Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

RNDr. Martin Nehéz

Autoreferát dizertačnej práce

Space-efficient Routing Schemes in Random Graphs

Pamät'ovo efektívne smerovacie schémy na náhodných grafoch

na získanie akademického titulu philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.2.1. informatika

Bratislava 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v externej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky, na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Martin Nehéz
Katedra informačných technológií
Vysoká škola manažmentu v Trenčíne
Sídlo Bratislava
Panónska cesta 17
851 04 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
Katedra informatiky
FMFI UK v Bratislave

Oponenti: ....

....

....

....

....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ....

v študijnom odbore 9.2.1. informatika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, ...

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod a definícia problému

Dizertačná práca sa venuje problematike smerovania správ v modeli distribuovaných sietí. Tento model je teoreticky opísaný napr. v [76]. Jeho podstatnou časťou je komunikačná sieť, reprezentovaná jednoduchým neorientovaným grafom $G = (V, E)$, v ktorej si jednotlivé uzly (vrcholy) z množiny V môžu navzájom posielať správy. Elementárny a súčasne fundamentálny spôsob posielania správ sa realizuje prostredníctvom algoritmov smerovania. Celý príslušný mechanizmus sa zvykne nazývať aj *smerovacia schéma*. Štandardný spôsob smerovania je založený na algoritmoch, ktoré používajú smerovacie tabuľky. V počítačových sieťach však pamäťová zložitosť smerovacích tabuliek rastie kvadraticky v závislosti od počtu uzlov, a to sa všeobecne považuje za pamäťovo drahé. Preto sa hľadajú iné metódy a spôsoby smerovania, ktoré by vyžadovali menej pamäte (smerovacej informácie) oproti klasickým spôsobom. Medzi najdôležitejšie z nich patria nasledujúce prístupy a schémy.

1. *Smerovacie metódy, ktoré nepoužívajú smerovacie tabuľky.* Medzi najvýznamnejšie patria *intervalové smerovacie schémy.* V niektorých prípadoch umožňujú podstatné zníženie pamäťových nárokov smerovania [39]. V dizertačnej práci sa intervalovým smerovacím schémam venuje najväčšia pozornosť.

2. *Použitie dlhších smerovacích ciest.* Optimálne smerovacie cesty (t.j. cesty s najkratšou možnou vzdialenosťou) vyžadujú vysoké pamäťové nároky. Predĺženie smerovacích ciest môže veľkosť potrebnej smerovacej informácie znížiť. Všeobecne platí, že dĺžka smerovacích ciest je nepriamo úmerná veľkosti smerovacej informácie [7, 78, 92].

3. *Obmedzenie (zúženie) smerovacích metód pre špecifické triedy grafov.* Smerovacie schémy zostrojené pre niektoré konkrétne siete môžu používať podstatne menej smerovacej informácie. Je to spôsobené tým, že takáto smerovacia schéma už nie je použiteľná pre akýkoľvek graf, ale iba pre nejakú zúženú triedu grafov.

4. *Hierarchické smerovacie schémy.* Tiež umožňujú zníženie veľkosti smerovacej informácie. V dizertačnej práci sa tomuto spôsobu nevenujeme.

Prvé tri uvedené prístupy sa v dizertačnej práci aplikujú vo vzájomnej kombinácii. Skúmajú sa predovšetkým intervalové smerovacie schémy na náhodných grafoch s rôznymi dĺžkami ciest. Dĺžky smerovacích ciest sa v práci najčastejšie vyjadrujú prostredníctvom parametrov *multiplikatívneho* alebo *aditívneho predĺženia.* V týchto prípadoch sa skutočná dĺžka ciest vyjadruje v podobe násobku dĺžky najkratších ciest (pre multiplikatívne predĺženie) alebo (pre aditívne predĺženie) pomocou konštanty, pripočítanej k dĺžke najkratších ciest. Zúženie smerovacích metód sa uplatňuje predovšetkým pre náhodné grafy.

2 Náhodné grafy a pravdepodobnostné metódy

Ako východiskový model náhodných grafov sa uvažuje model Erdösa a Rényiho [15]. Označuje sa symbolom $\mathbb{G}(n, p)$, pričom n predstavuje počet vrcholov v náhodnom grafe a p vyjadruje pravdepodobnosť existencie hrany. Okrem neho je v práci použitá aj zovšeobecnená verzia modelu $\mathbb{G}(n, p)$. Je ňou model, ktorý sa označuje symbolom $\mathbb{G}(B, p)$, pričom symbolom B je označený tzv. iniciálny graf. Pravedpodobnosť existencie hrany p teda platí iba pre hrany v iniciálnom grafe B. Zatiaľ čo v pôvodnom Erdösovom-Rényiho modeli sa za iniciálny graf považuje úplný graf s n vrcholmi (t.j. K_n), voľba iniciálneho grafu v modeli $\mathbb{G}(B, p)$ môže byť v podstate ľubovoľná.

