Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Katarína Pračková

Autoreferát dizertačnej práce

Rozvíjanie logického myslenia vo vyučovaní geometrie v nižšej sekundárnej škole

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

vo vednom odbore:

9.1.8. teória vyučovania matematiky

Bratislava 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná
v dennej forme doktorandského štúdia

na Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

Predkladateľ: **Mgr. Katarína Pračková**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Školiteľ: **prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Oponenti:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....

9.1.8. Teória vyučovania matematiky

na ....
(presná adresa miesta konania obhajoby dizertačnej práce)

Predseda odborovej komisie:

....

Úvod

Vzdelávanie v geometrii sa v predstavách značnej časti verejnosti a, žiaľ, aj v praxi niektorých učiteľov často zužuje na zvládnutie kalkulačných zručností, ktoré sa týkajú výpočtu miery číselných charakteristík geometrických útvarov (dĺžka, obvod, obsah, objem, veľkosť uhla). Dôkladné ovládanie tohto učiva je zaiste veľmi dôležité z hľadiska praktického používania, ale nepodporuje dostatočne tú stránku vzdelávacích možností v geometrii, ktoré sú dôležité z hľadiska vytvárania návykov logického myslenia, potrebného v celoživotných postojoch a konaní. Aj v samotnom komplexe rôznych častí matematického vzdelávania je potrebná a užitočná tá stránka vzdelávania a výchovy v geometrii, ktorá vyžaduje a podporuje rozvíjanie analytického myslenia. Základné pojmy geometrie sú veľmi názorné a aj ich terminológia má blízko k pomenovaniam z prirodzeného jazyka. Táto stránka geometrie zdanlivo uľahčuje osvojovanie geometrických pojmov, vzťahov medzi nimi a niektorých operácií s nimi. Za tou jednoduchosťou sa však temer vždy skrýva zložitosť faktu, že aj najzákladnejšie objekty geometrie, ktoré sa tvoria definíciami, predstavujú z hľadiska štruktúry už dosť zložité útvary, ktorých genézu treba preberať so žiakmi postupne. Sústavný nácvik takýchto činností, rovnako ako rozklad pojmov a postupov na najjednoduchšie kroky je potrebný aj pri riešení konštrukčných úloh, v ktorých všeobecný riešiaci algoritmus v podobe *rozbor – konštrukcia – dôkaz – diskusia* má všeobecnú platnosť aj v iných úlohách, a to nielen geometrických. Tieto kroky sú prítomné napr. aj pri riešení rovníc, len sa obvykle uvádzajú pod inými názvami.

Analytická metóda myslenia, na nácvik ktorej je v matematike geometria asi najvhodnejšia, má podstatnú úlohu pri riešení *slovných úloh*, ktoré sú všeobecne menej úspešnou stránkou žiackych výkonov. Jadro problematického prístupu spočíva obyčajne v tom, že žiaci, a často aj rodičia, ktorí sa v pomoci deťom pri riešení domácich úloh angažujú, chcú riešiť úlohu akosi globálne, vcelku, bez nevyhnutnej analýzy, ktorá je prvým predpokladom úspešnosti riešenia. Navyše slovné úlohy mávajú obvykle podobu tzv. *reálnej situácie*, v ktorej matematická podstata úlohy nebýva formulovaná v jazyku matematiky, ale je často prekrytá pojmami prirodzeného jazyka, ktoré sa môžu zamieňať s matematickými pojmami. Rozhodujúcim predpokladom úspešnosti riešenia je tzv. *matematizácia* úlohy. Jej podstatu tvoria tri kroky:

1. Prvým krokom je *vyťaženie matematických údajov* zo zadania úlohy. Tieto údaje nemusia byť uvedené v náležitej matematickej podobe, ale môžu sa vzťahovať na reálne predmety alebo deje.
2. Druhým krokom je *prevod údajov do matematického jazyka,* stanovenie matematických objektov, ktoré sú zástupne zachytené v znení úlohy, a zistenie súvislostí a závislostí týchto matematických objektov.
3. Tretím krokom je spoznanie *matematických prostriedkov a metód,* ktorými sa riešia problémy, odhalené medzi matematickými pojmami v druhom kroku.

Po tomto prechode od „reálnej situácie“ k „rýdzo“ matematickej formulácii úlohy nasleduje matematické riešenie metódami a prostriedkami odhalenými v treťom kroku.

Základným myšlienkovým procesom, ktorý je nevyhnutným predpokladom úspešnosti riešenia úlohy, je náležitá *analýza* vedúca k matematizácii. Ňou sa rozčlení spravidla globálne formulovaná úloha na elementárne (kroky) úlohy a nachádza sa zodpovedajúca elementárna matematická situácia. Aby sa načrtol účinný plán postupu riešenia, je potrebné mať vypracovanú schopnosť a zručnosť zostaviť úspešne logickú a obsahovú syntézu jednotlivých krokov. To vyžaduje dlhodobý a trpezlivý nácvik takéhoto prístupu a v tom je veľká potencia geometrie, že takýto nácvik nielen umožňuje, ale svojou povahou priam vynucuje.

Samotné riešenie slovných úloh s „reálnou“ tematikou má ešte ďalší krok, na ktorý sa v opojení nad úspešným vyriešením často zabúda. Má ním byť posúdenie „reálnosti“ výsledku, zistenie alebo odhad hodnôt *matematického* výsledku, pre ktoré má výsledok ešte *reálny* zmysel. Aj tu môže hrať geometria reálnou ohraničenosťou svojich útvarov akúsi úlohu strážcu reálnosti teoreticky správnych, ale reálne nepravdepodobných, neuskutočniteľných alebo absurdných výsledkov.

Ciele práce, metódy a prostriedky

Základný cieľ práce je pomerne výstižne formulovaný jej názvom: je ním tvorba základov logického myslenia, rozvíjanie týchto základov a formovanie návykov systematického logického myslenia vyučovaním geometrie v nižšej sekundárnej škole. V prvom rade si treba jasne uvedomiť a mať stále na zreteli obsah geometrie, ktorá je predmetom vyučovania v nižšej sekundárnej škole. Toto poznanie stanoví aj základné mantinely konkrétnych čiastkových cieľov, ktoré možno vyučovaním tejto tematiky sledovať.

Druhým faktorom, ktorý limituje formovanie logického myslenia na uvedenom stupni vzdelávania, je stupeň rozvoja psychických funkcií a všeobecná mentálna vyspelosť žiakov predmetnej vekovej skupiny, vzdelávanej a vychovávanej na tomto stupni našej školskej sústavy. Abstraktné myslenie je ešte nerozvinuté, princíp názornosti a konkrétnosť objektov i predstáv o nich majú dominujúce postavenie vo vyučovaní i v učení sa, o nejakú zjavne sformovanú schopnosť analýzy a syntézy u žiakov sa sotva možno opierať v komunikácii medzi učiteľom a žiakmi. Práve matematika ako vyučovací predmet v tomto veku a osobitne geometria, a to planimetria ako jednoduchšia časť geometrie, majú možnosť, schopnosť i úlohu začiatky uvedomelého logického myslenia nenásilne, postupne, malými krokmi a systematicky v žiakoch predmetného veku formovať.

Hlavné myšlienkové procesy, ktoré nachádzajú uplatnenie vo vyučovaní planimetrie, ktoré sú predpokladom jej úspešného zvládnutia, ale ktoré môžu byť aj založené a rozvíjané vo výučbe tohto predmetu, sú *analýza* a *syntéza.* Pod analýzou sa všeobecne rozumie rozklad pojmu, úlohy alebo akéhokoľvek komplexu na ich jednotlivé časti a oddelené skúmanie týchto častí. Syntézou sa nazýva spojenie tohto nového, vyššieho poznania jednotlivých častí do nového celku, poznanie ktorého na základe analýzy má hlbšiu, podrobnejšiu a dokonalejšiu úroveň, ktorá jasnejšie zachytáva štruktúru celku, postavenie a hierarchiu jeho jednotlivých zložiek.

Cieľom tejto práce je zostavením alternatívnej verzie učebného textu ukázať, ako možno tieto dva myšlienkové procesy účinne zapojiť do výstavby dvoch základných pojmov euklidovskej planimetrie – pojmov *uhol* a *trojuholník* – tak, aby už základná definícia týchto pojmov bola výsledkom zjednotenia postupných elementárnych krokov, ktoré operujú len prvotnými nedefinovanými pojmami (bod, priamka, incidencia, usporiadanie bodov na priamke a v rovine) a priehľadnými pojmami, odvodenými z týchto prvotných (primárnych) pojmov (úsečka, polpriamka, polrovina). Ide teda o genetickú výstavbu týchto kľúčových pojmov planimetrie postupnosťou „malých“ krokov, medzi ktoré už nemožno vsunúť jednoduchšie kroky. Tento postup je potenciálnym metodickým návodom, ktorý by mohol vyučujúci uplatniť pri zavádzaní pojmov s použitím definície obvykle uvádzanej v učebnici. Štruktúra a štýl učebníc väčšinou takýto spôsob komunikácie so žiakmi neumožňujú, čo nie je chyba učebníc, ale zákonité obmedzenie tohto druhu vyučovacieho prostriedku. Takéto vysvetlenie a odporúčanie by mohol obsahovať komentár v metodickej príručke k učebnici, ak je takáto pomôcka vytvorená.

