UNIVERZITA KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

RNDr. Alexander Mat'ašovský

Autoreferát dizertačnej práce

LOKÁLNA BÉZOUTOVA VETA

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia:

9.1.7 Geometria a topológia

Bratislava 2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bartislave.

Predkladateľ: RNDr. Alexander Maťašovský
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Eduard Boďa, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti: ....

....

....

....

....

....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....

9.1.7 Geometria a topológia – Geometria a topológia

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Predseda odborovej komisie:

prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Obsah

1 Úvod

1.1 Historický prehľad problematiky

Algebraické krivky ako modely algebraických variet, sú predmetom skúmania viacerých matematických disciplín či už aplikovaných alebo teoretických. Počas skúmania týchto kriviek vznikli rôzne otázky týkajúce sa dotyčníc v jednotlivých bodoch krivky, vzájomnej polohy krivky a priamky, vzájomnej polohy dvoch kriviek a mnohé iné. Problematika singulárnych bodov algebraických kriviek patrí medzi klasické témy algebraickej geometrie.

Problematika hľadania spoločných bodov dvoch kriviek zaujala mnohých matematikov v histórii. Otázka znie: V koľkých bodoch sa pretínajú dve algebraické krivky definované polynómami z okruhu polynómov $k[x_0, x_1, x_2]$ so stupňom r, s v projektívnej rovine nad algebraicky uzavretým poľom, ktoré nemajú spoločné komponenty? Ukázalo sa, že počet spoločných bodov algebraických kriviek je zhora ohraničený súčinom stupňov definujúcich polynómov. Toto tvrdenie prvýkrát dokázal E. Bézout.

Historické korene tohoto tvrdenia nájdeme v základnej vete algebry, ktorá hovorí o počte koreňov nenulového polynómu a tvrdí, že ten počet sa rovná stupňu polynómu, ak každý koreň počítame s jeho násobnosťou. Otázka rovnosti v Bézoutovej vete vyvolala vznik teórie násobnosti.

Pri riešení tohoto problému vznikli štyri smery budovania teórie násobnosti. Predstavitelia a spôsob ich riešenia problému je nasledovný:

1. Van der Waerden, A. Weil: metódy enumeratívnej geometrie, axiomatická definícia násobnosti,

2. C. Chevalley a P. Samuel: metódy lokálnej algebry,

3. J. P. Serre, M. Auslander a D. A. Buchsbaum: prostriedky homologickej algebry,

4. F. S. Macaulay a W. Gröbner: ideálovo-teoretický aparát.

Na základe výsledkov týchto teórií od roku 1955 existujú dve definície násobnosti $\mathfrak{m}$-primárneho ideálu $\mathfrak{q}$ v lokálnom noetherovskom okruhu $(A, \mathfrak{m})$. Tieto dve násobnosti sa vo všeobecnosti líšia a sú viazané vzťahom

$$\ell_A(A/\mathfrak{q}) \geq e_0(\mathfrak{q}; A).$$

1.2 Súčasný stav a ciele dizertácie

Teória násobnosti sa špeciálne zaoberá problémom, kedy namiesto nerovnosti v Bézoutovej vete nastane rovnosť. Tvrdenie vety súvisí s pojmom násobnosti bodu na algebraických varietách a s pojmom lokálnej priesekovej násobnosti spoločného bodu týchto variet. Podľa [7], [9] a [14] je lokálna priesekovú násobnosť spoločného priesečníka väčšia alebo sa rovná súčinu násobností tohoto bodu na jednotlivých krivkách. Klasická dvojrozmerná Bézoutova veta však nehovorí o násobnosti priesečníka dvoch algebraických kriviek vo vzťahu k jeho násobnosti na jednotlivých krivkách a dotykovej situácie v ňom. Lokálnu formuláciu tejto vety prvýkrát publikoval v roku 1947 Bohumil Bydžovský, ktorá hovorí o vzťahu týchto násobností. Dokázal, že priesečník, ktorý je na jednej krivke c-násobný, na druhej krivke d-násobný a v ktorom majú krivky spoločných t dotyčníc, je aspoň $(cd+t)$-násobným priesečníkom. Existuje nezáporné celé číslo ϱ také, že násobnosť priesečníka je práve $cd+t+\varrho$.