Model náhodných grafov sa však v dizertačnej práci nepoužíva iba ako grafovo-teoretický koncept, ale aj ako prostriedok pre nekonštruktívne prevadpodobnostné techniky v dôkazoch. Tieto techniky sú založené na pojmoch a metódach prevzatých z teórie pravedpodobnosti. Patria medzi ne napr. *metóda prvého* a *druhého momentu* [3, 54].

Najdôležitejšie výsledky dizertačnej práce sa týkajú odhadov veľkosti smerovacej informácie vzhľadom k už uvedeným predpokladom. Podľa nich je komunikačná topológia príslušnej počítačovej siete reprezentovaná jedným z uvedených modelov pre náhodné grafy. Tento predpoklad má vplyv aj na metódy dôkazov. Ich myšlienky by sa dali charakterizovať nasledujúcim spôsobom.

Dôkazy dolných odhadov. V tomto prípade je potrebé nájsť graf, ktorý predstavuje najhorší prípad pre veľkosť pamäťových nárokov danej smerovacej schémy. Pomocou pravdepodobnostných metód sa potom dokáže, že uvedený graf sa s vysokou pravdepodobnosťou vyskytuje v skúmanej topológii počítačovej siete ako jej podgraf.

Dôkazy horných odhadov. Podľa možnosti najnižšie pamäťové nároky je možné dosiahnuť vtedy, ak sa podarí zostrojiť nejakú vhodnú smerovaciu schému, ktorá využíva štrukturálne znalosti o konkrétnej sieti, pre ktorú je zostrojená. Aj v tomto prípade sa pravedpodobnostnými metódami ukáže, že daná počítačová sieť má práve také vlastnosti, aby sa v nej mohla použiť smerovacia schéma, ktorá nepotrebuje príliš veľa smerovacej informácie.

3 Výsledky práce a ich význam

Výsledky práce sú formulované vo forme dolných a horných odhadov pamäťových nárokov intervalových smerovacích schém. Základnú pamäťovú zložitostnú mieru pre intervalové smerovacie schémy predstavuje maximálny počet intervalov cez všetky vychádzajúce hrany uvažovaného grafu. Ak je príslušná intervalová smerovacia schéma (skrátene IRS) optimálna (teda všetky smerovacie cesty majú najkratšiu možnú dĺžku), označuje sa maximálny počet intervalov pre uvedenú IRS ako *kompaktnosť* (angl. *compactness*).

Výsledky práce sa dajú rozdeliť do dvoch skupín. Uvedené skupiny sú opísané v samostatných podkapitolách.

3.1 Intervalové smerovanie na náhodných mriežkach

Mriežky patria k jedným z prvých typov grafov, pre ktoré sa ukázala existencia IRS s kompaktnosťou 1, pozri [8, 97]. Takáto hodnota predstavuje najmenšiu možnú (teda optimálnu) veľkosť smerovacej informácie pre akýkoľvek graf. V práci je dokázané, že ak uvažujeme mriežky s náhodným rozdelením existencie hrán, počet potrebných intervalov v príslušnej IRS vzrastie na nekonštantnú hodnotu. Nech symbol M_s^r označuje r-rozmernú mriežku a nech s označuje počet vrcholov v jednej jej dimenzii. Potom celkový počet vrcholov mriežky M_s^r je $n = s^r$. Príslušné výsledky sú formulované v nasledujúcich tvrdeniach.

Veta 1. *Nech $0 < p < 1$ je konštanta, nech $s \geq 2$, $r \geq 1$ a $\delta \geq 0$ sú nezáporné čísla. Nech IRN_δ označuje maximálny počet intervalov nejakej intervalovej smerovacej schémy s aditívnym prelžením δ.*
S pravedpodobnosťou aspoň $1 - \exp(-(s/2)^{r-1/2})$ platí, že pre náhodnú mriežku $G \in$

$\mathbb{G}(M_s^r, p)$ *musí byť splnené:*

$$\mathrm{IRN}_\delta(G) = \Omega(16^{-r}(\delta+2)^{1-r}r^{-3}(\log s)^{1-1/r}) \ .$$

