Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Ján Mazák

Autoreferát dizertačnej práce

Circular Edge-Colourings of Cubic Graphs

(Cirkulárne hranové farbenia kubických grafov)

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia 9.2.1 Informatika

Bratislava 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre Informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ:

RNDr. Ján Mazák
KI FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ:

prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
KI FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:

RNDr. Imrich Vrťo, DrSc.
Oddelenie informatiky MÚ SAV, Dúbravská cesta 9, Bratislava
`vrto@savba.sk`

prof. RNDr. Mirko Horňák, CSc.
Ústav matematických vied, PF Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
`mirko.hornak@upjs.sk`

prof. RNDr. Zdeněk Ryjáček, DrSc.
Oddelenie diskrétnej matematiky, Katedra matematiky FAV ZČU
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
`ryjacek@kma.zcu.cz`

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa o pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa v študijnom odbore 9.2.1. Informatika na pracovisku

Predseda odborovej komisie:

prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Katedra informatiky FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

1 Úvod

Klasické rozvrhovacie problémy sa často modelujú pomocou vrcholových či hranových farbení grafov, pri ktorých je množina farieb konečná a diskrétna. Pri riešení rozvrhovacích problémov z reálneho života však potrebujeme často modely, ktoré umožnia dívať sa na čas ako na premennú z oboru reálnych čísel. Prirodzená je preto snaha rozšíriť farbenia grafov tak, aby farby mohli byť ľubovoľnými reálnymi číslami z určitého intervalu. Takúto vlastnosť majú cirkulárne farbenia grafov, ktorými sa zaoberá táto práca.

Cirkulárne hranové r-farbenie grafu G je zobrazenie $c : E(G) \to [0, r)$ také, že pre každé dve susedné hrany e a f platí $1 \leq |c(e) - c(f)| \leq r - 1$. *Cirkulárny chromatický index* grafu G, ktorý označujeme $\chi'_c(G)$, je definovaný vzťahom $\chi'_c(G) = \inf \{r > 0 :$ graf G má cirkulárne hranové r-farbenie$\}$.

Ťažisko práce spočíva v skúmaní štruktúry množiny prípustných hodnôt cirkulárneho chromatického indexu kubických grafov. Z Vizingovej vety vyplýva, že každý kubický graf má chromatický index nanajvýš 4. Preto cirkulárny chromatický index kubického grafu je z intervalu $[3, 4]$. Okrem kubických grafov, ktoré majú most oddeľujúci jeden z dvoch možných špeciálnych podgrafov, majú všetky kubické grafy cirkulárne hranové 11/3-farbenie [1]. Podobne ako iní odborníci sa domnievame, že okrem Petersenovho grafu s cirkulárnym chromatickým indexom 11/3 majú všetky ostatné bezmostové kubické grafy cirkulárny chromatický index najviac 7/2.

Nevie sa presne, ktoré čísla z intervalu $[3, 11/3]$ sú hodnotami cirkulárneho chromatického indexu nejakého grafu, ale naše výsledky značne prispievajú k zodpovedaniu tejto otázky. Zaoberáme sa len racionálnymi číslami, pretože cirkulárny chromatický index konečného grafu je vždy racionálne číslo. Obmedzíme sa na triedu kubických grafov, ktoré majú chromatický index 4 a nazývajú sa snarky; ostatné kubické grafy sú hranovo 3-zafarbiteľné a preto ich cirkulárny chromatický index je 3.

2 Vlastné výsledky

2.1 Kubické grafy s daným cirkulárnym chromatickým indexom

Podarilo sa nám pre každé racionálne číslo r z intervalu $(3, 10/3)$ skonštruovať kubický graf s cirkulárnym chromatickým indexom presne r. Tento výsledok je pomerne prekvapujúci a vyvracia hypotézu popredného výskumníka Xudinga Zhua, ktorá znie nasledovne: v množine cirkulárnych chromatických indexov všetkých grafov neexistuje rastúca nekonečná zhora ohraničená postupnosť.

Naša metóda je založená na podobnej myšlienke, aká vedie ku konštrukcii zovšeobecnených Blanušových snarkov. Skonštruované grafy však obsahujú hranové rezy veľkosti 2 oddeľujúce cykly, čo je vlastnosť, o ktorú veľmi nestojíme. Bolo by zaujímavé zostrojiť cyklicky hranovo 4-súvislé snarky s daným cirkulárnym chromatickým indexom. Veríme, že naša metóda sa na tento účel dá použiť, ak istý blok vznikajúci z grafu K_4 nahradíme blokom s viacerými visiacimi hranami, avšak cena, ktorú za to pravdepodobne zaplatíme, bude zníženie hornej hranice intervalu $(3, 10/3)$ na číslo výrazne menšie.

