



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY MATEMATIKY



Mgr. MONIKA PORKERTOVÁ

**PODPORA ROZVÍJANIA ARGUMENTÁCIE A STRATÉGIÍ RIEŠENIA
ŽIAKOV PROSTREDNÍCTVOM PLANIMETRICKÝCH ÚLOH**

Autoreferát dizertačnej práce

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Monika Porkertová.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti: Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

Doc. RNDr. Jaroslava Brincková, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica

Doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa _____ o _____ hodine pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa _____ vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, miestnosť _____.

Predseda odborovej komisie:

ÚVOD

„Vzdelávanie nie je učenie sa faktov, ale tréning mysle k rozmýšľaniu.“ Autorom tohto výroku je údajne Albert Einstein. Nikto z nás by si zrejme nedovolil mu odporovať alebo ho spochybniť. Každý predsa vie, že Einstein bol génus!

Ako sa zvykne hovoriť- časy sa menia a spolu s nimi sa menia aj ľudia, ich názory i činnosť človeka v takmer všetkých oblastiach jeho života. Tieto zmeny neobišli ani oblasť vzdelávania. Nebolo to tak veľmi dávno, keď možnosť vzdelávať sa mala iba šľachta – dnes už aj malé dieťa vie, že má právo na vzdelanie. Kedysi deti chodili do školy s tabuľkami a kriedou, dnes už mnohé z nich chodia do školy s tabletom. Mnohí z dnešných žiakov si snáď ani nedokážu predstaviť, že pred pár rokmi bolo nemožné vyhľadať si chýbajúce informácie na internete; stiahnuť si potrebnú knižku alebo referát; či kontaktovať učiteľa cez email alebo facebook. A to všetko za pár sekúnd! Len pred nedávnom boli hlavnou databázou informácií učiteľia, zošit s poznámkami a poprípade učebnica. Veľká časť vyučovania teda bola naozaj zameraná predovšetkým na odovzdanie týchto informácií. Dnes je už bežné, že učiteľia si pripravujú množstvo vlastných učebných materiálov, ktoré im pomáhajú zefektívniť vyučovací proces. Nemusia venovať čas diktovaniu poznámok – stačí žiakom poslať poznámky mailom, zverejniť ich prostredníctvom moodlu alebo žiakov odkázať na internetový zdroj a tak sa môžu dôkladnejšie venovať výkladu danej látky a lepšiemu porozumeniu žiakov. Znie to síce pekne, ale každému je zrejme jasné, že v skutočnosti treba brať do úvahy množstvo ovplyvňujúcich faktorov, ktoré tento proces značne sťažujú. Vráťme sa naspäť k úvodnému výroku. Napriek sile Einsteinovej osobnosti, mnohí ľudia s týmto výrokom súhlasia a zrejme by s ním súhlasili aj keby bol jeho autorom niekto neznámy. Pomaly si zrejme začínajú uvedomovať, že úspech nespočíva v schopnosti vedieť vyhľadať dané informácie, ale v schopnosti vedieť ich skombinovať a použiť. Skúsenosti učiteľov, ale i výsledky domácich a medzinárodných testovaní ukazujú, že naši žiaci majú v tejto oblasti veľké nedostatky.

Na mnohých školách stále pretrváva tradičná forma vyučovania matematiky, mnohí žiaci sa matematiku učia algoritmicky. Pre väčšinu z nich je matematika neoblíbeným predmetom a keďže ho musia absolvovať, snažia sa uspieť tak, že sa postupy riešenia úloh učia naspamäť. Jednotlivým krokom riešenia nerozumejú a nevedia ich teda ani vysvetliť. Ak dostanú riešiť úlohu, ktorej algoritmus riešenia nemajú naučený, zlyhajú. Z výsledkov testovaní vyplýva, že žiaci nie sú schopní použiť získané poznatky pri riešení úloh z reálneho života; nevedia použiť vzorce, ktoré majú pri riešení konkrétnej úlohy k dispozícii; nedokážu prepojiť viaceré poznatky. Darmo teda budú mať k dispozícii všetky možné výdobytky modernej doby, ak nevedia nájsť súvislosti medzi dostupnými informáciami a aplikovať ich na danú situáciu.

Uvedomujeme si, že rozvíjanie spomínaných schopností si vyžaduje špeciálne podmienky, prístup a dostatočné množstvo príležitostí. Zároveň sme si vedomí toho, že proces rozvíjania argumentácie žiakov a stratégií riešenia úloh je dlhodobý a veľmi individuálny. Vzhľadom na limitovanú dĺžku doktorandského štúdia a organizačné možnosti, sme si nemohli dovoliť realizovať didaktický výskum v takom rozsahu, aby sme

mohli objektívne posúdiť, či sa u žiakov schopnosť argumentácie a stratégií riešení úloh vo významnej miere počas realizácie didaktického výskumu rozvinula. Situácia je však taká, že slovenskí žiaci nepociťujú takmer žiadnu potrebu hľadať iné spôsoby riešenia danej úlohy (nie je neobvyklé, že žiaci vôbec nedokážu úlohy riešiť) alebo potrebu zdôvodňovania týchto postupov. Za dôležité preto považujeme prízvukovať žiakom potrebu zdôvodňovania, viesť ich k porozumeniu jednotlivých krokov riešenia a hľadaniu stratégií riešenia úloh, ktoré im najviac vyhovujú. Tieto ciele je možné naplniť aj v kratšom časovom období. Žiaci najprv musia túto schopnosť objaviť, až potom ju môžu začať rozvíjať. Rozhodli sme sa preto navrhnúť súbor planimetrických úloh, ktoré by nielen svojim obsahom, ale i formou mali podporiť rozvíjanie argumentácie a stratégií riešení žiakov. Pod formou zadania rozumieme samotný text úlohy - jeho formuláciu, grafické prevedenie, kontext úlohy. Po obsahovej stránke úlohy umožňujú viaceré spôsoby riešenia alebo širší priestor pre argumentáciu.

Dizertačná práca pozostáva z teoretickej časti, ktorú tvoria dve kapitoly a praktickej časti, ktorú tvoria tri kapitoly. V prvej kapitole detailnejšie rozoberáme dôvody, ktoré nás motivovali k tomu, aby sme sa zaoberali práve problematikou argumentácie a stratégií riešenia žiakov. V druhej kapitole stručne priblížime teoretické východiská práce. Praktická časť dizertačnej práce začína treťou kapitolou, v ktorej charakterizujeme metodológiu didaktického výskumu. Didaktický výskum tvorili dve etapy - prvú etapu didaktického výskumu opisujeme v štvrtej kapitole. Ťažiskom práce je piata kapitola, v ktorej podrobne opisujeme priebeh druhej etapy didaktického výskumu a uvádzame nielen kvalitatívne analýzy žiackych riešení, ale i schémy ich argumentácie. Odpovede na výskumné otázky z hľadiska jednotlivých výskumných etáp uvádzame vo vyhodnotení príslušnej kapitoly. V závere práce uvádzame prínos nášho didaktického výskumu pre teóriu i prax. Súčasťou prílohy dizertačnej práce je aj ukážka z pripravovanej metodologickej príručky pre učiteľov matematiky.