Nech X a Y sú afinné algebraické krivky v $\mathbb{A}^2(k)$, ktoré nemajú spoločné komponenty. Nech f a g sú definujúce polynómy z okruhu $k[x,y]$ týchto kriviek, t. j. $X = V(f)$ a $Y = V(g)$. Predpokladajme, že začiatok súradnicovej sústavy $0 \in X \cap Y$. Označme $A = k[x,y]_{(x,y)}$ lokálny okruh v začiatku súradnicovej sústavy s maximálnym ideálom $\mathfrak{m} = (x,y)A$. Nech $f^\star$ a $g^\star$ sú homogénne polynómy najnižšieho stupňa definujúcich polynómov f a g a ich stupeň c a d v tomto poradí. Potom lokálna Bézoutova veta tvrdí, že

$$e_0\big((f,g);A\big) \geq cd.$$

Podľa B. Bydžovského platí nerovnosť

$$e_0\big((f,g);A\big) \geq cd+t,$$

teda existuje $\varrho \in \mathbb{N}_0$, že

$$e_0\big((f,g);A\big) = cd+t+\varrho.$$

E. Boďa a P. Schenzel [5] metódami homologickej algebry vyjadrili ϱ ako dĺžku modulu pre $n \gg 0$ v tvare

$$\varrho = \ell_A\Big((f,\mathfrak{m}^n) :_A g/\big((f,\mathfrak{m}^n) :_A g\big) \cap (f,\mathfrak{m}^{n-d-1})\Big).$$

Ak označíme $\operatorname{corr}(f,g) = t+\varrho$, potom v [5] autori tiež ukázali, že pre $n \gg 0$

$$\operatorname{corr}(f,g) = \ell_A\big((f,\mathfrak{m}^n) :_A g/(f,\mathfrak{m}^{n-d})\big).$$

Cieľom dizertácie je odvodiť ďalšie tvary na výpočet korekcie $\operatorname{corr}(f,g)$ dvojrozmernej lokálnej Bézoutovej vety a odvodiť nové tvary korekcie trojrozmernej lokálnej Bézoutovej vety.

2 Základné pojmy

V tejto časti práce sa zaoberáme základnými pojmami a vzťahmi, potrebnými v ďalších kapitolách.

2.1 Okruhy a ideály

Základnou algebraickou štruktúrou je komutatívny okruh s jednotkou. Definujeme ideál v okruhu a základné operácie medzi nimi ako súčet, súčin, prienik a podiel. Tiež definujeme niektoré špeciálne typy ideálov ako maximálny, primárny a prvoideál.

2.2 Okruhy polynómov

V tejto časti definujeme pojem polynómu a operácie sčitovania a násobenia medzi nimi. Následne definujeme okruh polynómov.

2.3 Noetherovské okruhy

V komutatívnej algebre a zvlášť v algebraickej geometrii majú významnú pozíciu noetherovské okruhy. Dokážeme Hilbertovu vetu o báze, ktorá hovorí: okruh R je noetherovský, potom okruh polynómov $R[x]$ je tež noetherovský.

V ďalšej časti práce budeme prevažne pracovať s okruhmi polynómov. Vyslovíme a dokážeme vety o vyjadrení ideálu ako prienik konečného počtu primárnych ideálov a následne definujeme primárny rozklad ideálu.

2.4 Lokálne okruhy

Pojem lokálneho noetherovského okruhu patrí medzi základné pojmy lokálnej algebry a teda medzi základné nástroje skúmania vlastností algebraických variet v okolí bodu. V tejto časti je popísaný proces lokalizácie komutatívneho okruhu R prvoideálom $\mathfrak{p}$. Z hľadiska geometrie je táto konštrukcia významná tým, že ňou získaný lokálny okruh popisuje vlastnosti bodu algebraickej variety.

Princíp konštrukcie lokálneho okruhu presne kopíruje konštrukciu podielového poľa oblasti integrity. Každú oblasť integrity môžeme prirodzeným spôsobom rozšíriť na podielové pole, ktoré preň hrá rovnakú úlohu, akú má pole všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$ pre oblasť integrity všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$.

2.5 Graduované okruhy

Táto časť práce sa zaoberá ďalším typom okruhu. Uvedieme jeho základnú štrukrúru a vlastnosti. Definujeme asociovaný graduovaný okruh okruhu R vzhľadom k ideálu $\mathfrak{a}$. Zavedieme pojem iniciálnej formy prvku vzhľadom na ideál a stupeň iniciálnej formy.