Základná metóda použitá pri koncipovaní učebného textu je klasická *syntetická metóda* elementárnej geometrie operujúca s pojmami založenými na axiomaticko-deduktívnej výstavbe geometrie v duchu Hilbertovej axiomatiky. Cieľom návrhu textu je ukázať, že syntetická metóda je silným nástrojom, ktorý umožňuje budovať teóriu prvých odvodených, mierne zložitých pojmov elementárnej planimetrie výlučne touto metódou vrátane relácií, operácií a vlastností (relácia „menší“ v množine uhlov, sčitovanie a odčitovanie uhlov, násobenie uhlov prirodzeným číslom, klasifikácia trojuholníkov podľa najväčšieho vnútorného uhla atď.), ktoré sa v mnohých sledovaných učebných materiáloch (učebnice, súborné učebné materiály, lexikóny) predkladajú numerickou cestou na báze *miery* uhla, t. j. jeho *veľkosti*. Pri takomto postupe ustupuje geometria do úzadia a do popredia vystupuje aplikácia aritmetiky, ktorá okrem premeny jednotiek *veľkosti uhla* neprináša vecne podstatne nové učivo, ale vedie len k nácviku mierne zložitejších numerických zručností.

Syntetická metóda ďalej umožňuje názornú a prehľadnú *klasifikáciu* a *systemizáciu* objektov (uhlov a trojuholníkov) podľa kritérií prirodzených v týchto triedach. Význam týchto myšlienkových operácií, prirodzene a nenásilne nastupujúcich v rozvíjaní učiva o uvažovaných triedach objektov, je aj v prekračovaní hraníc ich platnosti a užitočnosti v geometrii a v matematike vôbec a v ich použiteľnosti v mnohých iných odboroch vzdialených od matematiky. Práve v tomto učive v relevantnej vekovej skupine žiakov možno klásť základy logických kompetencií potrebných a užitočných v mnohých oblastiach teoretickej i praktickej činnosti v produktívnom veku.

Prostriedkom na dosahovanie plánovaného cieľa je didaktická realizácia predloženého alternatívneho učebného textu pri uplatňovaní navrhnutej metódy s prihliadnutím na metodické poznámky, ktoré konkretizujú zámery v prvotnom pláne dané textom. Individuálna realizácia samozrejme závisí od skúseností a tvorivosti vyučujúceho. Žiaduce a užitočné by bolo, keby aspoň najdôležitejšie časti učiva vopred spracoval metódou *a priori* s predvídaním reálne pravdepodobných *didaktických situácií* a potenciálnych *didaktických prekážok*.

Pri sledovaní učebného textu a komentára k nemu je zrejmé, že časová dotácia na spracované témy podľa vzdelávacieho programu, učebných osnov a eventuálneho časovo-tematického plánu je zjavne nedostačujúca na realizáciu navrhovaného projektu v plnej šírke. Dôležité je, aby sa dostatok času venoval nácviku základov správnych návykov v začiatkoch preberania témy a v ďalšom priebehu sa táto línia sprostredkovania a osvojovania stala prijatou zaužívanou normou spolupráce učiteľa a žiakov.

Záverom treba poznamenať, že navrhovaný postup vyučovania časti geometrického učiva nižšej sekundárnej školy je len malým úsekom výchovy správneho logického myslenia v najširšom zmysle tohto pojmu a že samo prezentované učivo obsahuje v sebe aj iné možnosti, ako podnecovať a rozvíjať *ďalšie* zložky a formy logického myslenia.

Štruktúra dizertačnej práce je nasledovná:

Obsah

Súčasný stav spracovania tematiky

Ako už bolo uvedené, výchova k logickému mysleniu je jednou z hlavných úloh výchovnovzdelávacieho pôsobenia vo vyučovaní matematiky na všeobecnovzdelávacích školách od stupňa primárnej školy až po záver vyššieho stupňa sekundárneho vzdelávania. Osobitne významnú rolu v tomto poslaní môže zohrávať vyučovanie geometrie na nižšom stupni sekundárneho vzdelávania, a to najmä v tematických celkoch *planimetrie,* ktorá historicky účinkovala v tomto smere ako kardinálna disciplína matematiky a exaktných vied vôbec. Túto schopnosť si planimetria udržala do dnešných čias, žiaľ, v súčasnej situácii sa táto možnosť výučby planimetrie pri formovaní vzdelanostného profilu školskej mládeže vinou rôznych faktorov nevyužíva dostatočne.

Je samozrejmé, že vo veku 11 – 15 rokov, čo predstavuje vekovú skupinu v centre pozornosti skúmania v rámci cieľov dizertácie, je väčšina žiakov nezrelá na systematické osvojovanie poznatkov formálnej logiky, tým menej na jej vedomé používanie v aplikačnej argumentácii na obsah ktoréhokoľvek vyučovacieho predmetu, tobôž matematiky, kde sám obsah kladie pred žiaka nejednu didaktickú prekážku.

Literatúry zaoberajúcej sa logickým myslením alebo matematickou logikou je na Slovensku i v zahraničí viacero. Sú to články, knihy, učebnice, ktoré logické myslenie spájajú predovšetkým s výrokovou a predikátovou logikou. Publikácií zaoberajúcich sa rozvíjaním logického myslenia je už pomenej a zaoberajúcich sa rozvíjaním logického myslenia špeciálne v geometrii nám známe nie sú. Nižšie uvedieme niekoľko publikácií, ktoré sa aspoň čiastočne prekrývajú s problematikou našej práce.

F. Kuřina sa v článku [20] zaoberá základnou otázkou: Ako učiť matematiku, aby rozvíjala myslenie. Píše, že matematické vedomosti potrebuje na rôznych úrovniach každý človek. Naučené matematické definície, vety, dôkazy a riešenia úloh s minimálnou mierou porozumenia – takto osvojovaná matematika myslenie nerozvíja, ale skôr utlmuje. V našej práci zastávame názor, že nielen samotné učivo prispieva k rozvoju logického myslenia, ale aj spôsob, akým je žiakom prezentované.

V publikácii [12] zase M. Hejný píše o „putovaní po histórii geometrického myslenia". Predmetom štúdia je geometria roviny, ale nie rovinné útvary, ale rovinné transformácie a operácie (stredová súmernosť a operácia „stredovanie"). Ťažiskom práce je riešenie množstva cvičení, pomocou ktorých čitateľ nie je len pozorovateľ, ale stáva sa z neho objaviteľ.

Rozvíjaniu logického myslenia 5-6-ročných detí pred vstupom do základnej školy sa venovala H. Lužáková, študentka Pedagogickej fakulty UK, v rigoróznej práci z roku 2003. Je to síce téma príbuzná našej, ale veková skupina je rozdielna.

M. Bálintová, študentka fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK, sa taktiež v rigoróznej práci z roku 2002 venovala skúmaniu *Logického myslenia žiakov na ZŠ*. Táto práca bola zameraná na nácvik tvorby sylogizmov, ktoré dala autorka žiakom riešiť a na základe odpovedí potom analyzovala ich myslenie.

Cieľom tejto práce je, aby si žiaci osvojili potrebnú logiku na konkrétnom učive spôsobom, ktorý prirodzene vyplýva z povahy učiva. Akýmsi úvodom do „presnej" logiky je usmerňovanie žiakov k tvorbe záverov v situáciách, v ktorých niekoľko konkrétnych údajov, prípadov nabáda tvoriť určité uzávery; to je cesta výchovy k *odôvodňovaniu* a *tvorbe hypotéz.*

Nasledujúci výťah z písomných matematických prameňov učebnicového, súhrnného vzdelávacieho i encyklopedického charakteru zahraničnej aj domácej produkcie je ukážkou niekoľkých koncepcií didaktickej transpozície vybraných partií elementárnej geometrie do učiva školskej geometrie, konkrétne planimetrie. Porovnávanie koncepcií sleduje a) súlad didaktickej koncepcie s vedeckou koncepciou a b) prednosti, resp. nevýhody didaktickej transpozície z hľadiska didaktickej prístupnosti. Implicitne je v informáciách obsiahnuté aj stručné porovnanie domácich prameňov so zahraničnými.

Stav spracovania obsahovej tematiky v niektorých zahraničných krajinách v nedávnej minulosti a v súčasnosti

Základné geometrické objekty, ktoré sú v práci hlavným predmetom skúmania, sú *uhol* a *trojuholník*. Akokoľvek sa tieto pojmy zdajú triviálne a ich zavádzanie do programu vyučovania v škole bezproblémové, nasledujúci prehľad spracovania tejto tematiky v učebniciach a v učebných pomôckach ukáže, že v značnom počte sledovaných prameňov sa autori vyhýbajú korektnej *jednoznačnej* definícii, ktorá by znemožňovala používať termín s jednoznačne priradeným pojmom v rôznych obsahových významoch, ako sa bežne v školskej praxi stáva. Ukazuje sa, že v tvorbe školských učebných materiálov ešte nezakotvil dostatočne pevne princíp sformulovaný jazykovedou v oblasti tvorby odbornej terminológie, podľa ktorého sa vyžaduje *jednoznačnosť* termínu, čo znamená, že isté slovné pomenovanie sa môže vzťahovať len na jediný objekt predmetnej disciplíny. Ukážky z učebníc a súborných pomocných učebných textov naznačujú, že v istých jazykových oblastiach si autori túto situáciu uvedomujú a určitým spôsobom sa usilujú spresniť vyjadrovanie tak, aby bola splnená požiadavka jazykovedy. V tomto smere asi najďalej pokročili v Nemecku a v krajinách bývalého Československa.