Dôsledok 1. *Nech sú konštany p a s rovnaké ako v predošlej vete a $n = s^r$. Pre všetky prirodzené čísla $r \in [1, \log_2 n]$ a $\delta \geq 0$ s pravedpodobnosťou aspoň $1-\exp(-\sqrt{n}\,)$ platí, že náhodná mriežka $G \in \mathbb{G}(M_s^r, p)$ sĺňa nasledujúci dolný odhad:*

$$\mathrm{IRN}_\delta(G) = \Omega(16^{-r}(\delta+2)^{1-r}r^{-4}(\log n)^{1-1/r}) \ .$$

Na to, aby sa dalo konštatovať, že uvedené dolné odhady sú tesné, bolo by potrebné dokázať platnosť asymptoticky zhodných horných odhadov. Takýto výsledok sa však v práci nepodarilo dosiahnuť. (Súvisiace otvorené problémy zrejme patria k značne náročným [39].) Preto sme si vytýčili jednoduchší cieľ, a síce nájsť akýkoľvek netriviálny horný odhad pre uvedený problém. Netriviálny horný odhad bol nakoniec stanovený pomocou experimentálnych metód. Počítačovými simuláciami boli získané experimentálne údaje a pomocou metódy najmenších štvorcov pre mocninové funkcie bol stanovený príslušný horný odhad. Konkrétne, pre dvojrozmerné náhodné mriežky $G \in \mathbb{G}(M_s^2, p)$ je horný odhad kompaktnosti príslušnej IRS určený funkciou

$$\mathrm{IRN}_0(G) = O(n^{0.827}) \ , \qquad ak \quad n = s^2.$$

Dosiahnutie všeobecnejších alebo silnejších výsledkov ostáva stále otvoreným problémom.

3.2 Intervalové smerovanie v modeli Erdösa a Rényiho

Výskum v oblasti pamäťovej zložitosti intervalových smerovacích schém v Erdösovom-Rényiho modeli náhodných grafov sa začal prácami [32, 46]. V článku [46] C. Gavoille a D. Peleg stanovili horný odhad kompaktnosti pre náhodné grafy $G \in \mathbb{G}(n, p)$ s konštantnou hodnotou p v podobe najviac 2 intervalov (pozri Tab. 1). Súčasne vyslovili otázku, či existuje nejaká IRS, ktorá by pre uvedené náhodné grafy mohla mať iba jediný interval na každú vychádzajúcu hranu. Nasledujúci výsledok predstavuje čiastočné riešenie uvedeného otvoreného problému. S pomocou vlastností dominujúcich klík je v dizertačnej práci uvedená konštrukcia IRS s jediným intervalom a aditívnym predĺžením 2 pre uvedenú triedu náhodných grafov. Pojem *klika* sa v práci používa ako úplný podgraf daného grafu a *maximálna klika* je klika, ktorá nie je vlastným podgrafom žiadnej inej kliky (teda je maximálna vzhľadom na inklúziu).

Platí nasledujúci výsledok.

Veta 2. *Nech $0 < p < 1$ je konštanta a nech $\mathbb{L}x$ označuje funkciu $\log_{1/(1-p)} x$. Nech $G \in \mathbb{G}(n, p)$ je náhodný graf a nech r označuje veľkosť maximálnej kliky v G. Nech $\delta(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ľubovoľná pomaly rastúca funkcia, pre ktorú platí $\delta(n) = o(\log n)$. Potom:*

1. *Pre každé pevne zvolené $p > 1/2$ a náhodný graf $G \in \mathbb{G}(n, p)$ platí $\mathrm{IRN}_2(G) = 1$ s pravdepodobnosťou idúcou k 1 pre $n \to \infty$;*
2. *Ak $(3-\sqrt{5})/2 < p \leq 1/2$, tak:*
   - *pre náhodný graf $G \in \mathbb{G}(n, p)$ platí $\mathrm{IRN}_2(G) = 1$ s pravdepodobnosťou idúcou k 1 pre $n \to \infty$, ak $r \geq \mathbb{L}n + \delta(n)$,*

- *pre náhodný graf* $G \in \mathbb{G}(n,p)$ *platí* $\mathrm{IRN}_2(G) = 1$ *s konečnou pravedpodobnosť'ou* $f(p)$ *pre nejakú vhodnú funkciu* $f : [0,1] \to [0,1]$, *ak* $r = \mathbb{L}n + O(1)$.