1 CIELE PRÁCE A VÝSKUMNÉ OTÁZKY

Na začiatku didaktického výskumu sme sa pokúsili zodpovedať nasledujúce otázky. Po ich zodpovedaní sme stanovili uvedené ciele práce.

Prečo sa zameriavame na stratégie riešenia úloh?

V praxi sa často stretávame s tým, že žiaci sa postupy riešenia úloh učia naspamäť. Jednotlivým krokom riešenia nerozumejú alebo ani nechcú rozumieť. Výsledkom takéhoto spôsobu učenia je vo väčšine prípadov neschopnosť žiakov riešiť úlohy so zmeneným zadaním, či riešenie zložitejších úloh, nakoľko nepoznajú správny algoritmus. Z hľadiska problematiky stratégií riešenia úloh sme si preto stanovili tieto ciele:

- *Motivovať žiakov k riešeniu úloh.*
- *Ponúknuť žiakom možnosť vybrať si z možných stratégií riešenia úlohy, pretože každý z nich je individualitou, ktorej vyhovuje niečo iné.*
- *Podporovať žiakov v hľadaní a navrhovaní stratégií riešenia úloh.*

Prečo sa zameriavame na argumentáciu žiakov?

S cieľom uspieť pri riešení úloh, svoje neporozumenie učivu sa mnohí žiaci snažia vykompenzovať učením sa postupov riešenia úloh naspamäť. Žiaci nechápu podstatu riešenia, preto ju ani nemôžu vedieť vysvetliť. Žiaci nie sú zvyknutí na slovný prejav. Veľkým problémom je pre žiakov preto aj samotná slovná interpretácia týchto zápisov, či presné matematické formulácie. Dôležitú rolu tu preto zohráva učiteľ, ktorý by mal poukazovať na potrebu argumentácie a od žiakov ju vyžadovať. Viesť žiakov k potrebe argumentovať a rozvíjať u nich túto schopnosť si vyžaduje čas, ale i vytvorenie vhodných podmienok). Z hľadiska problematiky argumentácie žiakov sme si stanovili tieto ciele:

- *Motivovať žiakov k argumentácii.*
- *Podporovať žiakov v argumentácii.*

Prečo sme zvolili oblasť geometrie?

Nie každá úloha je vhodná na prezentovanie viacerých stratégií riešenia (napríklad negácia výrokov) a nie každé učivo ponúka dostatok príležitostí na argumentáciu (napríklad úprava lineárnych výrazov). Učiteľ musí byť dostatočne motivovaný, aby venoval čas voľbe vhodných úloh a príprave hodiny. Geometrické úlohy sa nám zdali vhodné predovšetkým z hľadiska rozvíjania stratégií žiakov. Viaceré z nich možno riešiť graficky, na základe výpočtov, analyticky alebo kombináciou týchto spôsobov. že geometrické úlohy nám umožňujú do veľkej miery a pomerne jednoducho modifikovať ich zadania a tým meniť kontext (napr. aplikácie v praxi) i obťažnosť úlohy. Mnohé z nich sa na základe týchto úprav môžu zaradiť do vyučovania na základnej i na strednej škole.

- *Pripraviť súbor planimetrických úloh, prostredníctvom ktorých by sme podporili rozvíjanie argumentácie i stratégií riešenia žiakov.*
- *Overiť vhodnosť planimetrických úloh na podporu rozvíjania argumentácie a stratégií riešenia žiakov.*

Hlavným cieľom didaktického výskumu, počas ktorého sme sa snažili podporiť rozvíjanie argumentácie žiakov a stratégií riešení prostredníctvom planimetrických úloh, však bolo získať odpovede na nasledujúce výskumné otázky:

Výskumná otázka 1:

Ako žiaci reagujú na planimetrické úlohy, ktoré majú podporiť rozvíjanie ich argumentácie a stratégií riešenia?

Výskumná otázka 2:

Podporili úlohy zo súboru rozvíjanie argumentácie žiakov? Ak áno, akým spôsobom?

Výskumná otázka 3:

Podporili úlohy zo súboru u žiakov rozvíjanie ich stratégií riešenia? Ak áno, akým spôsobom?

2 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Problematika argumentácie i stratégií riešenia žiakov je aktuálna nielen na Slovensku, ale i zahraničí. Na Slovensku sa problematike rozličných stratégií riešenia geometrických úloh vo svojich prácach venovali napríklad Vallo (2008, 2009) a Regecová (2009). Problematike argumentácie sa vo svojich dizertačných prácach venovali niekoľkí autori (Blunárová, 2011; Bestrová, 2009). V rámci nášho výskumu sme argumentáciu chápali v zmysle definície zavedenej S. Toulminom (1958, 1978) a jedným zo spôsobov analýzy argumentácie bola Toulminova argumentačná schéma. Využitiu tejto metódy sa v zahraničí venujú napríklad Erduran, Simon, Osborne a von Aufschnaiter (2004, 2006, 2008). Pri príprave didaktického výskumu sme vo veľkej miere vychádzali z výsledkov výskumu, ktorý realizovali C. Houdement a A. Kuzniak. Tí vo svojom výskume poukazujú na to, že pojem *Geometria* sa používa na všetkých stupňoch vzdelávania, pričom je zrejmé, že nemôže mať vždy ten istý význam. Elementárnu geometriu preto rozdelili do troch paradigiem:

Geometria I. – Prirodzená geometria – charakterizuje ju silné prepojenie na reálny svet a zmyslové vnímanie. Dedukcia sa precvičuje prostredníctvom vnímania a manipulácie s objektmi. Validácia pochádza z reálneho zmyslového sveta, hlavnú rolu zohráva kreslenie. Dokazovanie uľahčuje aj stály pohyb medzi realitou a modelom.

Geometria II. – Prirodzená axiomatická geometria – v porovnaní s predchádzajúcou paradigmou je v tomto prípade prepojenie na reálny svet slabšie. Zameriavame sa na porozumenie reálneho sveta prostredníctvom axióm, za pomoci ktorých môžeme riešiť reálne problémy. Existencia axiomatického systému je nevyhnutná, no napriek tomu môže byť neúplný a pomerne silno prepojený s reálnym svetom a osobnými skúsenosťami žiaka. Pri validácii sú vnemy nahradené hypoteticko – deduktívnym procesom, v ktorom intuícia a skúsenosti stále hrajú rolu, ale v menšej miere než deduktívne zdôvodňovanie.