Publikácia Zajcev V. V. – Ryžkov V. V. – Skanavi M. I.: *Elementarnaja matematika (Povtoriteľnyj kurs)* ([49]) predstavuje súborné zhrnutie obsahu matematiky v rozsahu základnej a úplnej strednej školy, zamerané prednostne na prípravu absolventov strednej školy na prijímacie skúšky na všetky vysoké školy, v programe ktorých má určité zastúpenie aj matematika.

Lexikón Savin, A. P. a kol.: *Enciklopedičeskij slovar junogo matematika* ([35]) je vypracovaný hniezdovou metódou a je určený pre žiakov základných a stredných škôl.

Formu lexikónu má aj publikácia Waliszewski, W. a kol.: *Encyklopedia szkolna – Matematyka* ([48]), v ktorej sú heslá taktiež vypracované hniezdovým spôsobom.

Lexikón Piccato, A.: *Dizionario dei termini matematici* ([28]) je podľa vyhlásenia autora určený pre žiakov vyššej strednej školy, vysokoškolákov a učiteľov matematiky na všetkých stupňoch škôl. *Uhol* (s. 18 – 20) je definovaný ako rovinná oblasť *uzavretá* medzi dvoma polpriamkami s tým istým začiatkom. Konvexný uhol je opísaný ako uhol, ktorý neobsahuje polpriamky opačné k svojim ramenám.

Nasledujúca štvorica kníh podáva dostatočne reprezentatívny obraz o koncepcii súborných učebných pomôcok stredoškolskej geometrie vo Veľkej Británii.

Publikácia Evans, K. – Speed, B. – Gordon, K.: *Foundations Mathematics for GCSE* (*A complete course for the Foundation tier*) ([8]) sa uhlami zaoberá na s. 283. Neuvádza žiadnu definíciu alebo vysvetlenie pojmu, zaoberá sa klasifikáciou reláciou *„menší“*, zavádza aj pojem *veľkosti* uhla, ale vo vyjadrovaní pri opise metrických vlastností a vzťahov operujúcich s uhlami nediferencuje medzi uhlom a jeho mierou. Takisto reláciu zhodnosti uhlov nahrádza termínom rovnosť, čo je aritmetická a nie geometrická relácia. Aj pri trojuholníku chýba akékoľvek vysvetlenie pojmu.

V knihe Speed, B. – Gordon, K. – Evans, K.: *Intermediate mathematics for GCSE* (*A complete course for the intermediate tier*) ([37]), sa s uhlom pracuje výlučne v zmysle jeho miery bez akejkoľvek *geometrickej* koncepcie (s. 111, 114 a i.). Vzťahuje sa to aj na uhly pri používaní v goniometrii (s. 320 a ďalšie), kde sa bez upozornenia pracuje s uhlom ako s *číslom*. Ten istý úkaz platí aj pre otáčanie.

Mnohouholník sa chápe ako rovinná oblasť ohraničená lomenou uzavretou čiarou. Tým je mnohouholník bez ďalšieho vysvetlenia merateľný mierou *obsah*.

Príručka Rayner, D.: *Complete Mathematics for GCSE and Standard Grade* ([29]) pod názvom *uhol* (s. 104) zavádza jeho mieru a termín *miera uhla* vôbec nepozná.

Vysvetlenie pojmu *trojuholník* prameň neobsahuje. Pojem sa vyskytuje len v súvislosti s jeho plošnou mierou – obsahom (s. 50).

Pomôcka Tipler, M. J. – Vickers, K. M.: *New National Framework MATHEMATICS 8+* ([43]) je napísaná pre úplné pokrytie národného kurikula. Tvorí rámec pre vyučovanie matematiky, vlastne formuluje časovo-tematický plán.

Nasledujúce štyri tituly načrtávajú obraz spracovania sledovanej tematiky v Nemecku a v Rakúsku.

Učebná pomôcka Muthsam, M.: *Geometrie 7. Klasse (Aufgaben mit Lösungen)* ([27]) sa netýka tematiky primárne; tá bola pravdepodobne z tohto pohľadu preskúmaná v predchádzajúcom ročníku vzdelávania. Ale z častí *Sledovanie uhlov* (s. *51*) a *Uhly, Vety* *o uhloch pri pretínaní priamok* (s. 53) možno s pomernou istotou usudzovať o koncepcii uhlov. Syntetickou metódou sú opísané početné vlastnosti uhlov a ich relácií. Pri prechode k porovnávaniu uhlov *zhodnosťou* a reláciou *„menší“* však už bez upozornenia nastupuje chápanie uhla v zmysle miery, teda napr. zhodné uhly sú označené pomenovaním *rovnako veľké*, čo sa už netýka uhlov, ale ich *veľkostí*. To isté možno konštatovať vo vete o súčte všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku: podľa autorky sa rovná 180°, čo nie je súčet uhlov, ale stupňová miera tohto súčtu.

V sérii *Training Grundwissen Mathematik* vo zväzku Endres, E.: *Wiederholung Geometrie (Aufgaben mit Lösungen)* ([7]) definuje autor uhol ako *plochu* opísanú polpriamkou *SA* pri otáčaní doľava okolo bodu *S* až do polohy *SB*. Zavádza potom *mieru* uhla, ale s týmto pojmom pracuje veľmi voľne, zamieňajúc objekt mierou a obrátene.

Definícia trojuholníka stojí za povšimnutie: *Trojuholník je určený tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke.*

Na dokreslenie terminologickej presnosti stačí uviesť zamieňanie kružnice kruhom a pomenúvanie obsahu rovinného útvaru názvom *plocha*. V oboch prípadoch ide o hrubý prehrešok voči záväznej nemeckej terminológii, ktorá bola v tomto smere už dávno spresnená a zmodernizovaná.

V útlom zväzku série *Kompakt-Wissen Mathematik* pod názvom *Grundlagen der Mathematik* (bez uvedenia autorov) ([16]), ktorý supluje úlohu akéhosi minilexikónu, je v časti Ebene Geometrie (od s. 49) uhol (s. 50) uvedený ako dvojica polpriamok so spoločným bodom ohraničujúcich uhol. Ešte raz je uhol vysvetlený takto: Dve polpriamky so spoločným začiatkom tvoria uhol. Rozlíšenie uhla a jeho veľkosti je v ďalšom texte neznáme.

Trojuholník nie je explicitne definovaný, ale pokiaľ sa s týmto pojmom pracuje, nerozlišuje sa hranica a oblasť čiarou ohraničená.

Za pozitívum možno označiť rozlišovanie pojmov kruh a kružnica.

Rakúska učebnica *Lebendige Mathematik* ([9]) zodpovedá obsahom približne 6. ročníku povinnej školskej dochádzky v našej školskej sústave. Časť *Aus der Geometrie* uvádza v odseku *8. Uhol – miera uhla* ako motiváciu pojmu uhol fungovanie ramena stierača na prednom okne automobilu, označiac pohyb stierača ako otáčanie. Definícia uhla je svojrázna: *„Uhol je miera nejakého otočenia.“* – Teda žiadna geometria, uhol je hneď *číslo*.

Trojuholník je zavedený v časti *E – Dreiecke* na str. 129 bez formálnej *definície*.

Uvedená vzorka prameňov školskej matematiky umožňuje konštatovať, že na nižšom stupni sekundárneho vzdelávania v chápaní pojmov *uhol* a *trojuholník* – ak sa pramene nejakým definitorickým spôsobom týmito pojmami vôbec zaoberajú – prevažuje chápanie týchto pojmov ako plošných rovinných oblastí. V tých krajinách, kde sa otázkam presnosti matematickej terminológie aj na úrovni školskej matematiky nevenuje taká intenzívna pozornosť ako svojho času v bývalom Československu, je najčastejším prehreškom voči matematickej exaktnosti zamieňanie, resp. stotožňovanie geometrického objektu (geometria) a jeho miery (aritmetika).

Ďalším problémom, ktorý by sa mal bez veľkého otáľania riešiť, je terminologické ošetrenie rozdielu medzi uzavretou rovinnou čiarou a rovinnou oblasťou, ktorú táto čiara ohraničuje. Nejde o problém nový, lebo na úrovni vysokoškolských učebníc boli už pred viac než 60 rokmi podniknuté pokusy zaoberať sa vážne týmto problémom, no doteraz sa všeobecne nestretlo s veľkým pochopením úsilie tento problém ako dôležitý riešiť.

Stav spracovania obsahovej tematiky v domácich učebniciach od 90. rokov 20. storočia

Téma *Uhol* v učebniciach

S meniacim sa zákonom a učebnými osnovami sa menili aj učebnice.

V sérii učebníc z rokov 1980 – 1984 ([14], [50], [25]) od viacerých autorov bol tematický celok *Uhol* rozdelený do dvoch ročníkov. V piatom ročníku v rámci opakovania sa autori zamerali na grafický súčet uhlov a násobok uhla. Ďalej sa potom venovali témam *Uhlomer. Veľkosť uhla* a *Jednotky veľkosti uhla.* V šiestom ročníku sa pokračovalo témami *Veľkosť uhla a jeho ďalšie vlastnosti, Susedné a vrcholové uhly, Vnútorné uhly trojuholníka* a *Veta usu.*

V učebniciach okolo roku 1988 od autorov J. Urbanová a kol. ([45], [46]) sa téma *Uhly* už vyučuje v rámci piateho ročníka, ale je rozdelená na dve časti. V prvej časti učebnice sa vyučuje téma *Uhol a jeho veľkosť* a v druhej časti učebnice téma *Operácie s uhlami, mnohouholník*.