Otázne je, či naša metóda môže poslúžiť na konštrukciu kubických grafov s cirkulárnym chromatickým indexom väčším ako 10/3. Veríme, že áno, ak sa nájdu vhodné súčiastky; zatiaľ sa nám podarilo zostrojiť jednu nekonečnú postupnosť grafov s indexami konvergujúcimi zhora k 10/3. Je zaujímavé, že s prispením tejto postupnosti naša metóda umožňuje skonštruovať graf G s indexom r pre každé r také, že je známy nejaký kubický graf s indexom r. Toto zahŕňa aj netriválne snarky s najviac 28 vrcholmi, ktoré sme preverili počítačom.

Potenciál našej metódy je limitovaný existenciou blokov vhodných miesto blokov A a B. Problém je však v tom, že vhodné bloky vlastne vznikajú z grafov s veľkým cirkulárnym chromatickým indexom. Inak povedané, aby sme zostrojili graf s veľkým indexom, musíme na konštrukciu použiť bloky, ktoré z grafov s veľkým indexom vzniknú. Pritom ak uvažujeme o konštrukcii grafov s indexom nad 10/3, vlastne jediným vhodným blokom so štyrmi trčiacimi hranami je blok B, ktorý vznikne z Petersenovho grafu; nepoznáme žiaden iný graf s dostatočne vysokým indexom.

2.2 Cirkulárny chromatický index kubických grafov s obvodom aspoň 6

Náš druhý hlavný výsledok hovorí, že každý bezmostový kubický graf s obvodom aspoň šesť má cirkulárne hranové 7/2-farbenie. Požiadavka na obvod sa už nedá znížiť, pretože Petersenov graf s obvodom päť má cirkulárny chromatický index 11/3. Nie je nám známe, či hodnota 7/2 je pre grafy s obvodom aspoň 6 najlepšia možná — nepoznáme žiaden kubický graf s obvodom aspoň 6 a cirkulárnym chromatickým indexom väčším ako 10/3 (hodnota 10/3 sa nadobúda pri treťom Isaacsovom snarku).

Použité 7/2-farbenia vznikajú tak, že hrany zvoleného 1-faktora M ofarbíme farbami 0 a 1 tak, aby sme zabezpečili existenciu po sebe idúcich hrán farieb 0, 0, 1, 1 vychádzajúcich z každého cyklu nepárnej dĺžky v 2-faktore F komplementárnom k M. Ofarbenie M zostrojujeme tak, že skontrahujeme všetky cykly v 2-faktore F a v získanom grafe H rozložíme množinu hrán na disjunktné ťahy s istými vhodnými vlastnosťami. Na túto dekompozíciu však potrebujeme, aby v grafe G neboli vrcholy stupňov 3 a 5, ktoré zodpovedajú kružniciam dĺžok 3 a 5 v pôvodnom grafe G. Naša metóda sa asi žiadnym spôsobom nedokáže vysporiadať s kružnicami dĺžky päť v 2-faktore kubického grafu; nanešťastie grafov s ľubovoľným množstvom päťcyklov v každom 2-faktore je veľa, ako hovorí náš ďalší výsledok.

2.3 Snarky s 5-cyklami v každom 2-faktore

Z hľadiska predchádzajúceho výsledku nás veľmi zaujíma otázka, ktoré kubické grafy majú 2-faktor, ktorý neobsahuje kružnice dĺžok 3 a 5. Už dlho je známe, že pre každé kladné celé číslo k existujú kubické grafy, ktoré musia v každom 2-faktore obsahovať aspoň k kružníc dĺžky 5, avšak tieto grafy obsahujú rezy s tromi hranami a preto sa zvyčajne pokladajú za triviálne. Nám sa podarilo zostrojiť nekonečnú triedu cyklicky 4-súvislých grafov s touto vlastnosťou.

Konštrukcia vychádza z vhodného prepojenia dvoch rovnakých blokov, ktoré dostaneme z Petersenovho grafu odobratím dvoch vrcholov. Produkuje cyklicky 4-súvislé snarky s obvodom 5. Je atraktívna tým, že o skonštruovaných grafoch netreba osobitne dokazovať, že sú to snarky: obsahujú v každom 2-faktore kružnicu nepárnej dĺžky a preto nemôžu byť hranovo 3-zafarbiteľné.