2.6 Moduly a exaktné postupnosti

Noetherovské okruhy sú charakterizované podmienkou konečnosti rastúceho reťazca ideálov. Nemenej zaujímavá je trieda okruhov, ktorá spĺňa podmienku konečnosti klesajúceho reťazca ideálov. Tieto okruhy sa nazývajú artinovské okruhy. V istom zmysle artinovské okruhy sú najjednoduchšími druhmi okruhov po poliach. Definujeme zovšeobecnený pojem vektorového priestoru teda pojem modulu.

Vlastnosť noetherovskosti a artinovskosti modulu je charakterizovaná – podobne ako u okruhov – podmienkou konečnosti rastúceho resp. klesajúceho reťazca podmodulov.

Zavedieme pojem kompozičného radu modulu, dĺžku modulu a vyslovíme vetu, za akých podmienok je dĺžka modulu konečná. Je zrejmé, že modul má konečnú dĺžku práve vtedy, keď spĺňa obidve podmienky konečnosti reťazca podmodulov.

Keďže konečná dĺžka okruhu, ako modulu nad sebou hrá vážnu úlohu v geometrii algebraických variet, je aktuálna otázka, kedy je okruh R – ako R-modul – modulom konečnej dĺžky. Je to práve vtedy, keď spĺňa obidve podmienky konečnosti reťazcov ideálov v R, teda keď je noetherovský a artinovský. Teda trieda artinovských okruhov je totožná s triedou nularozmerných noetherovských okruhov.

Ďalej definujeme pojem komplexu, exaktnej postupnosti a popíšeme ich vlastnosti.

2.7 Algebraické variety

Afinným n-rozmerným priestorom nad poľom k rozumieme množinu

$$\{(a_1, \ldots, a_n)) \mid a_i \in k,\ \forall i = 1, \ldots, n\},$$

ktorú budeme označovať ako $\mathbb{A}^n(k)$. Prvky afinného priestoru budeme označovať ako $A = (a_1, \ldots, a_n)$, kde A sa nazýva bod afinného priestoru a usporiadaná n-tica $(a_1, \ldots, a_n)$ sa nazýva afinné súradnice bodu A.

Základná veta algebry hovorí, že počet koreňov polynómu stupňa n v jednej neurčitej nad algebraicky uzavretým poľom je práve n, za predpokladu, že každý koreň počítame aj s jeho násobnosťou. Geometrická interpretácia tejto vety hovorí, že hľadáme všetky priesečníky krivky, definovanú polynómom so súradnicovou osou. Zovšeobecnením tejto úvahy sa dopracujeme k otázke, ako vyriešiť systém polynomických rovníc. Aby sme mohli na túto otázku odpovedať, zavedieme pojem algebraickej variety.

Nech $f_1, \ldots, f_r$ sú polynómy v $k[x_1, \ldots, x_n]$, kde k je pole. Definujme množinu

$$V(f_1, \ldots, f_r) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k) \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, r\},$$

ktorá sa nazýva afinná algebraická varieta definovaná polynómami $f_1, \ldots, f_r$. Inými slovami afinná algebraická varieta $V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ je teda množina všetkých spoločných riešení systému algebraických rovníc

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Na množine algebraických variet môžeme definovať operácie prieniku a zjednotenia, čím dostávame nové algebraické variety. Následne vyslovíme vetu o rovnosti dvoch algebraických variet.

Hilbertova veta o báze hovorí, že každý ideál $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ je konečne generovaný. Existujú teda polynómy $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ také, že $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$. Definujme množinu

$$V(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k) \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

Táto množina sa nazýva množina nulových bodov ideálu $\mathfrak{a}$.

Uvedieme vetu, ktorá nám umožňuje hlbšie pochopiť štruktúru algebraických variet. Definujeme pojem ideálu asociovaného s algebraickou varietou a uvedieme vetu, ktorá hovorí o štruktúre asociovaného ideálu. Vyslovíme Hilbertovu slabú a silnú vetu o koreňoch. Z týchto viet vyplýva, že pri štúdiu algebraických variet nás nemusia zaujímať iné, než radikálové ideály. Zobrazenie $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ je bijektívne zobrazenie medzi množinami všetkých algebraických variet v $\mathbb{A}^n(k)$ a všetkých radikálových ideálov v $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Dokážeme, že každá algebraická varieta sa dá vyjadriť ako zjednotenie konečného počtu ireducibilných variet a jednoznačnosť tohoto rozklad (až na poradie).