Zhruba do roku 1993 sa v ČSR učilo z rovnakých učebníc v dvoch základných jazykových úpravách pre české a slovenské školy. Niektoré učebnice vychádzali aj v jazykoch menšín. Od roku 1997 mali učitelia možnosť používať na vyučovanie matematiky dve série učebníc od dvoch autorských kolektívov.

Kolektív autorov pod vedením O. Šedivého rozdelili v piatom ročníku ([39]) tematický celok *Uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami* na tieto témy: *Uhol. Prenášanie uhla a zhodnosť* *uhlov. Os uhla. Meranie uhlov. Porovnávanie uhlov. Uhol väčší ako priamy. Vrcholové uhly. Sčitovanie a odčitovanie uhlov a ich veľkostí. Násobenie a delenie uhlov dvoma.*

V. Repáš ([31]) spolu s ďalšími autormi zvolil nasledovnú postupnosť učiva: *Porovnávanie uhlov. Uhly okolo nás. Skladanie uhlov. Os uhla. Význačné uhly. Uhly v trojuholníku. Niektoré dvojice uhlov. Meranie uhla kedysi a dnes. Uhly na hodinách. Uhly, ktoré nevieme narysovať. Kolmica z bodu. Meranie uhla.*

Ako sme už spomínali vyššie, v roku 1998 bola znovuobnovená deväťročná povinná dochádzka na základných školách. Táto zmena spôsobila presun učiva *Uhol* do šiesteho ročníka.

V najnovšej učebnici Matematika 6 sa autori J. Žabka – P. Černek ([51]) sa k učivám viackrát vracajú, čoho dôkazom je aj rozdelenie tematického celku *Uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami* na tri časti. Prvú, úvodnú časť tvorí téma *Uhly okolo nás*, kde sa venujú rôznym uhlom ako výškový, strelecký, uhly na cestách, uhly pri biliarde a pod. Po *Počítaní s desatinnými číslami* sa opäť vracajú k uhlom a to od témy *Uhly v matematike* až po *Uhly v trojuholníku*. Tento tematický celok je ukončený treťou skupinou tém venovanej *Meraniu uhlov* až po *Susedné a vrcholové uhly*.

Vo väčšine spomínaných učebníc prevažuje numerická koncepcia s pomerne rýchlym zavedením miery a jej dominantnou úlohou v rozvíjaní učiva. V pozadí osnovania stojí zaiste argumentácia potrebami praxe, ktorá vyžaduje kvantitatívne vyjadrenie. Táto koncepcia rozvíja numerické algoritmy, nepodporuje však analytický prístup nevyhnutný pri geometrickej syntetickej metóde výkladu.

Systematická výučba syntetickou metódou viac zdôrazňuje postup malými krokmi, dbá na presnosť myslenia a vyjadrovania, hoci dôslednú presnosť od žiakov sotva možno očakávať a vyžadovať.

Od všeobecných zvyklostí sa odchyľujú dve učebnice. Učebnica J. Žabku – P. Černeka ([51]) zavádza pojem veľkosti uhla v tretej časti a učebnica V. Repáša ([31]) až v závere tematického celku.

Téma *Trojuholník* v učebniciach

V sérii učebníc z rokov 1980 – 1984 ([14], [50], [25]) od viacerých autorov bol tematický celok *Trojuholník* rozdelený do troch ročníkov. V piatom ročníku autori definovali trojuholník *ABC* ako „množinu všetkých bodov všetkých úsečiek *AY*“ (s. 12) (body *A, B, C* neležia na priamke, $Y \in CB$).

V šiestom ročníku bolo do tematického celku *Útvary súmerné podľa stredu* začlenené učivo *Obsah trojuholníka* a tematický celok *Súmernosť podľa osi a podľa roviny* tvorili aj témy *Rovnoramenný trojuholník*, *Rovnostranný trojuholník*, *Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku*[1].

Poslednou témou tejto série učebníc bola *Tálesova kružnica*, ktorá bola jedným z učív tematického celku *Konštrukčné úlohy*.

Tematickému celku *Trojuholník* v učebnici z roku 1989 od autora J. Čižmára a kol. ([5]) sa venuje pomerne veľa času a tvoria ho nasledujúce témy: *Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka. Súčet vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka. Rovnoramenný trojuholník. Rovnostranný trojuholník. Stredné priečky trojuholníka. Ťažnice trojuholníka. Výška trojuholníka. Konštrukcie trojuholníka sss, sus, usu. Kružnica opísaná trojuholníku. Kružnica vpísaná do trojuholníka.*

V siedmom ročníku ([26]) sa, podobne ako v predchádzajúcej sérii učebníc, nachádza téma *Tálesova kružnica* v rámci tematického celku *Konštrukčné úlohy*.

O. Šedivý spolu s ďalšími autormi zvolil v šiestom ročníku ([40]) nasledovnú postupnosť učiva: *Opakovanie. Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka. Rovnoramenný trojuholník. Rovnostranný trojuholník. Výška trojuholníka. Konštrukcia trojuholníka.* V siedmom ročníku ([41]) pokračovali *Významnými prvkami trojuholníka*, a to konkrétne témami: *Stredná priečka trojuholníka. Ťažnice a ťažisko trojuholníka. Riešenie úloh s využitím strednej priečky a ťažníc.* V ôsmom ročníku ([42]) nasledoval tematický celok *Pytagorova veta* s témami: *Pravouhlý trojuholník. Pytagorova veta. Použitie Pytagorovej vety. Použitie Pytagorovej vety pri konštrukčných úlohách.* A nakoniec v deviatom ročníku ([43]) do tematického celku *Goniometria ostrého uhla* zaraďujú učivo: *Pravouhlý trojuholník, podobnosť trojuholníkov.*

Kolektív autorov pod vedením V. Repáša rozdelil tematický celok *Trojuholník* na témy *Pravouhlý trojuholník* v piatom ročníku ([31]), *Obsah trojuholníka* v šiestom ročníku ([32]), *Zhodnosť útvarov – Trojuholník*, *Skúmame trojuholníky* (stredné priečky, ťažnice) v siedmom ročníku ([33]) a v ôsmom ročníku *Tálesova kružnica* a *Pytagorova veta* ([34]).

V najnovších učebniciach autorov J. Žabka – P. Černek je v ôsmom ročníku ([52], [53]) učivo nasledovnej postupnosti: *Trojuholníková nerovnosť. Vety o zhodnosti trojuholníkov. Rovnoramenný trojuholník. Rovnostranný trojuholník. Strany a uhly v trojuholníku. Výška*

[1] Správny názov – vpísaná *do* trojuholníka

a obsah trojuholníka. V deviatom ročníku ([54]) pokračujú témou *Pytagorova veta*, po ktorej nasledujú príklady s využitím Pytagorovej vety, ktoré sú rozdelené takto: *Pytagorova veta a trojuholníky. Pytagorova veta a rovnobežníky. Pytagorova veta a lichobežníky. Pytagorova veta a kružnice. Pytagorova veta a telesá.*

Teoretické východiská problematiky

Vzorom väčšiny monografií a vysokoškolských učebníc syntetickej euklidovskej geometrie, ktoré vyšli v 20. storočí spracované axiomaticko-deduktívnou metódou, boli zjavne *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie) ([13]) Davida Hilberta, ktorých prvé vydanie vyšlo r. 1899, druhé r. 1903 a posledné, siedme, r. 1930. Viaceré z týchto vydaní, no najmä posledné, boli preložené, a v niektorých prípadoch opakovane, do svetových jazykov i jazykov menších národov.

Obsah a forma niektorých z týchto diel odzrkadľujú pojmový a terminologický pokrok v uvedenej oblasti, čím ich aparát a štýl pôsobí modernejšie; v niektorých prípadoch ide o očividné spresnenie a modernizáciu. Hilbert napr. neuvádza termíny polpriamka, polrovina: úlohu polpriamky u ňho zastupuje starší tradičný termín *lúč* (Strahl), obsahovo zhodný s pojmom *polpriamky*. Namiesto dnešného nášho pojmu *otvorená polrovina* používa definitoricky zavedený pojem *po tej strane priamky*, namiesto *opačnej otvorenej polroviny* je vyjadrenie *po opačnej strane priamky*.

V. I. Kostin v diele *Osnovanija geometrii* (Základy geometrie, 1948) ([17]) definuje – nedôsledne vo vzťahu k logickému usporiadaniu – trojuholník ako trojicu nekolineárnych bodov, ku ktorým bez vysvetlenia pridáva úsečky určené týmito bodmi.

Kniha Karol Borsuk – Wanda Szmielew: *Podstawy geometrii* (Základy geometrie) ([3]) bola pôvodne zamýšľaná ako vysokoškolská učebnica vyššej geometrie. Jej spracovanie v podobe axiomaticko-deduktívnej teórie základu geometrie z nej urobilo vedeckú monografiu plniacu pôvodné určenie len v ohraničenom rozsahu.

Vo vysokoškolskej príručke Hanfried Lenz: *Grundlagen der Elementarmathematik*, II. Teil: *Elementare Geometrie* (Základy elementárnej matematiky, II. časť: Elementárna geometria) ([21]) je základná koncepcia odlišná od obvyklej štruktúry výstavby euklidovskej geometrie. Autor vychádza z afinného priestoru a postupnými špecializáciami sa prepracúva k metrickej geometrii.

Domáceho pôvodu je publikácia Jana Vyšína *Elementární geometrie (Planimetrie)* ([47]). Má charakter monografie alebo časti vysokoškolskej učebnice, ktorá bola tematicky ucelene doplnená ďalšími dvoma dielmi, a to knihou *Elementární geometrie (Stereometrie)* a knižkou *Elementární geometrie (Axiomatika)*.

