A. Mamut, *Nowhere-zero flows in Tensor products of graphs*, J. Graph Theory **54** (2007), 284–292.

[72] O. Zýka, *Nowhere-zero* 30-*flows on bidirected graphs*, KAM Series No.87-26, Charles University, Prague, 1987.

# 4 Zoznam publikovaných prác autora so vzťahom ku skúmanej problematike

[I] R. Lukoťka and E. Rollová, *Flows on the join of two graphs*, zaslané na publikáciu.

[II] E. Máčajová, A. Raspaud, E. Rollová and M. Škoviera, *Short signed circuit covers*, rukopis.

[III] E. Máčajová and E. Rollová, *On the flow numbers of signed complete and complete bipartite graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **38** (2011), 591–596.

[IV] E. Máčajová and E. Rollová, *Nowhere-zero flows on signed complete and complete bipartite graphs*, zaslané na publikáciu.

[V] E. Rollová and M. Škoviera, *Nowhere-zero flows in Cartesian bundles of graphs*, Europ. J. Combinatorics **33** (2012), no. 5, 867–871.

# Summary

The map colouring problem started a new era in the development of graph theory and it is one of the main reasons why graphs has been intensively studied. Hence it is not surprising that graph colourings and its related problems constitute the primary research area in graph theory. It was pointed out by Tutte that the problem of face-colouring of an embedded planar graph can be formulated in terms of integer flows on the graph as well as in terms of cycle covers. Thus integer flows and cycle covers of graphs have become one of the most attractive research topics in graph theory.

The present thesis is based on five papers which deal with nowhere-zero flows and circuit covers of graphs and signed graphs. First we extend the results of Imrich and Škrekovski [J. Graph Theory **43** (2003), 93–98] about nowhere-zero flows in Cartesian product graphs to 'twisted' Cartesian products – Cartesian bundles. We show that every Cartesian bundle of two graphs without isolated vertices has a nowhere-zero 4-flow. Then we focus on the join of two graphs $G$ and $H$, which is a graph created from disjoint copies of $G$ and $H$ by connecting each vertex of $G$ with each vertex of $H$. We determine the flow number of the resulting graph.

In the second part of the thesis we deal with signed graphs, graphs where each edge is either positive or negative. We modify the traditional definitions of nowhere-zero flows and circuit covers given for graphs to obtain the corresponding concept for signed graphs. We verify Bouchet's conjecture, which asserts that each signed graph admitting a nowhere-zero flow has a nowhere-zero 6-flow, for two basic families of signed graphs – signed complete and signed complete bipartite graphs. We prove that each such flow-admissible graph admits a nowhere-zero 4-flow and we characterise those which have a nowhere-zero 2-flow and a nowhere-zero 3-flow. Finally, we establish a linear upper bound (in terms of the number of edges of the signed graph) for the length of a shortest signed circuit cover of signed flow-admissible graphs. We also study the dependence of the length of a shortest cycle cover of a signed graph on its flow number, particularly for signed graphs with flow number 2.