Výsledky z vety 2 sú uvedené v tabuľke Tab. 1, kde sú dané do kontextu aj s ostatnými známymi výsledkami. Hoci posledné tri riadky tabuľky Tab. 1 predstavujú zlepšenie výsledku z článku [46], problém formulovaný Gavoillem a Pelegom zostáva stále otvorený.

Náhodný graf	Pravdepod. hrany p	k-IRS	Aditívne predĺženie	Pravdepod. výsledku	Citácia
$G \in \mathbb{G}(n,p)$	$1/n^{1-1/\Theta(\sqrt{\log n})}$	$\Omega(n^{1-1/\Theta(\sqrt{\log n})})$	0	s.v.p.	[32]
$G \in \mathbb{G}(n,p)$	konštanta	≤ 2	0	s.v.p.	[46]
$G \in \mathbb{G}(n,p)$	$p > 1/2$	1	2	s.v.p.	**Veta** 2
$G \in \mathbb{G}(n,p)$	$1/2 \geq p > 0.382$	1	2	> 0	**Veta** 2
$G \in \mathbb{G}(n,p)$	$p > 0.765$	1	1	s.v.p.	[37]

Table 1: Známe výsledky pre intervalové smerovacie schémy v modeli Erdösa a Rényiho. Skratka "s.v.p." znamená "s veľkou pravdepodobnosť'ou", t.j., že výsledok platí s pravdepodobnosť'ou blížiacou sa k 1 pre $n \to \infty$. Platí tiež, že $(3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.382$.

4 Zoznam použitej literatúry

[1] Y. Afek, H. Attiya, A. D. Fekete, M. Fischer, N. Lynch, Y. Mansour, D. Wang, L. Zuck: *Reliable Communication over Unreliable Channels*, Journal of the ACM, **41** (1994), No. 6, pp. 1267–1297.

[2] R. Albert, A.-L. Barabási: *Statistical mechanics of complex networks*, Reviews of Modern Physics, **74** (2002), pp. 47–97.

[3] N. Alon, P. Erdös, J. Spencer: *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, New York, 1992.

[4] F. Annexstein, M. Baumslag, A. Rosenberg: *Group Action Graphs and Parallel Architectures*, SIAM J. Computing, **19** (1990), No. 3, pp. 544–569.

[5] H. Attiya, J. Welch: *Distributed Computing: Fundamentals, Simulations and Advanced Topics*, McGraw-Hill, London, 1998.

[6] B. Awerbuch, A. Bar-Noy, N. Linial, D. Peleg: *Improved Routing Strategies with Succint Tables*, Journal of Algorithms, **11** (1990), pp. 307–341.

[7] B. Awerbuch, D. Peleg: *Routing with polynomial communication-space trade-off*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **5** (1992), No. 2 pp. 151–162.

[8] E. M. Bakker, J. van Leeuwen, R. B. Tan: *Linear Interval Routing*, Algorithms Review, **2** (1991), pp. 45–61.

[9] A.-L. Barabási, R. Albert: *Emergence of scaling in random networks*, Science, **286** (1999), pp. 509–512.

[10] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong: *Mean-field theory for scale-free random networks*, Physica A, **272** (1999), pp. 173–187.

[11] A. Basu, B. Charron-Bost, S. Toueg: *Solving Problems in the Presence of Process Crashes and Lossy Links*, Technical Report TR96-1609, Cornell University, Computer Science Department, 1996.

[12] A. Basu, B. Charron-Bost, S. Toueg: *Crash Failures vs. Crash + Link Failures* (Abstract) Proceedings of the 15th ACM Symposium of Distributed Computing, PODC 1996, p. 246.

[13] B. Bollobás: *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[14] B. Bollobás: *Random Graphs*, Academic Press, New York, 1985.

[15] B. Bollobás: *Random Graphs (2nd edition)*, Cambridge Studies in Advanced Mathmatics 73, 2001.

[16] B. Bollobás, P. Erdös: *Cliques in random graphs*, Math. Proc. Cam. Phil. Soc., **80** (1976), pp. 419–427.

[17] L. Bononi: *A Perspective on P2P Paradigm and Services*, Slide courtesy of A. Montresor, 2004, URL: `http://www.cs.unibo.it/people/` `/faculty/bononi/AdI2004/AdI11.pdf`

[18] H. Buhrman, J.-H. Hoepman, P. M. B. Vitányi: *Space-efficient Routing Tables for Almost All Networks and the Incompressibility Method*, SIAM J. Comput. **28** (1999), No. 4, pp. 1414–1432.