Zaujímavé je, že autor dospel v záujme presného zavedenia orientácie k potrebe definovať pojem *zárez*, obsahovo identický s neskorším často používaným pojmom *zástava*.

László Rédei je autorom monografie *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie nach F. Klein* ([30]). Zavádzané pojmy sa usiluje definovať čo najvšeobecnejšie ako objekty projektívnej geometrie a obvyklé chápanie pojmov získať z nich špecializáciou.

Analogicky pristupuje k definícii sledovaných základných pojmov aj monografia Alfred Doneddu: *Géométrie euclidienne plane* ([6]) (dostupná v ruskom preklade).

V monografii Viktor Svitek: *Logické základy geometrie* ([38]) je úspešne ošetrený problém obvykle zanedbávaný vo väčšine publikácií o elementárnej geometrii euklidovskej roviny – totiž dôsledné terminologické odlíšenie rovinnej uzavretej čiary od rovinnej oblasti touto čiarou ohraničenej.

Vysokoškolská učebnica J. Böhm – W. Börner – E. Hertel – O. Krötenheerdt – W. Mögling – L. Stammler: *Geometrie* (*I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie*) ([2]) operuje dôsledne s pojmom *zástava*, čo je zjednotenie otvorenej polroviny a polpriamky obsiahnutej v hraničnej priamke tejto polroviny.

Vysokoškolský učebný text pre bakalárske štúdium Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and beyond* ([10]) podáva klasickú tematiku v mierne zmodernizovanej forme.

Osobitné miesto v súbore sledovaných prameňov zaujíma monografia Alexandr Danilovič Alexandrov: *Osnovanija geometrii* ([1]). Zámerom autora je vybudovať modernými prostriedkami ucelenú teóriu elementárnej geometrie v duchu Euklida, t. j. na báze odmietnutia aktuálneho nekonečna (čo je základným stavebným kameňom Hilbertovej koncepcie) a s prijatím prostriedkov založených na báze potenciálneho nekonečna, skryto prítomného v Euklidových *Základoch*.

Vo vzťahu k didaktickej transpozícii axiomaticko-deduktívnych koncepcií prezentovaných prameňov sa možno právom domnievať, že niet presvedčivých dôvodov na uprednostnenie výberu niektorej z dvoch koncepcií, t. j. či pri pojmoch *uhol* a *trojuholník* použiť len lineárne prvky definícií, alebo s lineárnou hranicou do pojmu zahrnúť aj *vnútro*. Dôsledné presné odlíšenie by priniesla akceptácie koncepcie prameňa [38], to by však zrejme pri presnom dodržiavaní terminológie značne komplikovalo komunikáciu na tom stupni vzdelávania, ktorý je predmetom témy dizertačnej práce.

Didaktická transpozícia vybraných pojmov systému elementárnej geometrie euklidovskej roviny do školskej praxe sekundárnej školy

Didaktická transpozícia systému elementárnej geometrie euklidovskej roviny a priestoru (planimetrie a stereometrie) do školskej praxe akejkoľvek úrovne poskytuje možno najviac príležitostí pre rozvíjanie logického myslenia žiakov a študentov. Experimentálne zisťovanie vlastností geometrických objektov sa postupne prelína s ich exaktným odôvodňovaním a v záverečnej etape by malo viesť k chápaniu idey exaktného matematického dokazovania. Výhodou, no niekedy i nevýhodou geometrických objektov sú niektoré ich „očividné" vlastnosti, ktorých dôkazy by sa u mladších žiakov určite stretli s nepochopením. Na to je tu učiteľ a hlavne jeho skúsenosti v pedagogickej praxi, aby zvážil: – na akom učive; – v akej vekovej skupine; – akým spôsobom je potrebné začať u žiakov s rozvíjaním pocitu potreby dokazovania. I keby dôkaz zaujal, čo len jedného žiaka/študenta, bude to úspech a časom ich bude viac. Príležitosť, ktorú nám poskytuje geometria, by sme nemali premrhať.

Za objekty pre didaktickú transpozíciu sme si vybrali pojmy: *uhol* a *trojuholník*. Pri uvedení, rozvíjaní a prehlbovaní zvolených pojmov bolo potrebné vymedziť tie poznatky z planimetrie, ktoré si už žiaci osvojili. V texte sa nič nehovorí o základných geometrických útvaroch euklidovskej roviny (body, priamky), ani o základných výrokoch o týchto útvaroch, ktoré sa prijímajú za správne (vo vedeckom systéme axiómy).

Pojem uhla je nesporne jedným z najzložitejších planimetrických pojmov (stačí nazrieť do učebníc sekundárnej školy – aktuálnych i starších, slovenských a inojazyčných, i učebných textov pre vysokoškolské vzdelávanie). Možno si vybrať z dvoch koncepcií: uhol ako dvojica nekolineárnych polpriamok so spoločným začiatkom alebo uhol ako prienik dvoch polrovín, ktorých hranice sú dve navzájom rôznobežné priamky. V oboch prípadoch treba do definície pridať i pojmy vnútorný bod uhla (vnútro uhla) a vonkajší bod uhla (vonkajšok uhla) tak, aby definovaný uhol bol konvexným uhlom. V mnohých textoch nasleduje takmer hneď „definícia" miery uhla, ktorá v matematickom zmysle definíciou nie je a vzápätí sa na definíciu uhla zabudne a k jednotlivým uhlom sa pripisujú už len stupne. Riešenie úloh a cvičení už nie je geometriou, ale aritmetickým cvičením na súčet, rozdiel i súčin zväčša prirodzených čísel.

Celý text obsahuje množstvo poznámok s pripomienkami k problémom, ktoré sa vo vyučovacom procese môžu, no nemusia vyskytnúť. Nie sú to poznámky adresované žiakom, sú to učiteľove poznámky k otázkam a problémom, ktoré sa pred ním vynorili počas prípravy témy a samotného didaktického spracovania. Od učiteľa si takáto príprava vyžaduje dokonalé ovládanie problematiky vypracovanej na vyššej úrovni – minimálne na úrovni vysokoškolského textu, ale aj z vedeckých monografií. Nemenej dôležité je mať prehľad o didaktickej transpozícii problematiky v rozmanitých učebniciach, ako aj poznanie historického vývinu matematiky, špeciálne základov geometrie. Uvedenie poznámok, napr. o živote antických gréckych matematikov (i keď sú to zväčša legendy), s ktorých menami sa žiaci stretnú len v názve nejakej vety, môže pôsobiť v triede odľahčujúco i motivačne.

Uhol

S uhlami sa stretávame takmer všade. V dennej praxi sa s uhlom môžeme stretnúť pod rôznymi názvami, akými sú napr. smer, odchýlka a i. Hovorí sa napríklad o uhle stúpania cesty, o uhle, ktorý zvierajú hodinové ručičky, o odchýlke auta od priamej cesty ap.

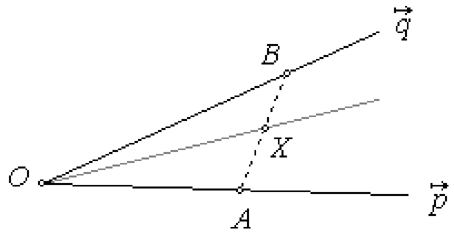

S uhlami sa ďalej stretneme v doprave (ulice v mestách, uhol zrážky vozidiel), pri športoch (strelecký uhol, uhol odhodu, strmosť smeču), pri hraní biliardu, či pri turistike (strmosť kopcov). Z hľadiska presného matematického vyjadrovania si treba uvedomiť, že uvedené slová prirodzeného jazyka obvykle nemajú jednoznačne vymedzený obsah a význam. Najčastejšie sa nimi myslí číselná hodnota, ktorá nie je uhlom, ale číselnou mierou uhla so špecifickým názvom veľkosť uhla.

Definícia uhla

Uhlom sa nazýva dvojica polpriamok so spoločným začiatkom, ktoré neležia na tej istej priamke (obr. 1). Polpriamky $\mapsto p = \mapsto OA$, $\mapsto q = \mapsto OB$ sa nazývajú *ramená uhla*, spoločný začiatok O sa nazýva *vrchol uhla*. Pre definovaný uhol budeme používať jedno z nasledujúcich označení: $\mapsto p \mapsto q$, $\mapsto q \mapsto p$, AOB, BOA.

Vnútorným bodom uhla AOB sa nazýva každý vnútorný bod polpriamky $\mapsto OX$, kde bod X je ľubovoľným vnútorným bodom úsečky AB.

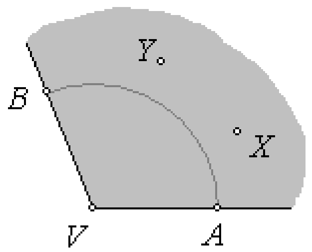
Takto definované uhly sa nazývajú *vypuklé* alebo *konvexné*.