Geometria III. – Formalistická axiomatická geometria – sa výrazne odlišuje od predchádzajúcich dvoch paradigiem, pretože je úplne oddelená od reality. Axiómy už nie sú založené na vnemoch a ich systém musí byť konzistentný. Zdroj validácie je založený výhradne na logickom zdôvodňovaní. Spôsob dokazovania je síce rovnaký ako v Geometrii II., no axiómy sú nezávislé od ich možných aplikácií v reálnom svete.

Paradigmy sú homogénne. Je možné zdôvodňovať v rámci jednej z nich bez toho, aby sme vedeli o existencii nejakej inej paradigmy. V súvislosti s touto skutočnosťou môžu nastať rôzne nedorozumenia vyplývajúce z toho, že žiak využíva/nachádza sa v inej paradigme ako učiteľ. S cieľom objasniť a prehĺbiť koncepciu paradigiem, prepojili Houdement a Kuzniak svoju teóriu s jednotlivými úrovňami geometrického myslenia podľa van Hiele. Van Hiele (1999, 1986) vo svojej práci definovali 5 úrovní geometrického myslenia, ďalej ich rozpracovala Moore Luchin (2006), vo svojej dizertačnej práci sa tejto problematike venovala aj Gabajová (2012).

Úroveň 0 – Vizuálna úroveň – geometrické útvary žiaci rozpoznávajú podľa tvarov. Napriek tomu, že môžu poznať základné charakteristiky útvarov, nedokážu ich na základe týchto vlastností klasifikovať.

Úroveň 1 – Opisná úroveň – geometrické útvary žiaci rozpoznávajú na základe ich vlastností. K danému subjektu majú žiaci priradené vzťahy.

Úroveň 2 – Neformálna deduktívna úroveň – teoretická úroveň, na ktorej sú žiaci schopní študovať logické vzťahy medzi vlastnosťami jednotlivých geometrických útvarov. Na tejto úrovni je už nutný aj nový spôsob vyjadrovania (definície a pod).

Úroveň 3 – Axiomatická deduktívna úroveň – formálna logická úroveň, štúdium povahy vzťahov medzi určitými tvrdeniami v rámci axiomatickej teórie.

Úroveň 4 – Štruktúrálna úroveň - zahŕňa rozličné axiomatické štruktúry.

Skúmanie vzťahov medzi geometrickými paradigmami a van Hiele úrovňami geometrického myslenia i prechod medzi jednotlivými paradigmami boli náplňami ďalších výskumov. Braconne - Michoux (2011) tvrdí, že ak žiakom zadáme náročnejšiu úlohu, pri jej riešení inklinujú k výberu nižšej paradigmy alebo van Hiele úrovne. Zároveň uvádza, že van Hiele úroveň 2 je oblasťou prekrývajúcou sa s *Geometriou 1* aj *Geometriou 2*. Výsledky výskumu, ktorý bol realizovaný na skupine žiakov vo veku 11 – 12 rokov vo Francúzsku zase poukazujú na to, že títo žiaci dokázali v rámci procesu deduktívneho zdôvodňovania spontánne prejsť z používania praktickej *Geometrie 1* k používaniu teoretickej *Geometrie 2*. Tento proces si vyžadoval čas, žiaci mali zároveň dostatočné množstvo príležitostí precvičiť si schopnosť argumentácie na viacerých príkladoch a všetky aktivity prebiehali v prostredí podporujúcim deduktívne zdôvodňovanie.

Parzysz (2003) priradil jednotlivé geometrické paradigmy ku konkrétnym stupňom vzdelávania vo Francúzsku. *Geometria I.* by mala zodpovedať primárnemu vzdelávaniu matematiky (od 6 do 11 rokov) a *Geometria II.* sekundárnemu vzdelávaniu matematiky (od 11 do 18 rokov). Vzhľadom na to, že na vyučovanie geometrie sa vo Francúzsku kladie oveľa väčší dôraz ako u nás (iné osnovy, väčšia hodinová dotácia, tradícia vyučovania geometrie), priradenie paradigiem, ktoré uvádza Parzysz nekorešponduje so stupňami vzdelávania na Slovensku. Ak zoberieme do úvahy Štátny vzdelávací program z matematiky pre základné školy a gymnáziá a porovnáme ich s charakteristikou jednotlivých geometrických paradigiem, tak môžeme povedať, že:

- *Geometria I.* zodpovedá 1. a 2. stupňu základných škôl (predovšetkým nižšie ročníky) na Slovensku.
- *Geometria II.* zodpovedá posledným ročníkom 2. stupňa základných škôl a stredným školám na Slovensku.

Prechod z jednej paradigmy do druhej v našom prípade nastáva v období posledných ročníkov základných škôl. Z teoretického hľadiska by žiaci končiaci základnú školu mali byť na úrovni *Geometrie II.* V praxi to však vyzerá tak, že väčšina z nich nemá dostatočne alebo vôbec rozvinuté abstraktné myslenie, nie sú schopní zovšeobecňovať a prepájať jednotlivé poznatky, dokážu riešiť iba jednoduché úlohy. Napriek tomu sa nájdu aj žiaci, ktorí dokážu v rámci *Geometrie II.* pracovať aj na 2. stupni základnej školy. Týchto žiakov je však výrazne menej než tých, ktorí sa ešte aj pri nástupe na stredné školy nachádzajú na úrovni prvej paradigmy. Okrem skúseností z praxe môžu naše konštatovania do veľkej miery potvrdiť aj výsledky celoslovenských testovaní žiakov, ktoré v posledných rokoch ponúkajú aj výsledky

analýz z hľadiska jednotlivých testovaných oblastí matematiky – teda aj geometrie. Najhoršie výsledky žiakov z Testovania 9, ale i Externejšej časti maturitnej skúšky z matematiky sú dlhodobo pripadajú práve na úlohy z geometrie.

3 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE

Teoretickými východiskami práce sú Teória didaktických situácií a Toulminova argumentačná schéma.

TEÓRIA DIDAKTICKÝCH SITUÁCIÍ

Základným pojmom TDS je *situácia*. Podľa Brousseau-a (1997) pod situáciou rozumieme súhrn všetkých okolností, v ktorých sa jedinec nachádza; vzťahy, ktoré ho spájajú s okolím a súhrn údajov, ktoré ho v danom momente charakterizujú. *Didaktickou situáciou* nazývame takú situáciu, prostredníctvom ktorej sa jedinec dokáže niečo nové naučiť. Úlohou vyučujúceho (učiteľ) je pripraviť vyučovanému (žiak) takú didaktickú situáciu, prostredníctvom ktorej si bude žiak schopný tento poznatok osvojiť a efektívne ho využiť aj v ďalších situáciách. Špeciálnym prípadom, kedy učiteľ pripraví didaktickú situáciu, ale pri jej realizácii nezasahuje a aktívny je len žiak, je *adidaktická situácia*. Adidaktická situácia musí byť navrhnutá tak, aby žiakovi na získanie cieľového poznatku stačila interakcia so zvyšným prostredím. Poznatok, ktorý žiak získa vlastnou tvorivou činnosťou je trvácnejší a keďže sa sám podieľal na jeho konštrukcii, mal by byť schopný použiť ho aj pri riešení iných problémov.