[19] H. Buhrman, M. Li, J. Tromp, P. M. B. Vitányi: *Kolmogorov Random Graphs and the Incompressibility Method*, SIAM J. Comput. **29** (1999), No. 2, pp. 590–599.

[20] H. Buhrman, M. Li, P. M. B. Vitányi: *Kolmogorov Random Graphs and the Incompressibility Method*, Proc. Conference on Compression and Complexity of Sequences, IEEE Comp. Sci. Press **28** (1997). (preliminary version of [19])

[21] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest: *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 1990.

[22] L. J. Cowen: *Compact Routing with Minimum Stretch*, Journal of Algorithms, **38** (2001), pp. 170–183.

[23] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes: *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[24] Y. Dourisboure, C. Gavoille: *Improved Compact Routing Scheme for Chordal Graphs*, In Proc. 16^{th} International Symposium on Distributed Computing (DISC 2002), LNCS 2508, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002, pp. 252–264.

[25] J. Duato, S. Yalamanchili, L. Ni: *Interconnection Networks: an Engineering Approach*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 1997.

[26] T. Eilam, C. Gavoille, D. Peleg: *Compact Routing Schemes With Low Stretch Factor*, Journal of Algorithms, **46** (2003), pp. 97–114.

[27] T. Eilam, S. Moran, S. Zaks: *The Complexity of the Characterization of Networks Supporting Shortest-Path Interval Routing*, In Proc. 4^{th} Int. Colloquium on Struct. Information & Communication Complexity SIROCCO'97, (D. Krizanc and P. Widmayer, eds.), Carleton Scientific, 1997, pp. 99–111.

[28] M. Elkin, D. Peleg: *$(1+\epsilon,\beta)$-Spanner Constructions for General Graphs*, In Proc. 33^{rd} Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2001), Hersonissos, Crete, Greece, 2001, pp. 173–182.

[29] P. Erdös, A. Rényi: *On the evolution of random graphs*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., **5** (1960), pp. 17–61.

[30] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, John Wiley & Sons, New York, 1970.

[31] M. J. Fischer: *A Theoretician's View of Fault Tolerant Distributed Computing*, In Proc. Fault-Tolerant Distributed Computing, (B. Simons and A. Spector, eds.), LNCS 448, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990, pp. 1–9.

[32] M. Flammini, J. van Leeuwen, A. Marchetti-Spaccamela: *The Complexity of Interval Routing on Random Graphs*, The Computer Journal, **41** (1998), No. 1, pp. 16–25. (Preliminary version was published in Proc. 20^{th} Int. Symposium on Math. Foundation of Comp. Sci., MFCS'95, LNCS 969, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995, pp. 37–49.)

[33] P. Fraigniaud, C. Gavoille: *Universal Routing Schemes*, Journal of Distributed Computing, **10** (1997), Springer-Verlag, pp. 65–78.

[34] P. Fraigniaud, C. Gavoille: *Interval Routing Schemes*, Algorithmica, **21** (1998), pp. 155–182.

[35] P. Fraigniaud, C. Gavoille: *A Theoretical Model for Routing Complexity*, In 5^{th} Int. Colloquium on Structural Information & Communication Complexity (SIROCCO), (L. Gargano and D. Peleg, eds.), Carleton Scientific, 1998, pp. 98-113.

[36] P. Fraigniaud, C. Gavoille: *Lower bounds for oblivious single-packet end-to-end communication*, In Proc. 17^{th} Int. Symp. on Distrib. Comp. (DISC 2003), LNCS vol. 2848, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2003, pp. 211–223.

[37] Y. Gao: *Threshold dominating cliques in random graphs and interval routing*, Journal of Discrete Algorithms, **7** (2009), No. 4, pp. 519–532.

[38] M. R. Garey, D. S. Johnson: *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman and Co., San Francisco, 1979.

[39] C. Gavoille: *A Survey on Interval Routing*, Theoretical Computer Science, **245** (2000), No. 2, pp. 217–253.

[40] C. Gavoille: *On the Dilation of Interval Routing*, The Computer Journal, **43** (2000), No. 1, pp. 243–249.

[41] C. Gavoille: *Routing in Distributed Networks: Overview and Open Problems*, ACM SIGACT News - Distributed Computing Column, **32** (2001), No. 1, pp. 36–52.

[42] C. Gavoille, M. Gengler: *Space-efficiency of routing schemes of stretch factor three*, In Proc. 4^{th} International Colloquium on Structural Information & Communication Complexity (SIROCCO '97), Carleton Scientific Press, 1997, pp. 162–175.