Nech k je pole a n je prirodzené číslo. Definujme reláciu $\sim$ na množine všetkých nenulových usporiadaných $(n+1)$-tíc z k^{n+1} nasledovne:

$$(a'_0, \ldots, a'_n) \sim (a_0, \ldots, a_n) \Leftrightarrow (a'_0, \ldots, a'_n) = \lambda(a_0, \ldots, a_n),$$

pre nejaké $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$. Zrejme relácia $\sim$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna, teda je reláciou ekvivalencie. Potom množinu všetkých tried ekvivalencií

$$\big(k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}\big) / \sim$$

nazývame projektívny n-rozmerný priestor nad poľom k a budeme ho označovať $\mathbb{P}^n(k)$. Usporiadanú nenulovú $(n+1)$-ticu budeme označovať $A = (a_0, \ldots, a_n)$, kde A sa nazýva bod v $\mathbb{P}^n(k)$ a usporiadaná nenulová $n{+}1$-tica $(a_0, \ldots, a_n)$ sa nazýva homogénne súradnice bodu A. Je zrejmé, že každý bod môže mať viac homogénnych súradníc, ktoré ale patria do tej istej triedy. Každý reprezentant tej istej triedy potom definuje ten istý bod.

Na základe definície afinnej algebraickej variety môžeme zaviesť pojem projektívnej algebraickej variety, ktorá je definovaná homogénnymi polynómami (formami) $F_1, \ldots, F_r$ z okruhu polynómov $k[x_0, \ldots, x_n]$. Teda množina

$$V(F_1, \ldots, F_r) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid F_i(a_0, \ldots, a_n) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, r\}$$

sa nazýva projektívna algebraická varieta definovaná formami $F_1, \ldots, F_r$.

Hovoríme, že ideál $\mathfrak{a}$ v okruhu $k[x_0, \ldots, x_n]$ je homogénny, ak existuje jeho báza zložená z foriem (t. j. homogénnych polynómov).

Ak $\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_s)$, kde $F_1, \ldots, F_s$ sú formy, potom množina nulových bodov ideálu $\mathfrak{a}$ je algebraická projektívna varieta definovaná formami $F_1, \ldots, F_s$, t. j. $V(\mathfrak{a}) = V(F_1, \ldots, F_s)$.

3 Násobnosť

3.1 Samuelova násobnosť

Uvažujme teraz lokálny noetherovský okruh $(R, \mathfrak{m})$ s $\dim(R) = d$. Nech $\mathfrak{q}$ je $\mathfrak{m}$-primárny ideál v R. Potom ideál $\mathfrak{q}$ je nularozmerný, teda faktorový okruh $R/\mathfrak{q}$ je nularozmerný noetherovský okruh. Také okruhy sú charakterizované konečnou dĺžkou maximálnych reťazcov $\mathfrak{m}$-primárnych ideálov a rovnosťou počtu ich členov. Nech

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_s = \mathfrak{m}$$

je maximálny reťazec $\mathfrak{m}$-primárnych ideálov so začiatkom v $\mathfrak{q}$ a koncom v $\mathfrak{m}$. Všetky takéto reťazce majú tú istú dĺžku. Počet členov takéhoto maximálneho reťazca ideálov v R nazývame dĺžkou ideálu $\mathfrak{q}$, resp. faktorového okruhu $R/\mathfrak{q}$ a označujeme ako

$$\ell_R(\mathfrak{q}) = \ell_R(R/\mathfrak{q}) = s.$$

Zrejme, pre každé $n \in \mathbb{N}$ ideál $\mathfrak{q}^n$ je tiež $\mathfrak{m}$-primárny. Potom pre $n \gg 0$ je dĺžka modulu $\ell_R(R/\mathfrak{q}^n)$ polynomická funkcia, ktorú môžeme reprezentovať polynómom v neurčitej n stupňa $d = \dim(R)$ v tvare

$$\ell_R(R/\mathfrak{q}^n) = \sum_{i=0}^{d} e_i(\mathfrak{q}; R) \binom{n+d-i}{d-i},$$

alebo

$$\ell_R(R/\mathfrak{q}^n) = e_0(\mathfrak{q}; R)\frac{n^d}{d!} + \text{členy nižších stupňov.}$$

Koeficient $e_0(\mathfrak{q}; R)$ môžeme vyjadriť tiež ako

$$e_0(\mathfrak{q}; R) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d}\ell_R(R/\mathfrak{q}^n).$$

Celočíselné koeficienty $e_i(\mathfrak{q}; R)$ sa nazývajú Hilbert-Samuelove koeficienty $\mathfrak{m}$-primárneho ideálu $\mathfrak{q}$. Prvý koeficient $e_0(\mathfrak{q}; R)$ je kladný a sa nazýva Samuelova násobnosť ideálu $\mathfrak{q}$.