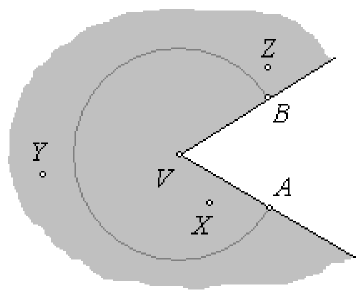


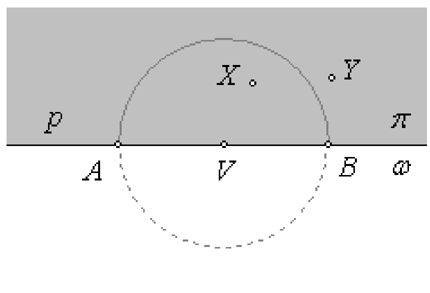
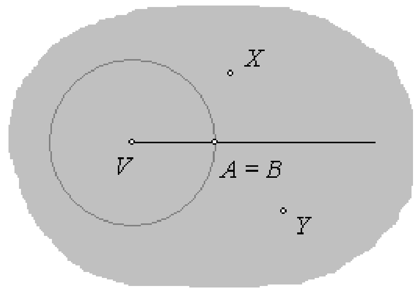
Obr. 1

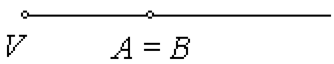
Na záver paragrafu uvedieme prehľadnú tabuľku o dosiaľ uvedených uhloch. Zvolené body *X*, *Y*, *Z* na obrázkoch ležia vždy vo vnútri príslušného uhla *AVB*.

Tabuľka 1

<table>
<tr><td colspan="2">UHOL</td></tr>
<tr><td colspan="2">Body A, B, V neležia na tej istej priamke</td></tr>
<tr><td>Konvexný uhol AVB a jeho vnútro


Všetky body úsečky XY ležia vo vnútri uhla.</td><td>Nekonvexný uhol AVB a jeho vnútro


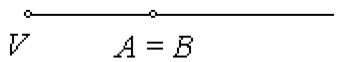
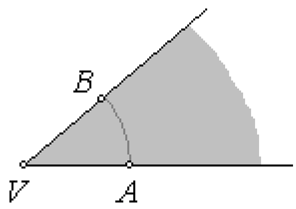
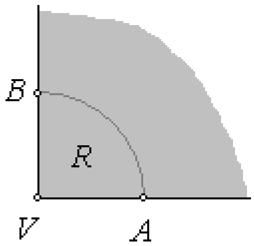
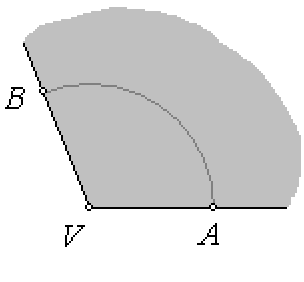
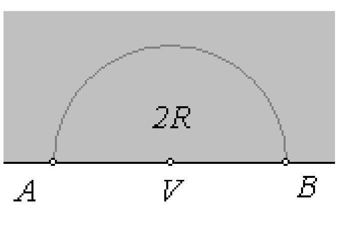
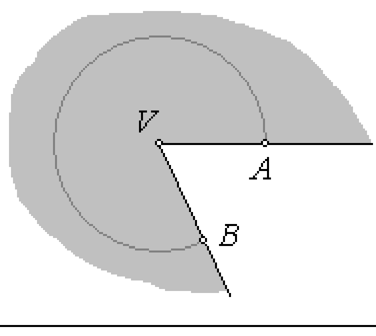
Všetky body úsečiek XY, YZ ležia vo vnútri uhla, ale nie všetky body úsečky XZ ležia vo vnútri uhla.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Body A, B, V ležia na priamke p</td></tr>
<tr><td>Polpriamky $\mapsto VA$, $\mapsto VB$ sú navzájom opačné polpriamky priamky p.</td><td>$\mapsto VA = \mapsto VB$</td></tr>
<tr><td>Priamy uhol AVB a jeho vnútro

</td><td>a) Plný uhol AVB (A = B) (nekonvexný) a jeho vnútro

</td></tr>
</table>

Existujú dva priame uhly s ramenami $\mapsto VA$, $\mapsto VB$ (konvexné) Všetky body úsečky XY ležia vo vnútri príslušného uhla. Vnútro jedného z priamych uhlov je vnútro polroviny π, vnútro zvyšného je vnútro polroviny ω opačnej k polrovine π. Hranicou oboch polrovín je priamka p.	Vnútrom uhla sú všetky body roviny okrem bodov ramena. Nie všetky body úsečky XY ležia vo vnútri uhla. **b) Nulový uhol AVB ($A = B$).**  Vnútro uhla AVB je prázdne

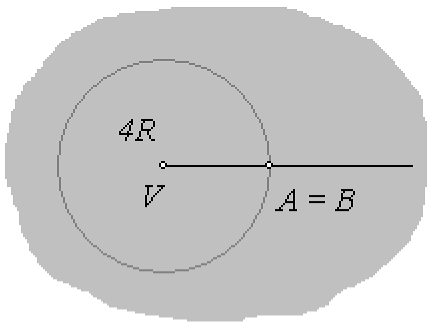
V súvislosti s ďalšou podkapitolou práce venovanej pojmu trojuholníka a súvisiacim pojmom (vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka, ťažnice trojuholníka, stredné priečky trojuholníka, výšky trojuholníka, ich vlastnosti, a ďalšie) je potrebné uviesť pojmy niektorých špeciálnych dvojíc uhlov a názvy niektorých konvexných uhlov vzhľadom na ich usporiadanie na základe relácie „menší než“/ „väčší než“. Pretože v tomto paragrafe pôjde temer výlučne o konvexné uhly, urobíme v záujme jednoduchšieho vyjadrovania nasledujúcu dohodu: *pojmom „uhol“ budeme rozumieť vždy konvexný uhol a len v prípade uhla, ktorý konvexný nie je, použijeme termín „nekonvexný uhol“.*

Postupnosť uhlov vzhľadom na reláciu „menší než“:

Tabuľka 2

1. Nulový uhol AVB  Vnútro uhla je prázdna množina.	**2. Ostrý uhol AVB a jeho vnútro**  	**3. Pravý uhol AVB a jeho vnútro** 
4. Tupý uhol AVB a jeho vnútro  	**5. Priamy uhol AVB a jeho vnútro**  	**6. Nekonvexný uhol AVB ($AVB < 4R$) a jeho vnútro** 

7. Plný uhol *AVB* (nekonvexný) a jeho vnútro



Riešené úlohy

Vybrané úlohy sú prevažne aplikačnými úlohami založenými na poznatkoch predchádzajúceho paragrafu, no niektoré z nich vedú i k definovaniu nových pojmov. Novým zavedeným pojmom je os nekonvexného uhla. Pojem miery uhla je uvedený v závere nasledujúcej kapitoly venovanej trojuholníku a súvisiacim pojmom. Žiaci začínajú chápať zmysel rozšírenia pojmu uhla a skutočnosť, že veľkosťou nenulového uhla môže byť ľubovoľné – zatiaľ racionálne – číslo.

Riešené úlohy sú zostavené analogicky. Je tu exaktne dokázaných niekoľko vlastností prvkov, ktoré súvisia s trojuholníkom (trojuholníková nerovnosť, vlastnosť vonkajšieho uhla trojuholníka, Tálesova veta o obvodových uhloch prislúchajúcich polkružnici, existencia kružnice trojuholníku opísanej, vlastnosti ťažníc trojuholníka, veta o existencii ortocentra trojuholníka).

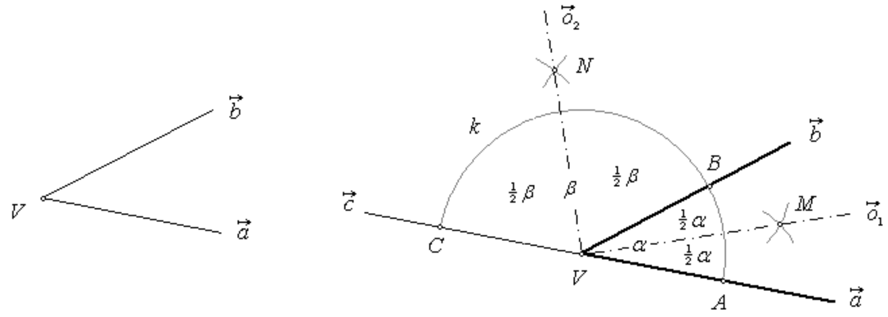
Snažili sme sa o dostatočne podrobné vypracovanie a vytypovanie miest, ktoré by žiakom mohli spôsobiť problémy. Predložené riešenie nie je tým, čo budú mať zachytené žiaci v zošitoch; žiacke záznamy musia byť stručné, sčasti symbolické, ale *dostatočne informatívne* na to, aby žiak tieto záznamy čítal s porozumením aj po istom časovom odstupe.

Úloha 4. Daný je konvexný uhol $\alpha = \mapsto a \mapsto b$ s vrcholom *V*. (Obr. 33a)

Riešte úlohu:

a) Zostrojte ľubovoľný zo susedných uhlov uhla α a označte ho β. Aký uhol je súčtom uhlov $\alpha + \beta$? Zapíšte symbolicky: $\alpha + \beta = \dots$.

b) Zostrojte osi $\mapsto o_1$, $\mapsto o_2$ uhlov α, β v danom poradí a pokúste sa určiť uhol $\mapsto o_1 \mapsto o_2$.



Obr. 2a, b

Riešenie (obr. 33b)

Ešte pred riešením úlohy si žiaci doplnia zadanie o oblúk ľubovoľnej kružnice *k*, ktorého všetky vnútorné body sú vnútornými bodmi uhla *α* a značia krajné body *A, B* oblúka rovnomennými veľkými písmenami s označením ramien. (Obr. 33b)

a) Po zopakovaní definície dvojice susedných uhlov si žiaci zostroja opačnú polpriamku $\mapsto c$ k polpriamke $\mapsto a$ a označia *C* bod kružnice *k* na ramene $\mapsto c$. Potom platí: Susedný uhol k uhlu *α* je uhol $\beta = \ \mapsto b \mapsto c$.