2.4 Dolné odhady cirkulárneho chromatického indexu snarkov

Posledným výsledkom je odvodenie niekoľkých dolných odhadov cirkulárneho chromatického indexu kubických grafov s chromatickým indexom 4. Kubický graf s $2k$ vrcholmi, chromatickým indexom 4 a obvodom aspoň päť má cirkulárny chromatický index aspoň $3 + 5/2k$. Táto hranica sa dá zlepšiť na $3 + 8/3k$, ak vyžadujeme obvod aspoň sedem alebo cyklickú hranovú súvislosť aspoň päť. Použité metódy vychádzajú z istých vlastností 1-faktorov v kubických grafoch a dajú sa priamočiaro zovšeobecniť na regulárne grafy s väčším maximálnym stupňom.

3 Zoznam použitej literatúry

References

[1] P. Afshani, M. Ghandehari, M. Ghandehari, H. Hatami, R. Tusserkani, and X. Zhu, Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3, J. Graph Theory 49 (2005), 325–335.

[2] J. A. Bondy and P. Hell, A note on the star chromatic number, J. Graph Theory 14 (1990), 479–482.

[3] B. Candráková, personal communication (2011).

[4] R. Diestel, Graph Theory, Third Ed., Springer, Heidelberg, 2005.

[5] M. Ghebleh, Theorems and Computations in Circular Colourings of Graphs, PhD thesis (2007), Simon Fraser University, 74–75.

[6] M. Ghebleh, Circular Chromatic Index of Generalized Blanusa Snarks, Electron. J. Combin. 15 (2008).

[7] M. Ghebleh, The circular chromatic index of Goldberg snarks, Discrete Math. 307 (2007), 3220–3225.

[8] M. Ghebleh, D. Kráľ, S. Norine, and R. Thomas, The circular chromatic index of flower snarks, Electron. J. Combin. 13 (2006), #20.

[9] L. A. Goddyn, M. Tarsi, and C.-Q. Zhang, On (k,d)-colorings and fractional nowhere-zero flows, J. Graph Theory 28 (1998), 155–161.

[10] J. L. Gross and J. Yellen, Graph Theory and Its Applications, Chapman & Hall/CRC (2006), 183–184.

[11] D. R. Guichard, Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number, J. Graph Theory 17 (1993), 129–134.

[12] A. Hackmann and A. Kemnitz, The circular chromatic index, Discrete Math. 286 (2004), 89–93.

[13] H. Hatami and R. Tusserkani, On the complexity of the circular chromatic number, J. Graph Theory 47 (2004), 226–230.

[14] A. J. Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis, Combinatorial Analysis: Proceedings of the tenth symposium in applied mathematics of the AMS, R. Bellman and M. Hall Jr., Eds., 1960, 113–128.

[15] I. Holyer, The NP-completeness of edge-colouring, SIAM J. Comput 10 (1981), 718–720.

[16] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable, The American Mathematical Monthly 82, No. 3. (1975), 221–239.

[17] F. Jaeger and T. Swart, Conjecture 1, in: Combinatorics 79 (M. Deza, I. G. Rosenberg, eds.), Ann. Discrete Math. Vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1980, p. 305.

[18] T. Kaiser, D. Král', and R. Škrekovski, A revival of the girth conjecture, J. Combin. Theory Ser. B 92 (2004), 41–53.

[19] T. Kaiser, D. Král', R. Škrekovski and X. Zhu, The circular chromatic index of graphs of high girth, J. Combin. Theory Ser. B 97 (2007), 1–13.

[20] T. Kaiser, R. Škrekovski, Cycles intersecting edge-cuts of prescribed sizes, SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), 861–874.

[21] M. Kochol, Snarks without small cycles, J. Combin. Theory Ser. B 67 (1996), 34–47.

[22] D. Kráľ, E. Máčajová, O. Pangrác, A. Raspaud, J.-S. Sereni, M. Škoviera, Projective, affine, and abelian colorings of cubic graphs, European J. Combinatorics 30 (2009), 53–69.

[23] D. Kráľ, E. Máčajová, J. Mazák, J.-S. Sereni, Circular edge-colourings of cubic graphs with girth six, J. Combin. Theory Ser. B 100 (2010), 351–358.

[24] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching theory*, Volume 121 of North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Annals of Discrete Mathematics, 29.

[25] R. Lukoťka, E. Máčajová, J. Mazák, and M. Škoviera, Circuits of length five in 2-factors of cubic graphs, accepted to Discrete Math.

[26] R. Lukoťka and J. Mazák, Cubic graphs with given circular chromatic index, SIAM J. Discrete Math. Vol. 24 (2010), No. 3, 1091–1103.