Poznávací proces je kognitívny proces, ktorý vyúsťuje do kognitívnych významových útvarov alebo poznatkov (Turek, 1996). Medzi poznávacie procesy patrí napríklad pamäť a učenie sa. Proces poznávania v TDS možno rozdeliť na 4 etapy (Brousseau, 1997): *akcia*, *formulácia*, *validácia*, *inštitucionalizácia*. Spolu so stručnou charakteristikou každej etapy uvádzame aj dialektiku príslušnej etapy. Pojem dialektika nadobúdal počas histórie filozofie rôznorodý význam, preto jeho význam vysvetľujeme priamo v kontexte, v ktorom je chápaný v rámci TDS.

Akcia - žiakovi je predložený problém, ktorý má riešiť. Ak má úloha splniť svoj cieľ a žiak si má vďaka nej osvojiť nový poznatok, musí byť učiteľom navrhnutá tak, aby preňho predstavovala problém, ktorý je schopný vyriešiť. Postupným skúšaním a zlepšovaním svojich stratégií žiaci objavujú matematické vzťahy a zákonitosti, prestávajú postupovať náhodne – voľba ich krokov je zámerná.

Dialektika akcie spočíva v prekonávaní jednotlivých žiackych stratégií. Žiak interaguje s prostredím a na základe výsledku tejto interakcie vie opraviť svoju stratégiu a tým zlepšuje metódu svojho riešenia. Postupnosť týchto interakcií ho vedie k tomu, že si vytvorí akýsi model situácie, na základe ktorého sa dokáže rozhodnúť, či sú jeho kroky správne alebo nesprávne. Je veľmi dôležité, aby učiteľ žiakovi zabezpečil dostatočný priestor a počet možností na zlepšovanie svojich stratégií; didaktické situácie musia byť navrhnuté precízne.

Formulácia - úlohou žiaka je prezentovať výsledok svojej činnosti formou tvrdenia, ktoré bude zrozumiteľné. Jeho vyjadrovanie musí byť dostatočne presné a jednoznačné.

Dialektika formulácie spočíva v postupnom zdokonaľovaní používaného jazyka. Dôraz treba klásť na matematickú správnosť žiackeho tvrdenia.

Validácia - žiak by mal zdôvodniť voľbu svojej stratégie. Mal by vedieť vysvetliť jednotlivé kroky použitého postupu, ich následnosť a tým potvrdiť pravdivosť tvrdenia sformulovaného v predchádzajúcej etape. Argumentácia v tomto prípade nemusí mať formu matematického dôkazu (dokazovanie by bolo pre žiaka v niektorých prípadoch náročnejšie ako samotné riešenie úlohy), dôležité je určiť konkrétne východiská (teoretické poznatky, vzťahy či závislosti), na základe ktorých boli jednotlivé kroky postupu relevantné.

Dialektika validácie - žiaci sa postupne učia novým spôsobom argumentácie - reagujú na argumentáciu a pripomienky spolužiakov alebo odpovedajú na otázky učiteľa, ktoré im kladie učiteľ v snahe rozvíjať u žiakov túto schopnosť. V oboch prípadoch sú žiaci nútení rozmýšľať a zdôvodňovať svoje tvrdenia. Každý žiak by mal vedieť obhájiť svoju stratégiu riešenia, zdôvodniť jednotlivé jej kroky spolužiakom. Zároveň sa žiaci zdokonaľujú v schopnosti klásť vhodné otázky a komunikovať na požadovanej úrovni - prepojenie medzi formuláciou a validáciou (a ich dialektikami) je veľmi silné, v reálnej situácii je takmer nemožné ich oddeliť. Všetky uvedené schopnosti žiakov si vyžadujú kritické a analytické myslenie, objektivitu a prispôbivosť. Je zrejmé, že s náročnosťou úlohy rastú aj nároky na spomínané schopnosti žiakov, teda ich rozvíjanie je nevyhnutné.

Inštitucionalizácia - kľúčovú úlohu v nej zohráva učiteľ. Ako zástupca vyššej inštitúcie zhodnotí priebeh celej činnosti - zhrnie riešenie úlohy, upozorní na kľúčové kroky v postupe riešenia, ale aj na chyby, ktorých sa žiak môže dopustiť. Nový poznatok začlení do štruktúry predchádzajúcich poznatkov a príbuzných pojmov. Je vhodné, aby učiteľ žiakov upozornil aj na vzťahy s poznatkami, ktoré nevyplývajú z danej situácie.

TOULMINOVA ARGUMENTAČNÁ SCHÉMA

Schému, pomocou ktorej možno analyzovať proces argumentácie, po prvý krát Toulmin prezentoval v roku 1958. Toulminova argumentačná schéma postupne našla veľké uplatnenie v rétorike, ale i v mnohých ďalších oblastiach, v ktorých argumentácia zohráva dôležitú rolu. Toulmin vo svojej práci (Toulmin et al, 1978) definuje základné pojmy:

Pojem *argumentácia* budeme používať vtedy, ak sa budeme odvolávať na celú aktivitu, počas ktorej:

- sú tvrdenia vytvárané, popierané, podporované prostredníctvom konkrétnych dôvodov,
- sú spomínané dôvody kritizované, vyvracané a pod.

Termín *zdôvodňovanie* budeme používať v oveľa užšom zmysle slova a to vtedy, keď sa budeme odvolávať na konkrétnu aktivitu, pri ktorej:

- sú prezentované dôvody, ktoré majú podporiť pôvodné tvrdenie,
- sa ukáže, do akej miery bolo dané tvrdenie vďaka uvedeným dôvodom zintenzívnené/posilnené.

Toulminova argumentačná schéma pozostáva zo šiestich prvkov:

Tvrdenie - určuje začiatkový a zároveň i konečný bod celého procesu argumentácie. Je to vlastne žiakova odpoveď; výsledok, ktorý vypočítal alebo ním môže byť matematické tvrdenie, ktoré má žiak dokázať. Je to prvok, ktorý sa v schéme určí najľahšie.

Dáta - pozostávajú z faktov alebo postupov, ktoré vedú k tvrdeniu; sú už akceptované ako pravdivé, objasňujú a osvedčujú pôvodné tvrdenie, v najlepšom prípade priamo potvrdzujú jeho správnosť a pravdivosť. Môžu nimi byť vstupné hodnoty; konkrétne výpočty, ktoré žiak použije v snahe získať správny výsledok, metóda riešenia úlohy. Určujú sa ťažšie.