Niektoré štandardné formuly pre výpočet Samuelovej lokálnej priesekovej násobnosti uvádza Veta 3.1.6.

3.2 Hilbertova funkcia

V tejto časti si zadefinujeme Hilbertovu funkciu homogénneho ideálu v okruhu polynómov a popíšeme niektoré jej vlastnosti a vzťahy. Nech $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ je okruh polynómov v $n+1$ neurčitých nad algebraicky uzavretým polom k. Označme množinu všetkých homogénnych polynómov F stupňa t ako $V(n+1, t)$. Teda

$$V(n+1,t) = \{F \mid F \in R,\ \deg(F) = t\}.$$

Takto definovaná množina tvorí vektorový priestor nad poľom k a bázu tohoto priestoru tvoria všetky monómy $\{x_0^t, x_0^{t-1}x_1, \ldots, x_n^t\}$ stupňa t. Rozmer takého vektorového priestoru je $\dim_k V(n+1,t) = \binom{n+t}{t}$ pre všetky $n \geq 0$, $t \geq 0$.

Nech $\mathfrak{a} \subseteq R$ je homogénny ideál. Označme $V(\mathfrak{a}, t)$ vektorový priestor nad k pre ktorý paltí: $V(\mathfrak{a}, t) = V(n+1, t) \cap \mathfrak{a}$. Numerická funkcia $H(\mathfrak{a}, t)\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definovaná ako

$$H(\mathfrak{a}, t) = \binom{n+t}{t} - \dim_k V(\mathfrak{a}, t)$$

sa nazýva Hilbertova funkcia ideálu $\mathfrak{a}$. Uvedieme niektoré jej vlastnosti. Vypočítame Hilbertovu funkciu hlavného ideálu (F).

$$H\big((F), t\big) = \begin{cases} \binom{n+t}{n} - \binom{n+t-r}{n}, & \text{pre } t > r-n, \\ \binom{n+t}{n}, & \text{pre } 0 \leq t \leq r-n. \end{cases}$$

Nech $\mathfrak{a}$ je d-rozmerný homogénny ideál v $R = k[x_0, \dots, x_n]$. Potom pre dostatočne veľké $t \gg 0$ je Hilbertova funkcia $H(\mathfrak{a}, t)$ ideálu $\mathfrak{a}$ polynóm $HP(\mathfrak{a}, t)$ v neurčitej t, stupňa d s koeficientami v $\mathbb{Z}$ tvaru

$$HP(\mathfrak{a}, t) = h_0(\mathfrak{a})\binom{t}{d} + h_1(\mathfrak{a})\binom{t}{d-1} + \cdots + h_{d-1}(\mathfrak{a})\binom{t}{1} + h_d(\mathfrak{a})\binom{t}{0},$$

kde $h_0(\mathfrak{a}) \in \mathbb{N}$ a $h_i(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$ pre všetky $i = 1, \dots, d$. Polynóm $HP(\mathfrak{a}, t)$ sa nazýva Hilbertov polynóm ideálu $\mathfrak{a}$. Koeficienty $h_0(\mathfrak{a}), \dots, h_d(\mathfrak{a})$ sa nazývajú Hilbertove koeficienty. Prirodzené číslo $h_0(\mathfrak{a})$ sa nazýva stupeň ideálu $\mathfrak{a}$.

Vypočítame stupeň homogénneho hlavného ideálu (F) s $\deg(F) = r$. Hilbertov polynóm $HP\big((F), t\big)$ pre dostatočne veľké t je

$$HP\big((F), t\big) = \frac{r}{(n-1)!} t^{n-1} + \cdots .$$

Záverečná formula, pre výpočet stupňa homogénneho ideálu v R je nasledovná:

Veta 3.2.4. *Nech $\mathfrak{a} \subseteq R$ je d-rozmerný homogénny ideál v $R = k[x_0, \dots, x_n]$. Nech $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}_i$ je neskrátiteľný primárny rozklad ideálu $\mathfrak{a}$ s $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Rad}(\mathfrak{q}_i)$. Označme $U(\mathfrak{a})$ prienik všetkých d-rozmerných primárnych ideálov, ktoré vystupujú v primárnom rozklade ideálu $\mathfrak{a}$. Nech dĺžka ${}^d\mathfrak{p}_i$-primárneho ideálu ${}^d\mathfrak{q}_i$ je $\ell_R({}^d\mathfrak{q}_i)$. Potom*

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0\big(U(\mathfrak{a})\big) = \sum_{i=1}^{n} \ell_R({}^d\mathfrak{q}_i) h_0({}^d\mathfrak{p}_i).$$

4 Bézoutova veta

4.1 Klasická Bézoutova veta

Klasická Bézoutova veta hovorí o počte spoločných bodov dvoch algebraických kriviek X a Y v projektívnej rovine nad algebraicky uzavretým poľom nasledovné: Ak X a Y nemajú spoločnú súčasť (teda ak počet spoločných bodov je konečný), tak tento počet je rovný súčinu stupňov definujúcich polynómov, pričom každý bod sa počíta s príslušnou násobnosťou. Uvedieme dôkaz klasickej a zovšeobecnenej Bézoutovej vety.

Veta 4.1.1 (Klasická Bézoutova veta)**.** *Nech $F_1, \dots, F_r$ sú homogénne polynómy z okruhu $R = k[x_0, \dots, x_n]$ (k algebraicky uzavreté pole) s* $\text{h-dim}\big((F_1, \dots, F_r)\big) = 0$*, teda* $(F_1, \dots, F_r) = {}^0\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap {}^0\mathfrak{q}_s$*, kde ${}^0\mathfrak{q}_i$ sú nularozmerné primárne ideály v $k[x_0, \dots, x_n]$ definujúce body $C_i \in \mathbb{P}^n(k)$. Existuje dobre definovaná násobnosť $\mu(C_i, X \cap Y)$ bodov C_i taká, že*

$$\prod_{i=1}^{r} \deg(F_i) = \sum_{i=1}^{s} \mu(C_i, X \cap Y).$$

Veta 4.1.2 (Zovšeobecnená Bézoutova veta)**.** *Nech $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sú homogénne ideály v okruhu polynómov $R = k[x_0, \dots, x_n]$ (k algebraicky uzavreté pole) s*

$$\begin{aligned} \text{h-dim}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) &= \text{h-dim}(\mathfrak{a}) + \text{h-dim}(\mathfrak{b}) - n =: d, \quad \textit{teda} \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) &= {}^d\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap {}^d\mathfrak{q}_s \cap \ \textit{vnorené komponenty}, \quad \textit{a} \\ V\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\big) &= V({}^d\mathfrak{q}_1) \cup \dots \cup V({}^d\mathfrak{q}_s) \end{aligned}$$

je ireducibilný rozklad variety $V\big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\big)$. Existuje dobre definovaná násobnosť ozn. $\mu\big(V({}^d\mathfrak{q}_i)\big)$ ireducibilnej variety $V({}^d\mathfrak{q}_i)$ pre všetky $i = 1, \dots, s$ taká, že

$$\deg\big(V(\mathfrak{a})\big) \deg\big(V(\mathfrak{b})\big) = \sum_{i=1}^{s} \mu\big(V({}^d\mathfrak{q}_i)\big) h_0({}^d\mathfrak{p}_i).$$

4.2 Lokálna Bézoutova veta

Klasická Bézoutova veta hovorí o počte spoločných bodov dvoch algebraických kriviek (ktoré sa pretínajú v konečnom počte bodov) v projektívnej rovine nad algebraicky uzavretým poľom. Tento počet sa rovná súčinu stupňov definujúcich polynómov kriviek za predpokladu, že každý bod počítame toľkokrát, koľko je jeho násobnosť. Nehovorí však o vzťahu tejto násobnosti k násobnosti bodu na jednotlivých varietách. To je predmetom tzv. lokálnej Bézoutovej vety. Keďže násobnosť bodu na variete je lokálna vlastnosť, stačí sa obmedziť na afinné algebraické variety. V dvojrozmernej verzii je problém formulovaný nasledovne.

Nech X a Y sú algebraické krivky v $\mathbb{A}^2(k)$ majúce len konečný počet spoločných bodov $\{C_1, \dots, C_s\}$. Bézoutova veta hovorí, že existuje násobnosť $\mu(C_i, X \cap Y)$ pre všetky $i = 1, \dots, s$ taká, že v projektívnom uzávere $\overline{\mathbb{A}^2(k)}$ je súčin stupňov uvažovaných kriviek rovný počtu spoločných bodov, opatrených touto násobnosťou.