[43] C. Gavoille, E. Guévremont: *Worst Case Bounds For Shortest Path Interval Routing*, Journal of Algorithms, **27** (1998), pp. 1–25.

[44] C. Gavoille, N. Hanusse: *Compact Routing Tables for Graphs of Bounded Genus*, In Proc. 26^{th} International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 1999), LNCS 1644, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999, pp. 351–360.

[45] C. Gavoille, D. Peleg: *The Compactness of Interval Routing*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **12** (1999), No. 4, pp. 459–473.

[46] C. Gavoille, D. Peleg: *The Compactness of Interval Routing for Almost All Graphs*, SIAM Journal on Computing, **31** (2001), No. 3, pp. 706–721. (Preliminary version was published in Proc. 12^{th} Int. Symposium on Distributed Comp., DISC'98, LNCS 1499, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998, pp. 161–174.)

[47] C. Gavoille, S. Pérennès: *Memory Requirements for Routing in Distributed Networks*, In 15^{th} Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC '96), 1996, pp. 125–133.

[48] G. R. Grimmet: *Percolation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[49] J. L. Gross, J. Yellen: *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, 2003.

[50] T. Hagerup, C. Rüb: *A Guided Tour of Chernoff Bounds*, Information Processing Letters, **33** (1989/90), pp. 305–308.

[51] M.-C. Heydemann, B. Ducourthial: *Cayley graphs and interconnection networks*, In Graph Summetry, G. Hahn and G. Sabidussi (Eds.), vol. 497 of NATO ASI C, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 167–226.

[52] J. Hromkovič, R. Klasing, A. Pelc, P. Ružička, W. Unger: *Dissemination of Information in Communication Networks*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[53] P. Jalote: *Fault Tolerance in Distributed Systems*, Prentice Hall, 1994.

[54] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński: *Random Graphs*, Wiley-Interscience Publication, 2000.

[55] J. G. Kalbfleisch: *Complete subgraphs of random hypergraphs and bipartite graphs*, In Proc. 3rd Southeastern Conf. of Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic University, 1972, pp. 297–304.

[56] M. Karoński: *Random Graphs*, Handbook of Combinatorics (R.L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász eds.), Vol I, Elsevier, 1995, pp. 351–379.

[57] R. M. Karp: *Reducibility among combinatorial problems*, In Complexity of Computer Computation, (R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds.), Plenum Press, 1972. 24, pp. 85–103.

[58] H. Kesten: *The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice Equals* 1/2, Communication in Math. Physics, **74** (1980), 41–59.

[59] J. Kleinberg: *The Small-World Phenomenon: An Algorithmic Perspective*, In Proc. 32^{nd} Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2000), pp. 163–170.

[60] R. Kráľovič, P. Ružička, D. Štefankovič: *The Complexity of Shortest Path and Dilation Bounded Interval Routing*, Theoretical Computer Science, **234** (2000), pp. 85–107. (Preliminary version was published in Proc. 3^{rd} Int. Euro-Par Conference, LNCS 1300, Springer-Verlag, 1997, pp. 258–265.)

[61] E. Kranakis, D. Krizanc: *Lower bounds for compact routing schemes*, In Proc. 13^{th} Symp. Theor. Aspects Comp. Sci., STACS'96, LNCS 1046, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996, pp. 529–540.

[62] D. Krioukov, K. R. Fall, X. Yang: *Compact Routing on Internet-like Graphs*, INFOCOM 2004, URL: `http://www.ieee-infocom.org/ /2004/Papers/05_4.PDF` (full version published in CoRR cond-mat/0308288, 2003).

[63] L. Lamport, N. A. Lynch: *Distributed Computing: Models and Methods*, Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Sematics (J. van Leeuwen ed.), Elsevier, 1990, pp. 1157–1199.

[64] M. Li, P. M. B. Vitányi: *Kolmogorov Complexity Arguments in Combinatorics*, J. Comb. Th. Series A., **66** (1994), No. 2, pp. 226–236. Errata, Ibid., **69** (1995), 183.

[65] M. Li, P. M. B. Vitányi: *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 2nd Edition, 1997.

[66] N. Lynch: *Distributed Algorithms*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, 1996.

[67] Matworld, Wolfram Web Res., URL: `http://mathworld.wolfram.com`

[68] D. W. Matula: *The largest clique size in a random graph*, Technical report CS 7608, Dept. of Comp. Sci. Southern Methodist University, Dallas, 1976.

[69] D. May, P. Thompson: *Transputers and Routers: Components for Concurrent Machines*, Inmos, 1991.