[27] R. Lukoťka and M. Škoviera, Real flow number and the cycle rank of a graph, J. Graph Theory 59 (2008), 11–16.

[28] M. Mačaj and J. Mazák, Asymptotic lower bound on circular chromatic index of snarks, manuscript, 2011.

[29] E. Máčajová, M. Škoviera, Fano colourings of cubic graphs and the Fulkerson conjecture, Theoretical Computer Science, Volume 349, Issue 1 (2005), 112–120.

[30] E. Máčajová, M. Škoviera, On a Conjecture of Fan and Raspaud, European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009), Electronic Notes in Discrete Mathematics, Volume 34 (2009), Pages 237–241.

[31] J. Mazák, Circular chromatic index of snarks, Master's Thesis (2007), Comenius University Bratislava.

[32] J. Mazák, Circular Chromatic Index of Type 1 Blanuša Snarks, J. Graph Theory 59 (2008), 89–96.

[33] A. Nadolski, The circular chromatic index of some class 2 graphs, Discrete Math. 307 (2007), 1447–1454.

[34] R. Nedela and M. Škoviera, Decompositions and reductions of snarks, J. Graph Theory 22 (1996), 253–279.

[35] Z. Pan and X. Zhu, Construction of graphs with given circular flow numbers, J. Graph Theory 43 (2003), 304–318.

[36] J. P. Ch. Petersen, Die Theorie der regulären Graphs, Acta Mathematica 15 (1891), 193–220.

[37] M. Rosenfeld, The number of cycles in 2-factors of cubic graphs, Discrete Math. 84 (1990), 285–294.

[38] E. Steffen, Classification and characterization of snarks, Discrete Math. 188 (1998), 183–203.

[39] P. G. Tait, Note on a Theorem in Geometry of Position, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 29 (1880), 657–660.

[40] A. Vince, Star chromatic number, J. Graph Theory 12 (1988), 551–559.

[41] J. J. Watkins, Snarks, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989), 606–622.

[42] J. J. Watkins and R. J. Wilson, A survey of snarks, in: Graph theory, Combinatorics and Applications Vol. 2, Y. Alavi et al. (eds.), Wiley, New York, 1991, 1129–1144.

[43] C.-Q. Zhang, Integer Flows And Cycle Covers Of Graphs, CRC Press (1997), ISBN 0824797906.

[44] X. Zhu, Circular chromatic number: a survey, Discrete Math. 229 (2001), 371–410.

[45] X. Zhu, Recent developments in circular colourings of graphs, Topics in Discrete Mathematics, Springer (2006), 497–550.

4 Zoznam publikovaných prác autora so vzťahom ku skúmanej problematike

1. J. Mazák, Circular Chromatic Index of Type 1 Blanuša Snarks, J. Graph Theory 59 (2008), 89–96.

2. D. Kráľ, E. Máčajová, J. Mazák, J.-S. Sereni, Circular edge-colourings of cubic graphs with girth six, J. Combin. Theory Ser. B 100 (2010), 351–358.

3. R. Lukoťka and J. Mazák, Cubic graphs with given circular chromatic index, SIAM J. Discrete Math. Vol. 24 (2010), No. 3, 1091–1103.

5 Summary

This work is devoted to circular chromatic index of cubic graphs. A *circular r-edge-colouring* of a graph G is a mapping $c : E(G) \to [0, r)$ such that $1 \leq |c(e)-c(f)| \leq r-1$ for any two adjacent edges e and f. The *circular chromatic index* of a graph G, denoted by $\chi'_c(G)$, is defined by $\chi'_c(G) = \inf \{r > 0 : G \text{ has a circular } r\text{-edge-colouring}\}$.

As a first result, we describe a construction that produces a cubic graph with circular chromatic index r for every rational $r \in (3, 10/3]$. This disproves a conjecture of Zhu [45, Conjecture 4.2].

Our second result is that every bridgeless cubic graph having a 2-factor without cycles of lengths 3 and 5 has a 7/2-edge-colouring. This result is a step towards the conjecture that all bridgeless cubic graphs except the Petersen graph have circular chromatic index at most 7/2. We also construct an infinite family of cyclically 4-edge-connected cubic graphs that have at least one cycle of length 5 in every 2-factor; this shows that our method of proving the existence of a 7/2-edge-colouring cannot be applied to infinitely many cubic graphs.

Finally, we establish several lower bounds on the circular chromatic index of a snark of a given order dependent on girth and cyclic edge-connectivity. In particular, a snark with $2k$ vertices and girth at least five has circular chromatic index at least $3 + 5/2k$.