Otázka: Aký je vzťah násobnosti $\mu(C_i, X \cap Y)$ k násobnostiam $\mu(C_i, X)$ a $\mu(C_i, Y)$? Dá sa ona vypočítať zo zvyšných dvoch?

Ako sme uviedli, klasická dvojrozmerná Bézoutova veta nehovorí o násobnosti priesečníka dvoch algebraických kriviek vo vzťahu k jeho násobnosti na jednotlivých krivkách a dotykovej situácie v ňom. Lokálnu formuláciu tejto vety prvýkrát publikoval Bohumil Bydžovský vo svojej monografii *Úvod do algebraické geometrie*, ktorá hovorí o násobnosti bodu v prieniku dvoch rovinných kriviek v súvislosti s jeho násobnosťou na jednotlivých krivkách. Počas skúmania vlastností rezultanta dokázal, že priesečník, ktorý je na jednej krivke c-násobný, na druhej krivke d-násobný a v ktorom majú krivky spoločných t dotyčníc, je aspoň $(cd+t)$-násobným priesečníkom. To znamená, že existuje nezáporné celé číslo ϱ také, že násobnosť priesečníka je práve $cd+t+\varrho$.

Označme $\operatorname{corr}(f,g) = t+\varrho$, kde f a g sú definujúce polynómy daných kriviek. Autori práce [5] odvodili vzorec na výpočet tohoto korekčného člena metódami homologickej algebry. Dokázali nasledujúcu všeobecnejšiu vetu:

Veta 4.2.1. *Nech* $(A,\mathfrak{m})$ *je lokálny noetherovský okruh s* $\dim(A)=2$. *Nech* f, g *tvoria systém parametrov v* A *a* $\mathfrak{q}$ *je* $\mathfrak{m}$*-primárny ideál s* $(f,g)\subseteq\mathfrak{q}$. *Nech sú* c, $d\in\mathbb{N}$ *také, že* $f\in\mathfrak{q}^c\setminus\mathfrak{q}^{c+1}$, $g\in\mathfrak{q}^d\setminus\mathfrak{q}^{d+1}$ *a* $f^\star=\operatorname{in}(f):=f+\mathfrak{q}^{c+1}/\mathfrak{q}^{c+1}$, $g^\star=\operatorname{in}(g):=g+\mathfrak{q}^{d+1}/\mathfrak{q}^{d+1}$. *Predpokladajme, že* $f^\star$ *je* $\mathrm{Gr}_A(\mathfrak{q})$*-regulárny prvok. Potom pre všetky* $n\gg 0$ *platí:*

a) $\ell_A\Big(\big((fA,\mathfrak{q}^n):_A g\big)/(fA,\mathfrak{q}^{n-d})\Big)$ *je konštanta,*

b) $\ell_A\big(A/(f,g)\big) = cde_0(\mathfrak{q};A)+\ell_A\Big(\big((fA,\mathfrak{q}^n):_A g\big)/(fA,\mathfrak{q}^{n-d})\Big)$.

Ako dôsledok tejto vety dostávame formuláciu lokálnej Bézoutovej vety v rovine.

Dôsledok 4.2.2. *Nech* $k[x,y]$ *je okruh polynómov a* $A:=k[x,y]_{(x,y)}$ *jeho lokalizácia. Nech* f, g *tvoria systém parametrov v* A, $\mathfrak{m}=(x,y)A$. *Nech* $f\in\mathfrak{m}^c\setminus\mathfrak{m}^{c+1}$, $g\in\mathfrak{m}^d\setminus\mathfrak{m}^{d+1}$. *Potom pre* $n\gg 0$ *platí:*

$$e_0\big((f,g);A\big) = cd+\ell_A\Big(\big((fA,\mathfrak{m}^n):_A g\big)/(fA,\mathfrak{m}^{n-d})\Big).$$

Geometrická interpretácia je nasledovná. Ak $X=V(f)$ a $Y=V(g)$ sú krivky v $\mathbb{A}^2(k)$, $0\in X\cap Y$, potom zrejme

$$\mu(0,X\cap Y)=e_0\big((f,g);A\big),\quad \mu(0,X)=c \quad \text{a} \quad \mu(0,Y)=d,$$

teda

$$\mu(0,X\cap Y)=\mu(0,X)\mu(0,Y)+\ell_A\Big(\big((fA,\mathfrak{m}^n):_A g\big)/(fA,\mathfrak{m}^{n-d})\Big).$$

Násobnosť bodu v prieniku je rovná súčinu jeho násobností na jednotlivých krivkách plus korekcia.