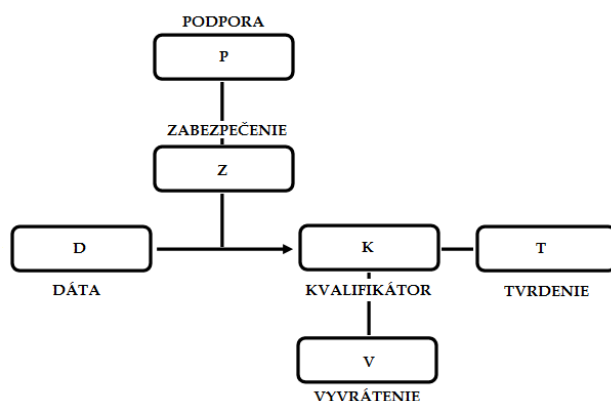
Zabezpečenie - vyjadrenia naznačujúce akým spôsobom sú dáta (= fakty, ktoré považujeme za pravdivé) spojené s tvrdením; premostňuje dáta s tvrdením a vysvetľuje ako tieto dáta vedú k tvrdeniu; v prípade vedy to môžu byť napr. matematické vzťahy, na základe ktorých možno neznáme hodnoty potrebných veličín vypočítať zo známych hodnôt príbuzných veličín. V argumentácii žiakov ním môže byť pravidlo alebo konkrétny matematický vzťah.

Podpora - poskytuje opodstatnenie zabezpečenia; v prípade spochybnenia pravdivosti a hodnovernosti zabezpečenia je nutné zosilniť zabezpečenie tým, že upresníme základné teórie a hypotézy, z ktorých zabezpečenie vychádza - požadovanú podporu zabezpečenie dostane prostredníctvom toho, že je dané do širšieho vedeckého kontextu a tým pádom dostane teoretické aj experimentálne opodstatnenie, ktoré potrebuje. Žiaci môžu vedieť dosadiť do vzťahu správne hodnoty a vypočítať výsledok, nemusia však rozumieť závislosti, ktorú vzťah vyjadruje alebo jeho teoretické pozadie (napr. veta alebo definícia, ktorej je dôsledkom). Práve v tomto prípade ide už o podporu zabezpečenia.

Kvalifikátor - reprezentuje silu a prípadné obmedzenia prepojenia medzi pôvodným tvrdením a ostatnými prvkami schémy; napríklad: *nevyhnutne, určite, podľa všetkého, dajme tomu, pravdepodobne, najskôr, možno, očividne, zrejme* - v schéme všetky nasledujú po slove „takže“ alebo „teda“. Jeho výskyt závisí predovšetkým od úrovne vyjadrovania, žiaci ho skôr použijú pri ústnom než písomnom vyjadrovaní

Vyvrátenie - vyjadruje výnimočné situácie, ktoré môžu narušiť silu podporujúcich tvrdení; používa sa ak dáta, zabezpečenie a podpora pôvodné tvrdenie podporujú len slabo, čiastočne alebo ho podporujú len za určitých podmienok. Vo všeobecnosti je v matematike ojedinelým javom, keďže tvrdenia môžu byť v matematike pravdivé alebo nepravdivé. Výnimky alebo obmedzenia sú preto naozaj zriedkavé.

Toulminova argumentačná schéma je znázornená na nasledujúcom obrázku:



4 DIDAKTICKÝ VÝSKUM

Na základe stanovených cieľov výskumu a výskumných metód, ktoré sme pri napĺňaní týchto cieľov považovali za vhodné, sme sa rozhodli pre kvalitatívny výskum. Kľúčové boli pre nás najmä nasledujúce charakteristiky kvalitatívneho výskumu (Hendl, 2008; Skutil, 2003):

- Výskum začína určením základných výskumných otázok.
- Počas výskumu je možné výskumné otázky modifikovať a dopĺňať.
- Realizácia výskumu prebieha v teréne; hlavným cieľom je objasniť, ako sa jedinec či skupina v danej situácii a v danom prostredí správajú, prečo konajú daným spôsobom, ako organizujú svoje každodenné aktivity a interakcie.
- Umožňuje študovať procesy.
- Výskumná vzorka je menšia, kontakt je intenzívnejší a dlhodobejší.
- Hlavným nástrojom získavania a vyhodnocovania dát je sám výskumník.
- Získavame hĺbkový popis prípadov, ktoré podrobne porovnávame, sledujeme ich vývoj a skúmame príslušné procesy.

Didaktický výskum pozostával z dvoch výskumných etáp - na základe vyhodnotenia prvej výskumnej etapy, sme s cieľom zefektívnenia priebehu druhej výskumnej etapy a procesu získavania dát, pristúpili k niekoľkým organizačným a obsahovým zmenám. Ciele a základná štruktúra oboch výskumných etáp však ostali nezmenené. Počas oboch výskumných etáp sme mali možnosť byť v blízkom a dlhodobom kontakte so žiakmi z výskumnej vzorky 1, aj výskumnej vzorky 2. Súbor planimetrických úloh bol navrhnutý tak, aby obsahoval dostatočné množstvo rôznych úloh, ktoré sme v závislosti od danej situácie mohli do priebehu výskumu zaradiť v rôznom poradí. Priebeh výskumu sme tak mohli prispôbovať potrebám žiakov (zmena tempa, zmena náročnosti úloh, motivácia žiakov a pod.). Počas výskumu sme využili viaceré metódy získavania dát, ktoré mali rôznu formu (domáce úlohy, písomky, skupinová diskusia, poznámky z pozorovania, audio nahrávky). Získané dáta sme analyzovali kvalitatívnym i kvantitatívnym spôsobom a dospeli sme k teoretickým i praktickým záverom. Uvádzame stručnú charakteristiku oboch výskumných etáp.

PRVÁ ETAPA DIDAKTICKÉHO VÝSKUMU

- *Didaktický predvýskum* – overenie vhodnosti pripravených úloh.
- *Úvodný test 1* – overenie miery osvojenia poznatkov z učiva Planimetrie základnej školy a schopnosti ich využitia v konkrétnych situáciách.
- Výskum realizovaný v mesiacoch marec 2012 – jún 2012 (40 vyučovacích hodín).
- Metódy získavania dát : pozorovanie (priame, dlhodobé, neštandardizované, skryté, zúčastnené), dokumenty, interview.
- *Výskumnú vzorku 1* tvorilo 53 žiakov 1. ročníka bratislavského gymnázia.
- *Súbor planimetrických úloh 1* pozostával z 11 úloh, počas realizácie prvej výskumnej etapy žiaci riešili 5 úloh.
- Analýza získaných dát – kvalitatívne analýzy.