Záver: Súčtom susedných uhlov *α, β* je *priamy uhol* $\mapsto a \mapsto c$ s vrcholom *V*, ktorého vnútro obsahuje vnútorné body spoločného ramena $\mapsto b$ uhlov *α, β*. Platí: $\alpha + \beta = 2R$ (*R* je označenie pravého uhla).

b) Konštrukcia osi $\mapsto o_1$ uhla *α*: $\mapsto o_1 = \mapsto VM$ (bod *M* je priesečníkom oblúkov dvoch zhodných kružníc k_1 (*A*; *r*), k_2 (*B*; *r*) (t. j. $AM = BN$). Analogicky sa zostrojí os $\mapsto o_2 = \mapsto VN$ uhla *β*.

Žiaci si zopakujú, že os uhla rozdeľuje uhol na dva zhodné uhly, čo si zapíšu symbolicky: $AVM = \ MVB = \frac{1}{2}\alpha, \quad BVN = \ CVN = \frac{1}{2}\beta$. (Obr. 33b)

Určenie uhla $\mapsto o_1 \mapsto o_2$: Platí: $\mapsto o_1 \mapsto o_2 = \ \mapsto o_1 \mapsto b + \ \mapsto b \mapsto o_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Na základe výsledku a) t. j. $\alpha + \beta = 2R$ dostaneme: $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(2R) = R$, odkiaľ vyplýva, že uhol $\mapsto o_1 \mapsto o_2$ (= *R*) je pravým uhlom.

Ak by žiaci nevedeli pracovať so zlomkami, budú slovne uvažovať takto: Uhol osí $\mapsto o_1$, $\mapsto o_2$ je podľa obr. 33b súčtom jednej polovice uhla *α* a jednej polovice uhla *β* ($\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$). O súčte uhlov *α, β* vieme, že je ním priamy uhol, teda súčet polovíc uhlov *α, β* je uhol, ktorý sa rovná polovici priameho uhla. Polovica priameho uhla je pravý uhol.

Záver: $\mapsto o_1 \mapsto o_2 = R$.

Poznámka 4.28

O zaradení úlohy 4 do výučby rozhodne učiteľ, ktorý pozná a vie dobre odhadnúť schopnosti a hranicu možností vekovej skupiny žiakov i jednotlivcov. Učiteľov dialóg s triedou nekopíruje to, čo je napísané v riešení úlohy, skôr pozostáva z otázok, prostredníctvom ktorých provokuje želané správanie sa žiakov. Možno sa rozhodnúť pre riešenie nasledujúcej (analogickej) úlohy, ktorá by sa mohla zdať žiakom ľahká. V prípade vyriešenia úlohy 4 v triede bude úloha 5 vhodnou domácou úlohou.

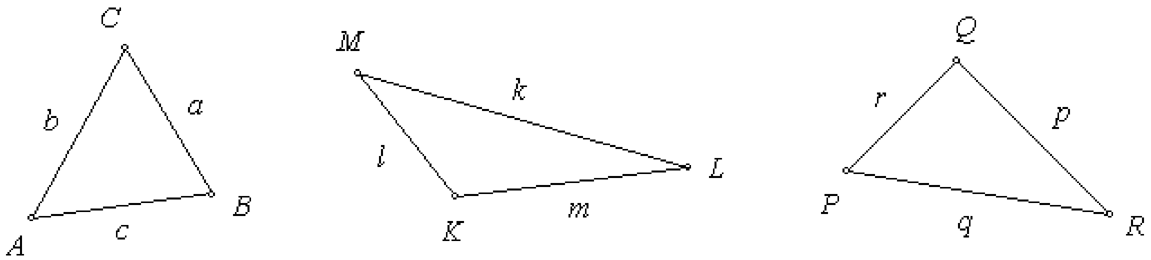
Trojuholník

Definícia trojuholníka a základných súvisiacich pojmov

Trojuholníkom *ABC* nazývame trojicu úsečiek *AB*, *BC*, *AC*, ktoré sú určené tromi bodmi *A*, *B*, *C* neležiacimi na jednej priamke. (Symbolicky zápis: ΔABC)

Body *A*, *B*, *C* sa nazývajú *vrcholmi trojuholníka* a úsečky *AB*, *BC* a *CA* nazývame *stranami trojuholníka ABC*. (Stranu obvykle označujeme doplňujúcim malým písmenom k označeniu jej krajných bodov, t. j. v prípade trojuholníka *ABC*: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.)

O strane trojuholníka a vrchole, ktorý na nej neleží hovoríme, že sú navzájom protiľahlé; napr. strana *a* trojuholníka je *protiľahlou stranou k vrcholu A trojuholníka* (a vrchol *A je protiľahlým vrcholom k strane a* daného trojuholníka), analogicky ďalšie strany a vrcholy. (Obr. 42)



Obr. 3

Definícia 4.12

Vnútorným uhlom trojuholníka nazývame každý z *konvexných uhlov*, ktorého ramená prechádzajú dvojicou strán trojuholníka. O vnútornom uhle, napr. *CAB* trojuholníka *ABC* hovoríme aj, že je to *vnútorný uhol trojuholníka ABC s vrcholom A*.

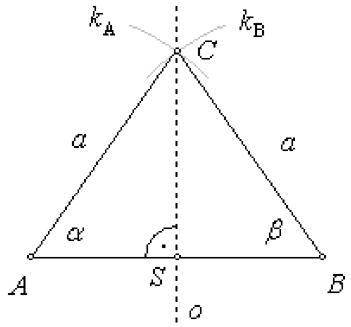
Vnútorným bodom trojuholníka sa nazýva bod roviny, ktorý je vnútorným bodom všetkých troch vnútorných uhlov trojuholníka. *Vonkajším bodom trojuholníka* sa nazýva každý bod, ktorý nie je vnútorným bodom trojuholníka ani bodom žiadnej z jeho strán.

Vonkajším uhlom trojuholníka sa nazýva každý z oboch susedných uhlov k vnútornému uhlu trojuholníka.

Riešené úlohy

Úloha 5. Daný je ľubovoľný rovnoramenný trojuholník ABC s temenom C. Dokážte, že vnútorné uhly trojuholníka protiľahlé k jeho ramenám sú zhodné.

Riešenie (obr. 60)



Obr. 4

Pri rysovaní rovnoramenného trojuholníka ABC si žiaci zvolia ľubovoľnú úsečku AB a vrchol C trojuholníka ako priesečník oblúkov zhodných kružníc (v tej istej polrovine s hranicou v priamke $\overleftrightarrow{AB}$) $k_A = (A; a)$, $k_B = (B; a)$ (a je ľubovoľná vhodná úsečka väčšia než polovica základne c trojuholníka; prečo?) Potom platí: $AC = a = BC$, t. j. trojuholník ABC je rovnoramenným trojuholníkom.

Ďalej zostrojme os o úsečky AB; bod C je bodom priamky o a os úsečky AB je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$. (Žiaci môžu použiť trojuholník s ryskou.) Os úsečky prechádza stredom S úsečky (žiaci si označia S priesečník priamky o s úsečkou AB).

Trojuholník ΔASC a ΔBSC sú zhodné (veta sss: $AS = BS$, $AC = BC$ a SC je spoločná strana), t. j. zhodné sú aj všetky odpovedajúce si vnútorné uhly trojuholníkov. Pre nás je dôležitá zhodnosť: $CAS = CBS$, pričom $CAS = CAB = \alpha$, $CBS = CBA = \beta$, odkiaľ vyplýva $\alpha = \beta$) (α je protiľahlým vnútorným uhlom k ramenu BC a β protiľahlým vnútorným uhlom k ramenu AC rovnoramenného trojuholníka ABC.)

Záver. Vnútorné uhly trojuholníka protiľahlé k jeho zhodným stranám sú zhodné.

Záver

Kapitola 4, ktorá je jadrom práce, vznikla na základe výskumu, ktorý bol realizovaný v školskom roku 2011/2012 komparatívne v dvoch 6. triedach základnej školy – v jednej podľa pôvodného projektu práce, v druhej podľa platných učebných osnov. Projekt bol rozsiahly a zahrňoval kompletnú tému *Uhol* a sčasti tému *Trojuholník*. Obe témy boli spracované v duchu koncepcie realizovanej v učebnom texte kapitoly 4 s tým rozdielom, že téma *Uhol* sa týkala aj miery. Trieda postupujúca podľa projektu vykázala v teste signifikantné zlepšenie vo výsledkoch v porovnaní s triedou postupujúcou tradičným spôsobom. Vzhľadom na malú početnosť vzoriek nebolo možné prijať rezolútne závery.

Ďalej sa ukázalo, že úplné a dôkladné spracovanie celej tematiky navrhovanou metódou nadmerne zväčšuje rozsah práce, takže sa usúdilo, že tematiku treba zúžiť na prijateľný rozsah, v akom ho prezentuje kapitola 4. Prirodzene, reálna a dlhodobá prax, v prvej fáze predovšetkým experimentálne overovacia, by vyžadovala dopracovanie textu prezentovaným spôsobom prinajmenšom na ucelené obsiahnutie nejakého uzavretého tematického celku. Zvýšenie úspešnosti výsledkov možno aj pri obmedzenosti záverov realizovaného výskumu oprávnene predpokladať. Na zistenie rozdielov v rozvoji logického myslenia v dôsledku absolvovania výučby podľa navrhnutej koncepcie by zrejme bolo potrebné vypracovať špeciálne testy. V každom prípade systematický nácvik *analytického myslenia*, v začiatkoch takou konkrétnou a učebnej téme prispôsobenou formou, je dôležitou zložkou výchovno-vzdelávacieho formovania osobnosti prostredníctvom vzdelávania v matematike, zložkou o to významnejšou, že jej pozitívne dôsledky môžu zostať trvalým obohatením intelektuálneho profilu absolventov školy.