[70] R. Motwani, P. Raghavan: *Randomized Algorithms*, Cambridge University Press, 1995.

[71] S. Nikoletseas, K. Palem, P. Spirakis, M. Yung: *Connectivity Properties in Random Regular Graphs with Edge Faults*, International Journal of Foundations of Computer Science (IJFCS), **11** (2000), No. 2, pp. 247–262.

[72] S. Nikoletseas, K. Palem, P. Spirakis, M. Yung: *Short Vertex Disjoint Paths and Multiconnectivity in Random Graphs: Reliable Network Computing*, In Proc. 21^{st} International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 1994), LNCS 820, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994, pp. 508–515. (preliminary version of [71])

[73] D. Olejár, E. Toman: *On the Order and the Number of Cliques in a Random Graph*, Math. Slovaca, **47** (1997), No. 5, pp. 499–510.

[74] E. M. Palmer: *Graphical Evolution*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[75] A. Pelc: *Fault-tolerant communication algorithms*, URL: `http://w3.uqah.uquebec.ca/pelc/faultcom.html`

[76] D. Peleg: *Distributed Computing: A Locality-Sensitive Approach*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[77] D. Peleg: *Proximity-preserving Labeling Schemes*, Journal of Graph Theory, **33** (2000), pp. 167–176.

[78] D. Peleg, E. Upfal: *A Trade-off between Space and Efficiency for Routing Tables*, Journal of the ACM, **36** (1989), No. 3, pp. 510–530.

[79] A. Pimentel: *Parallel architectures: the bare metal*, University of Amsterdam, 1999.
URL: `http://staff.science.uva.nl/~andy/apr/index.html`

[80] J. Rak, D. Tipper, K. Walkowiak (Eds.): *Reliable Networks Design and Modeling*, Proc. 2^{nd} Int. Workshop RNDM 2010, IEEE Moscow, 2010.

[81] N. Robertson, P. D. Seymour: *Graph Minors. III. Planar Tree-Width*, Journal of Combinatorial Theory B, **36** (1984) pp. 49–64.

[82] H. J. Rogers (Jr.): *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, MIT Press, 1987.

[83] P. Ružička: *On Efficiency of Path Systems Induced by Routing and Communication Schemes*, Computing and Informatics, **20** (2001), pp. 181–205.

[84] P. Ružička: *A Note on Efficiency of Interval Routing Algorithms*, The Computer Journal, **34** (1991), No. 5, pp. 475–476.

[85] P. Ružička: *On Efficiency of Interval Routing Algorithms*, In Proc. 13^{th} Int. Symposium on Math. Foundation of Computer Science (MFCS 1988), LNCS 324, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988, pp. 492–500.

[86] N. Santoro, R. Khatib: *Labelling and Implicit Routing in Networks*, The Computer Journal, **28** (1985), No. 1, pp. 5–8.

[87] B. Selic: *Fault tolerance techniques for distributed systems*, IBM, 2004,
URL: `http://www-128.ibm.com/developerworks/rational/library/114.html`.

[88] J. Spencer: *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[89] W. D. Tajibnapis: *A Correctness Proof of a Topology Information Maintenance Protocol for a Distributed Computer Network*, Communications of the ACM, **20** (1977), No. 7, pp. 477–485.

[90] R. E. Tarjan: *Depth-first search and linear graph algorithms*, SIAM J. Comput., **1** (1972), No. 2, pp. 146–160.

[91] G. Tel: *Introduction to Distributed Algorithms*, Cambridge University Press, 2nd Edition, 2000.

[92] M. Thorup, U. Zwick: *Compact Routing Schemes*, In Proc. 13^{th} Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA 2001), ACM PRESS 2001, pp. 1–10.

[93] S. S. H. Tse, F. C. M. Lau: *On the Space Requirement of Interval Routing*, IEEE Transactions on Computers, **48** (1999), No. 7, pp. 752–757.

[94] S. S. H. Tse, F. C. M. Lau: *Some Results on the Space Requirement of Interval Routing*, In Proc. 6^{th} Int. Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 1999), Carleton Scientific Press, 1999, pp. 264–279.

[95] S. S. H. Tse, F. C. M. Lau: *An Optimal Lower Bound for Interval Routing in General Networks*, In Proc. 4^{th} Int. Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 1997), Carleton Scientific Press, 1997, pp. 112–124.