DRUHÁ ETAPA DIDAKTICKÉHO VÝSKUMU

- Zmeny oproti prvej etape didaktického výskumu – úprava zadaní úloh, zmena formy pozorovania, audio nahrávky hodín, zmena spôsobu zaraďovania úloh počas priebehu vyučovania
- *Úvodný test 2* - overenie miery osvojenia poznatkov z učiva Planimetrie základnej školy a schopnosti ich využitia v konkrétnych situáciách
- Výskum realizovaný v mesiacoch november 2012 – január 2013 (42 vyučovacích hodín = 30 spojených/ 6+6 delených hodín).
- Metódy získavania dát – pozorovanie (priame, dlhodobé, neštandardizované, skryté, nezúčastnené), dokumenty, interview, audio nahrávky.
- *Výskumnú vzorku 2* tvorilo 28 žiakov 1. ročníka bratislavského gymnázia
- *Súbor planimetrických úloh 2* pozostával z 21 úloh, počas realizácie druhej výskumnej etapy žiaci riešili 17 úloh.
- Analýza získaných dát – kvalitatívne analýzy, Toulminova argumentačná schéma.

5 VÝSLEDKY PRÁCE A ICH VÝZNAM

V rámci nášho didaktického výskumu sme sa snažili podporiť rozvíjanie argumentácie a stratégie riešení žiakov. Tento cieľ sme sa snažili dosiahnuť prostredníctvom planimetrických úloh, ktoré mali žiakov motivovať k hľadaniu správnej stratégie riešenia (alebo viacerých stratégií riešenia) a následne k jej zdôvodneniu. Počas prvej výskumnej etapy nášho didaktického výskumu sa žiaci veľmi často vzdávali už po prečítaní zadania úlohy. Rozhodli sme sa preto upraviť zadania úloh tak, aby boli pre žiakov zaujímavejšie a neodradili ich. Ak to bolo možné, využili sme reálne situácie; do úloh sme vniesli fiktívne osoby; zadania úloh sme graficky upravili – využitie Concept Cartoons; poskytli sme žiakom možnosť priamej/nepriamej voľby odpovede. V prípade náročnejších úloh sme volili kombinované alebo spoločné riešenie, využili sme možnosť zmeny kontextu zadania úlohy a úlohu sme so žiakmi riešili opakovane. Na základe týchto zmien sa nám podarilo počas druhej výskumnej etapy získať množstvo cenných dát a táto etapa sa stala ťažiskom nášho didaktického výskumu. Dáta, ktoré sme počas druhej výskumnej etapy získali pozorovaním, z dokumentov i audio nahrávok sme kvalitatívne vyhodnocovali z hľadiska použitých

stratégií i zdôvodňovania žiakov. Argumentáciu žiakov sme analyzovali aj prostredníctvom Toulminovej argumentačnej schémy. Na základe týchto analýz sme dospeli k nasledujúcim záverom:

- *Reakcie žiakov na použité planimetrické úlohy boli vo všeobecnosti pozitívne.*
- *Formulácia zadania a možnosť voľby odpovede podporila slabších žiakov pri hľadaní správnej stratégie i následnej argumentácii.*
- *Motivácia žiakov argumentovať bola výraznejšia u tých, ktorí svoju stratégiu riešenia považovali za správnu.*
- *Použité planimetrické úlohy u viacerých žiakov podporili rozvíjanie argumentácie i stratégií riešenia.*

Za prínos práce pre pedagogickú teóriu považujeme:

- Overenie vhodnosti planimetrických úloh na podporu rozvíjania argumentácie a stratégií riešenia žiakov.
- Overenie vhodnosti úloh na prepojenie poznatkov z planimetrie základnej a strednej školy.
- Overenie vhodnosti planimetrických úloh pri rozvíjaní úrovne geometrického myslenia, podpora pri prechode z paradigmy *Geometria I.* do paradigmy *Geometria II.*

Za prínos práce pre pedagogickú prax považujeme:

- Využitie planimetrických úloh a ich zaradenia do vyučovania matematiky spôsobom, ktorý podporuje rozvíjanie argumentácie i stratégií riešení žiakov.
- Motivovanie učiteľov k zaraďovaniu podobných úloh do vyučovania úloh na základných i stredných školách, vyhľadávaniu a tvorbe ďalších úloh.
- Pripravovaná metodická príručka, ktorá bude okrem riešení jednotlivých úloh obsahovať aj metodické poznámky pre učiteľov. Zároveň môže slúžiť aj pre žiakov ako zbierka úloh so vzorovými riešeniami.
- Výsledky dizertačnej práce budú publikované a prostredníctvom článkov a didaktických materiálov k dispozícii širokej verejnosti.

Výsledky nášho výskumu u viacerých žiakov potvrdili nedostatky z učiva geometrie základnej školy, neschopnosť žiakov využiť osvojené poznatky pri riešení daného problému, neschopnosť žiakov prepájať osvojené poznatky, neschopnosť žiakov určiť rozmery základných rovinných útvarov alebo neschopnosť zovšeobecniť dané poznatky. Prostredníctvom vhodne navrhnutých planimetrických úloh sa nám podarilo väčšinu z týchto žiakov motivovať k tomu, aby hľadali správne stratégie riešenia úloh, aby sa pokúsili svoje postupy riešenia zdôvodniť. Zdôrazňovali sme význam používania správnej matematickej terminológie a jasnej formulácie. Prezentovali sme žiakom všeobecné riešenia úloh a snažili sa rozvíjať ich abstraktné myslenie – pomôcť im dosiahnuť úroveň geometrického myslenia zodpovedajúceho paradigme *Geometria II.*

ZÁVER

V súčasnosti už žiaci nie sú odkázaní len na informácie od učiteľov alebo z učebníc. Najmä vďaka internetu majú žiaci k dispozícii obrovské množstvo dát, ktoré sú v prípade potreby takmer okamžite dostupné. Tieto možnosti však strácajú význam, ak ich žiaci nevedia využiť vo svoj prospech. Problém našich žiakov spočíva v tom, že poskytnuté informácie nedokážu využiť v konkrétnych situáciách, nedokážu sa prispôbiť zmeneným podmienkam, nie sú schopní prepojiť viaceré poznatky ani hľadať a vytvárať vlastné riešenia. Skúsenosti učiteľov, domáce i medzinárodné testovania potvrdzujú, že uvedené nedostatky dlhodobo pretrvávajú u žiakov základných i stredných škôl.