Zoznam literatúry

[1] ALEXANDROV, A. D.: *Osnovanija geometrii*. Izdateľstvo „Nauka“. Moskva 1987.

[2] BÖHM, J., BÖRNER, W., HERKEL, E., KRÖTENHEERDT, O., MÖGLING, W., STAMMLER, L.: *Geometrie (1. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie)*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974

[3] BORSUK, K., SZMIELEW, W.: *Podstawy geometrii*. Państwowe wydawnictwo naukove, Warszawa 1953.

[4] BRŤKOVÁ, M. *Kapitoly z dejín pedagogiky*. Univerzita Komenského Bratislava, Bratislava 1995. 138 s. ISBN 80-223-0861-7.

[5] ČIŽMÁR, J. a kol. *Matematika pre 6. ročník základnej školy II. diel*. 1. vyd. SPN, Bratislava 1989. 208 s. ISBN 80-08-00096-1

[6] DONEDDU, A.: *Géométrie euclidienne plane*. Dunod, Paris 1965.

[7] ENDRES, E.: *Wiederholung Geometrie (Aufgaben mit Lösungen). Training Grundwissen Mathematik*. Stark, Freisingn2009. ISBN 978-3-89449-953-2

[8] EVANS, K., SPEED, B., GORDON, K.: *Foundations mathematics for GCSE. (A complete course for the foundation teer). (Written for AQA specifications A & B).* Harper Collins Publishers, London 2001. ISBN 0 00 711508 3

[9] FLODERER, M. a kol.: *Lebendige Mathematik 2: Band 2 für die 2. Klasse der Hauptschulen und der allgemeinbildenden höheren Schulen*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1987. ISBN 3-209-00672-5

[10] HARTSHORNE, R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, New York – Berlin – Heidelberg etc. 2000. ISBN 0-387-98650-3

[11] HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* 2. vyd. SPN, Bratislava 1990. 560 s. ISBN 80-08-01344-3

[12] HEJNÝ, M. *Aj geometria naučila človeka myslieť*. 2. upravené vyd. SPN, Bratislava 1990. 192 s. ISBN 80-08-00542-4

[13] HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig 1903. http://www.csgg.cz/25achat/25sbornik.pdf

[14] KABELE, J., JANKŮ, M., URBANOVÁ, J. *Matematika pre 5. Ročník základnej školy II. diel*. 3. vyd. SPN, Bratislava 1984. 128 s.

[15] KOLBASKÁ, V. *Matematika pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť*. 1. vyd. SPN, Bratislava 2012. ISBN 978-80-10-02291-5

[16] *Kompakt-Wissen Mathematik – Grundlagen der Mathematik*. Stark, Freising 2011. ISBN 978-3-86668-004-3

[17] KOSTIN, V. I.: *Osnovanija geometrii*. Gosudarstvennoje učebno-pedagogičeskoje izdateľstvo ministerstva prosveščenija RSFSR, Moskva 1948.

[18] KOŠČ, L. *Kapitoly zo všeobecnej psychológie: Myslenie a inteligencia*. 1. vyd. SPN, Bratislava 1986. 124 s.

[19] KOŠČ, L. *Psychológia matematických schopností*. 1. vyd. SPN, Bratislava 1972. 280 s.

[20] KUŘINA, F. Geometrie a geometrické vzdělávaní. In *Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice*. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2005. ISBN 80-7015-013-0, s. 15-22. Dostupné na internete: http://www.csgg.cz/25achat/25sbornik.pdf

[21] LENZ, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

[22] MASÁR, I. *Príručka slovenskej terminológie.* 1. vyd. VEDA, Bratislava 1991. 192 s. ISBN 80-224-0341-5

[23] MASARIK, P. a kol.. *Všeobecná a porovnávacia pedagogika.* Vysoká škola pedagogická Nitra, Pedagogická fakulta, Nitra 1994. s. 129-132. ISBN 80-88-738-16-4

[24] MEDEK, V. a kol. *Matematická terminológia*. 1. vyd. SPN, Bratislava 1975. 144 s.

[25] MÜLLEROVÁ, J. a kol. *Matematika pre 7. Ročník základnej školy II. diel*. 3. vyd. SPN, Bratislava 1986. 208 s.

[26] MÜLLEROVÁ, J. a kol. *Matematika pre 7. ročník základnej školy II. diel*. 1. vyd. SPN, Bratislava 1990. 176 s. ISBN 80-08-00516-5

[27] MUTHSAM, M.: *Geometrie 7. Klasse. (Aufgaben mit Lösungen). Serie (Reihe): Training Mathematik für G8*. Stark, Freising 2012. ISBN 978-3-89449-955-6

[28] PICCATO, A.: *Dizionario dei termini matematici*. Biblioteca universale Rizzoli, Milano, 1987. RCS Rizzoli Libri Sep. A. Milano 1987. ISBN 88-17-14511-4

[29] RAYNER, D.: *Complete mathematics for GCSE and standard grade*. Oxford University Press, Oxford 1991. ISBN 0 19 914350 1

[30] RÉDEI, L.: *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie nach F. Klein*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

[31] REPÁŠ, V. a kol. 2000. *Matematika pre 5. ročník základných škôl Geometria.* 2. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2000. ISBN 80-7158-293-X

[32] REPÁŠ, V. a kol. 1999. *Matematika pre 6. ročník základných škôl 2. diel.* 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 1999. ISBN 80-7158-182-8

[33] REPÁŠ, V. a kol. 1999. *Matematika pre 7. ročník ZŠ 1. diel.* 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 1999. ISBN 80-7158-183-6

[34] REPÁŠ, V. a kol. 2001. *Matematika pre 8. ročník ZŠ 1. diel.* 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2001. ISBN 80-7158-312-X

[35] SAVIN, A. P. a kol.: *Enciklopdedičeskij slovar junogo matematika*. Izdateľstvo „Pedagogika-Press“, Moskva 1997. ISBN 5-7155-0700-6

[36] SKLENÁRIKOVÁ, Z., ČIŽMÁR, J. *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. 2. nezmenené. Vydavateľstvo UK. Bratislava 2005. 220 s. ISBN 80-223-2020-X

[37] SPEED, B., GORDON, K., EVANS, K.: *Intermediate mathematics for GCSE (A complete course for the intermediate tier. (Written for AQA specifications A & B.)* Harper Collins Publishers Ltd., Londýn 2001. ISBN 0 00 711509 1

[38] SVITEK, V.: *Logické základy geometrie*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1969.

[39] ŠEDIVÝ, O. a kol. *Matematika pre 5. ročník základných škôl 1. časť.* 2. vyd. SPN, Bratislava 1998. ISBN 80-08-02852-1

[40] ŠEDIVÝ, O. a kol. *Matematika pre 6. ročník základných škôl 2. časť.* 1. vyd. SPN, Bratislava 1999. ISBN 80-08-02678-2

[41] ŠEDIVÝ, O. a kol. *Matematika pre 7. ročník základných škôl 2. časť.* 1. vyd. SPN, Bratislava 2000. ISBN 80-08-02680-4

[42] ŠEDIVÝ, O. a kol. 2002. *Matematika pre 8. ročník základných škôl 1. časť.* 2. vyd. Bratislava: SPN, 2002. ISBN 80-08-03441-6

[43] ŠEDIVÝ, O. a kol. *Matematika pre 9. ročník základných škôl 2. časť.* 1. vyd. SPN, Bratislava 2002. ISBN 80-08-02947-1

[44] TIPLER, M. J., VICKERS, K. M.: *New national framework MATHEMATICS 8+*. Nelson Thornes Ltd., Cheltenham 2003. ISBN 0 7487 67541

[45] URBANOVÁ, J. a kol. *Matematika pre 5. ročník základnej školy, I. diel*. 3. vyd. SPN, Bratislava 1993. ISBN 80-08-01958-1

[46] URBANOVÁ, J. a kol. *Matematika pre 5. ročník základnej školy, II. diel*. 2. vyd. SPN, Bratislava 1990. 144 s. ISBN 80-08-00853-9

[47] VYŠÍN, J.: *Elementární geometrie (Planimetrie)*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.

[48] WALISZEWSKI, V. a kol.: *Encyklopedia szkolna – Matematyka*. Wydawniczestwo Szkolne i Pedagogiczne, Warzawa 1988. ISBN 83-02-02551-8

[49] ZAJCEV, V. V., RYŽKOV, V. V., SKANAVI, M. I.: *Elementarnaja matematika (Povtoriteľnyj kurs)*. Izdateľstvo „Nauka“, Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj Literatury, Moskva 1974.

[50] ZAPLETAL, F., BOBOK, J., ŘEBÍČKOVÁ, D. *Matematika pre 6. ročník základnej školy II. diel – Geometria*. 2. vyd. SPN, Bratislava 1983. 176 s.

[51] ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2010. ISBN 978-80-7158-990-7

[52] ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*. 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2011. ISBN 978-80-8120-107-3

[53] ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. 1. vyd. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2012. ISBN 978-80-8120-125-7