[96] J. van Leeuwen, R. B. Tan: *Compact Routing Methods: A Survey*, Proc. 1^{st} Int. Colloquium on Structural Information & Communication Complexity (SIROCCO 1994), P. Flocchini, B. Mans, and N. Santoro (Eds.), Carleton University Press, 1994, pp. 99–110.

[97] J. van Leeuwen, R. B. Tan: *Interval Routing*, The Computer Journal, **30** (1987), No. 4, pp. 298–307.

[98] J. van Leeuwen, R. B. Tan: *Computer networks with compact routing tables*, In The Book of L, G. Rozemberg and A. Salomaa (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986, pp. 259–273.

[99] J. Vounckx, G. Deconinck, R. Cuyvers, R. Lauwereins, J. A. Peperstraete: *Network Fault-tolerance with Interval Routing Devices*, In. Proc. 11^{th} IASTED International Symposium on Applied Informatics, Annecy, France, 1993, pp. 293–296.

[100] B. Wieland, A. P. Godbole: *On the Domination Number of a Random Graph*, Electronic Journal of Combinatorics, **8**, No. 1, #R37, 2001.

5 Zoznam publikovaných prác autora so vzt'ahom ku skúmanej problematike

1. J. Gašo, M. Nehéz: *Stochastic cooperative distributed grammar systems and random graphs*, Acta Informatica **39** (2003), No. 2, pp. 119–140.
2. C. Gavoille, M. Nehéz: *Interval routing in reliability networks*, Theoretical Computer Science, **333** (2005), No. 3, pp. 415–432.
3. C. Gavoille, M. Nehéz: *Interval Routing in Reliability Networks*, In Proc. 10^{th} International Colloquium on Structural Information & Communication Complexity SIROCCO 2003 (J. Sibeyn ed.), Carleton Scientific, 2003, pp. 147–162. (preliminary version of 2.)
4. M. Nehéz: *The Compactness Lower Bound of Shortest-path Interval Routing on* $n \times n$ *Tori with Random Faulty Links*, Research Report, KAM-DIMATIA Series, Charles University, Praha, 582, 2002, pp. 1–19.
5. M. Nehéz, D. Olejár: *An Improved Interval Routing Scheme for Almost All Networks Based on Dominating Cliques*, In Proc. 16^{th} Int. Symposium on Algorithms and Computation ISAAC 2005, (X. Deng, D. Du eds.), LNCS 3827, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005, pp. 524–532.
6. M. Nehéz, D. Olejár: *On Dominating Cliques in Random Graphs*, Research Report, KAM-Dimatia Series 2005-750, Charles University, Prague, 2005.
7. M. Nehéz, D. Olejár, M. Demetrian: *A Detailed Study of the Dominating Cliques Phase Transition in Random Graphs*, submitted to Discrete Mathematics.

6 Ohlasy na prácu

cituje 5 [Nehéz, Olejár, ISAAC 2005]:

Y. Gao: *Threshold dominating cliques in random graphs and interval routing*, Journal of Discrete Algorithms, **7** (2009), No. 4, pp. 519–532.

7 Summary

The main emphasis of the dissertation thesis is focused on the space-efficient routing schemes in the message-passing model of distributed networks. The motivation for studying such schemes comes from the fact that the amount of routing information stored in current wide-area networks may be unacceptable large for classical routing schemes. Our consideration is mainly aimed at the interval routing schemes in random graphs. The choice of random graphs is mostly motivated by a usage of the probabilistic method in proofs.

The results of the thesis could be categorized into following two research areas.

1. *Interval routing in random meshes.* The nonconstant lower bound on number of intervals for interval routing schemes in random n-node r-dimensional meshes ($r \geq 2$) with constant edge probability is stated in the form $\Omega(16^{-r}(\delta+2)^{1-r}r^{-4}(\log n)^{1-1/r})$ where $\delta \geq 0$ is an additive stretch. Such a result holds with high probability (w.h.p.). It is already the only known nonconstant lower bound on intervals number in random graphs with respect to a constant edge probability.
The experimental upper bound on the shortest-path k-interval routing schemes in random 2-dimensional meshes in the form $O(n^{0.827})$ is another result which is related to the same topic.

2. *Interval routing in Erdös-Rényi model.* In [46], C. Gavoille and D. Peleg posed an open question of whether Erdös-Rényi random graphs support a shortest-path 1-IRS for a constant edge probability. Such a question was answered partially by proving that, in Erdös-Rényi random graph model w.h.p., there is a 1-IRS up to additive stretch 2. The construction of the corresponding interval routing scheme in Erdös-Rényi model was established in our thesis. Such a result represents an improvement of the previous one from [46].