V rámci nášho didaktického výskumu sme do vyučovania matematiky zaradili planimetrické úlohy, ktorých zadania boli prispôbené alebo navrhnuté takým spôsobom, aby žiakov motivovali k ich riešeniu, k hľadaniu vlastných stratégií riešenia a následne k ich zdôvodňovaniu. Planimetrické úlohy nám umožňovali prispôbovať si obťažnosť úloh, mohli sme meniť kontext zadania úlohy, zadanie úlohy sme mohli prezentovať aj prostredníctvom obrázku, čo väčšine žiakov pri hľadaní stratégie riešenia veľmi pomohlo. Zároveň bolo naším cieľom podporiť rozvíjanie geometrického myslenia žiakov, prejsť od konkrétnych predstáv žiakov ku všeobecnejším (prechod z *Geometrie I.* do *Geometrie II.*). Našou snahou bolo zistiť reakciu žiakov na tieto úlohy. Na základe pozorovania, diskusie so žiakmi a analýzy dokumentov i audio nahrávok, ktoré sme počas didaktického výskumu získali, sme posudzovali vplyv týchto úloh na rozvíjanie argumentácie i stratégií riešenia.

Problematika, ktorou sme sa zaoberali v našom didaktickom výskume však nie je zďaleka preskúmaná a možno pokračovať v ďalšom výskume. Myšlienku didaktického výskumu možno rozšíriť na ďalšie oblasti matematiky – navrhnúť podobné úlohy aj pre ďalšie tematické celky. Rozvíjanie argumentácie i stratégií riešenia žiakov je dlhodobý a individuálny proces, žiaci potrebujú neustále dostávať nové podnety a dostatok príležitostí na rozvíjanie týchto schopností.

Významnú rolu pri podpore rozvíjania argumentácie a stratégií riešení žiakov zohráva učiteľ. Učiteľ je ten, ktorý pripravuje úlohy pre žiakov a rozhoduje o tom, ktoré úlohy a akým spôsobom sa na vyučovaní budú riešiť. Potreba rozvíjania argumentácie a stratégií riešení žiakov by sa preto mala dostať čo najviac do povedomia učiteľov z praxe, ale i študentov učiteľstva. Je nutné ich oboznamovať s novými postupmi a metódami, ktoré pomáhajú rozvíjať spomínané schopnosti u žiakov. Veríme, že výsledky našej dizertačnej práce v tomto smere pomôžu a motivujú viacerých učiteľov a zároveň ocenia didaktické materiály, ktoré môžu pri rozvíjaní spomínaných schopností u žiakov použiť.

ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁČ PREDKLADATEĽA

PORKERTO VÁ, M.: *Matko a Kubko alebo ktorý útvar má pri danom obvode najväčší obsah?* Zborník vydaný v rámci riešenia projektu Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky. Fakulta humanitných vied, Žilina 2013 (v tlači)

PORKERTO VÁ, M.: *Dialektický princíp v procese argumentácie.* Písomná časť dizertačnej skúšky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava 2012

PORKERTO VÁ, M.: *Vedia žiaci definovať a správne používať Pytagorovu vetu a Trojuholníkovú nerovnosť?* Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2012, Zborník príspevkov. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava 2012. ISBN 978-80-8147-001-0

PORKERTO VÁ, M.: *Dialektika vo vyučovaní matematiky.* Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2011, Zborník príspevkov. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava 2011. ISBN 978-80-89186-87-7

BROUSSEAU, G. - TRENČANSKÝ, I. - ČERNANOVÁ, V. - BLUNÁROVÁ, J. - TISOŇ, M. - ŽIDOVÁ, D. - FOLČAN, M. - GAZDOVÁ, Z. - KAŇUKOVÁ, K. - BESTROVÁ, M. - MIKÓCZYOVÁ, D. - NEUHOLD, E. - KOUTNÁ, J. - GABAJOVÁ, M. - JUNKOVÁ, J. - PRAČKOVÁ, K. - PORKERTO VÁ, M. - ZÁBOJNÍKOVÁ, E.: *Základy a metódy didaktiky matematiky: výskumné ciele didaktiky matematiky, didaktické javy a základy modelovania: voľný preklad časti 1. Kapitoly z knihy Théorie des situations didactiques. - 1. Vyd. - Bratislava: FMFI UK, 2011. ISBN 978-80-89186-91-4*

TRENČANSKÝ, I. - PORKERTO VÁ, M. - KOHANOVÁ, I.: *Dialectics in theory of didactical situations. Mathematics and its didactics : forty years of commitment = La matematica e la sua didattica : quarant'anni di impegno. - Bologna : Pitagora Editrice, 2011. ISBN 88-371-1855-4*

PORKERTO VÁ, M.: *Dialektika v Teórii didaktických situácií,* Zborník 9 Bratislavského seminára z Teórie vyučovania matematiky, Bratislava, 2011, ISBN 978-80-89186-82-2

PORKERTO VÁ, M.: *Ako eliminovať žiacke algoritmické postupy pri riešení úloh z planimetrie.* Zborník 43. konferencie slovenských matematikov. EDIS, Žilina 2011. ISBN 978-80-554-0454-7

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

BROUSSEAU, G.: *Theory of Didactical Situations*. Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1997, ISBN 0-7923-4526-6

BROUSSEAU, G. - TRENČANSKÝ, I. - ČERŇANOVÁ, V. - BLUNÁROVÁ, J. - TISOŇ, M. - ŽIDOVÁ, D. - FOLČAN, M. - GAZDOVÁ, Z. - KAŇUKOVÁ, K. - BESTROVÁ, M. - MIKÓCZYOVÁ, D. - NEUHOLD, E. - KOUTNÁ, J. - GABAJOVÁ, M. - JUNKOVÁ, J. - PRAČKOVÁ, K. - PORKERTOVÁ, M. - ZÁBOJNÍKOVÁ, E.: *Základy a metody didaktiky matematiky : výskumné ciele didaktiky matematiky, didaktické javy a základy modelovania: voľný preklad časti 1. kapitoly z knihy Théorie des situations didactiques*. - 1. vyd. - Bratislava : FMFI UK, 2011. ISBN 978-80-89186-91-4

GABAJOVÁ, M.: *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti vo vyučovaní matematiky*. Dizertačná práca. Bratislava, fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK 2012

HENDL, J.: *Kvalitatívny výzkum. Základní metody a aplikace*. Portál, Praha, 2005.

HENDL, J.: *Kvalitatívny výzkum. Základní teorie teorie, metody a aplikace*. Praha, Portál 2008, ISBN 978-80-7367-485-4

CHEVALLARD, I.: *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

KOHANOVÁ A KOL., I.: *Didactical situation in specific conditions*, Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 6, Bratislava, Comenius University 2006, ISBN 80 - 223 - 2138 - 9

KOHANOVÁ A KOL., I.: *Matematika 1, zbirka úloh pre stredné školy*, Orbis Pictus Istropolitana, 2011, ISBN 978-80-8120-062-5

KUBÁČEK, Z.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií, 2. Časť*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2010, ISBN 978-80-10-01827-7

MOORE LUCHIN, B.: *Geometry, patterns and Process: Making the TAKS connection*. Numbers Mathematics Professional Development, 2006

PARZYSZ, B.: *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*. Carnet de route de la COPIRELEM, 2, 2003

SKUTIL A KOL.: *Základy pedagogicko-psychologického výzkumu pro studenty učitelství*, Portál 2011, ISBN 978-80-7367-778-7

TOULMIN, S.: *The uses of argument*. Cambridge University Press, 1958, ISBN 978-0-521-53483-3

TOULMIN, S. - RIEKE, R. - JANIK, A.: *An introduction to reasoning*. Macmillan Publishing company, 1978, ISBN 0-02-421160-5

TRENČANSKÝ, I.: *Možnosti Teórie didaktických situácií na zefektívnenie učenia sa*, Zborník 4 Bratislavského seminára z Teórie vyučovania matematiky, Bratislava, 2001, ISBN 80 - 223 - 1704 - 7

TRENČANSKÝ A KOL: *Základy a metódy didaktiky matematiky*, KEC FMFI UK Bratislava 2011, ISBN - 978-80-89186-91-4

TRENČANSKÝ, I.: *Možnosti teórie didaktických situácií na zefektívnenie učenia*. Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava 2001

TRENČANSKÝ, I. - BALÁŽOVÁ, J. - BESTROVÁ, M. - ČERŇANOVÁ, V. - FOLČAN, M. - GAZDOVÁ, Z. - KAŇUKOVÁ, K. - MIKÓCZYOVÁ, D. - NEUHOLD, E. - ŠIŠKOVÁ, J. - TISOŇ, M. - ŤIDOVÁ, D.: *Akcia, formulácia a validácia podľa teórie didaktických situácií v matematike*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského V rámci projektu ESF JPD 3 BA - 2005/1 - 063. Bratislava 2007

VALLO, D.: *Rôzne metódy riešenia jednej úlohy*. Matematiky, fyziky, informatika. Roč. 18, č. 7, Nitra 2009, ISSN 1210-1761

VALLO, D.: *Jedna elementárna úloha z geometrie*. Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. Stupeň ZŠ: zborník príspevkov z vedeckého seminára/ Ondrej Šedivý, Dušan Vallo, Nitra, UKF 2008, ISBN 978-80-8094-346-2

VAN HIELE, P.: *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*, Teaching Children Mathematics 6, National Council of Teacher of Mathematics, 1999, www.nctm.org

VAN HIELE, P.: *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*, Orlando, Fla:Academic Press, 1986

Internetové zdroje:

BRACONNE - MICHOUX, A.: *Relations between geometrcal paradigms and van Hiele levels*. [online] Proceedings from CERME 7, Poland 2011, dostupné na internete [2/2013] http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Braconne.pdf

CYR, S.: *Development of beginning skills in proving and proof-writing by elementary schol students*. [online] Proceedings from CERME 7, Poland 2011, dostupné na internete [2/2013] http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/Cerme7_WG1_Cyr.pdf

ERDURAN, S. - SIMON, S. - OSBORNE, J.: *TAPping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's Argument Pattern for studying science discourse*. [online] Science Education, Volume 88, 2004. dostupné na internete [2/2013] <http://moodle.stoa.usp.br/file.php/1197/TAPping.pdf>

HOUEMENT, C. - KUZNIAK, A.: *Elementary geometry split into different geometrical paradigms.* Proceedings from CERME 3, Italy 2003. dostupné na internete [3/2013]
http://www.mathematik.unidortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf

HOUEMENT, C. - KUZNIAK, A.: *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie.* Annales de didactique et de sciences cognitives. [online] Volume 11, IREM Strasbourg 2006, dostupné na internete [2/2013]
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/volume_11/HoudementKuzniak.pdf

NÚCEM: Správy o priebehu a výsledkoch testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2005 - 2013

NÚCEM: Správy výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky 2005 - 2013

NÚCEM: *PISA - MATEMATIKA ÚLOHY 2003.* [online] dostupné na internete [3/2013]
http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/3_zbierky_uloh/%C3%A9alohy_-_matematika_2003.pdf

OSBORNE, J. - ERDURAN, S. - SIMON, S.: *Enhancing the quality of argumentation in school science.* [online] Journal of Research in Science Teaching, Volume 41, 2004. dostupné na internete [2/2013]
<http://eprints.ioe.ac.uk/653/1/Osborne2004Enhancing994.pdf>

SIERPINSKA, A.: *Lectures on the Theory of Didactical Situations.* [online] dostupné na internete [2/2013] http://www.annasierpiska.wkrib.com/index.php?page=lecture_on_tds

SIMON, S. - ERDURAN, S. - OSBORNE, J.: *Learning to Teach Argumentation: Research and Development in the Science Classroom.* [online] International Journal of Science Education, Volume 28, Issue 2 - 3, 2006. dostupné na internete [2/2013]
<http://eprints.ioe.ac.uk/655/1/Simon2006Learning235.pdf>

ŠPÚ: *Štátny vzdelávací program, Matematika, ISCED 3A, 2009.* [online] dostupné na internete [3/2013]
http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

ŠPÚ: *Matematika a práca s informáciami.* [online] dostupné na internete [3/2013]
<http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program-pre-gymnaziaISCED-3a/Matematika-a-praca-s-informaciami.alej>

VON AUFSCHNAITER, C. - ERDURAN, S. - OSBORNE, J. - SIMON, S.: *Arguing to learn and learning to argue: Case studies of how students' argumentation relates to their scientific knowledge.* [online] Journal of Research in Science Teaching, Volume 45, Issue 1, 2008. dostupné na internete [2/2013]
<https://openarchive.stanford.edu/sites/default/files/von-Aufschnaiter-et-al-2008.pdf>

SUMMARY

The disappointing results of Slovak pupils in domestic and international testings led us to look for ways in which we could support the development of pupils' argumentation skills and problem-solving strategies. We have compiled such a set of tasks from plane geometry, which should motivate students to find solution, to create their own solving strategies and subsequent justification of strategies they used. The tasks were used in mathematics teaching lessons; we observed reactions of students and what effect these tasks had in support of development of aforementioned skills.

In the dissertation thesis we describe in detail the preparation and implementation of the didactic research. Pupils' problem solutions are evaluated in terms of used strategies and reasoning through qualitative analysis (according to the Theory of Didactic Situations) and Toulmin argumentation scheme. Answers to research questions, together with pupils' evaluation of selected tasks, are included in the assessment.

In conclusion, we state how, and to what extent, have we succeeded in supporting of the development of argumentation skill and problem-solution strategies of students through selected planimetric tasks, and declare what is the benefit of thesis for educational theory and practice.