Výsledky dizertácie

Nasledujúce tri vety sú výsledkami dizertačnej práce.

Veta 4.2.3. *Nech* $k[x,y]$ *je okruh polynómov nad poľom* k *a* $A:=k[x,y]_{(x,y)}$ *je jeho lokalizácia maximálnym ideálom* $(x,y)k[x,y]$. *Nech* f, g *tvoria systém parametrov v* A, $\mathfrak{m}=(x,y)A$. *Ak* $f\in\mathfrak{m}^c\setminus\mathfrak{m}^{c+1}$ *a* $g\in\mathfrak{m}^d\setminus\mathfrak{m}^{d+1}$, *potom pre všetky* $n\gg 0$ *platí:*

a) $\ell_A\big(\mathfrak{m}^n/(f\mathfrak{m}^{n-c},g\mathfrak{m}^{n-d})\big)$ *je konštanta,*

b) $e_0\big((f,g);A\big)=cd+\ell_A\big(\mathfrak{m}^n/(f\mathfrak{m}^{n-c},g\mathfrak{m}^{n-d})\big)$.

Veta 4.2.4. *Nech* $A = k[x,y,z]_{(x,y,z)}$ *je lokálny noetherovský okruh s maximálnym ideálom* $\mathfrak{m} = (x,y,z)A$, (a_1,a_2,a_3) *je parametrický ideál v* A *s* $a_i \in \mathfrak{m}^{c_i} \setminus \mathfrak{m}^{c_i+1}$ *pre všetky* $i = 1,2,3$. *Nech* $a_2^\star$, $a_3^\star$ *tvoria regulárnu postupnosť v okruhu* $k[x,y,z]$. *Potom pre* $n \gg 0$ *platí:*

a) $\ell_A\Big(\big((a_2,a_3),\mathfrak{m}^n\big) :_A a_1/\big((a_2,a_3),\mathfrak{m}^{n-c_1}\big)\Big)$ *je konštanta,*

b) $\ell_A\big(A/(a_1,a_2,a_3)\big) = c_1c_2c_3 + \ell_A\Big(\big((a_2,a_3),\mathfrak{m}^n\big) :_A a_1/\big((a_2,a_3),\mathfrak{m}^{n-c_1}\big)\Big)$.

Veta 4.2.5. *Nech* $A = k[x,y,z]_{(x,y,z)}$ *je lokálny noetherovský okruh s maximálnym ideálom* $\mathfrak{m} = (x,y,z)$ *a* $\dim(A) = 3$. *Nech* $(a_1,a_2,a_3) \subseteq \mathfrak{m}$ *a* $a_i \in \mathfrak{m}^{c_i} \setminus \mathfrak{m}^{c_i+1}$ *pre všetky* $i = 1,2,3$. *Nech* $a_2^\star$, $a_3^\star$ *tvoria regulárnu postupnosť v okruhu* $k[x,y,z]$. *Potom pre* $n \gg 0$ *platí:*

$$\ell_A\big(A/(a_1,a_2,a_3)\big) = c_1c_2c_3 + \ell_A\big(\mathfrak{m}^n/(a_1\mathfrak{m}^{n-c_1}, a_2\mathfrak{m}^{n-c_2}, a_3\mathfrak{m}^{n-c_3})\big).$$

Summary

This thesis deals with the local Bézout's theorem – a well known theorem belonging to the theory of algebraic varieties and their intersection multiplicities. Its classical version states that the number of common points of two algebraic curves in the projective plane over algebraically closed field, if counted with multiplicities, is equal to the product of degrees of considered curves. The local Bézout's theorem adresses the relation of the above mentioned intersection multiplicity of a point with the multiplicity of this point on each of the curves. It is known that the intersection multiplicity is greater or equal than the product of the multiplicities of the point on each of the curves. A correcting term, which ensures equality between these multiplicities, has already been given by others.

In this thesis, a new formula for this correction term is deduced, using methods of homological algebra. It is expressed as the length of a module defined by the homogeneous polynomials of considered curves. A three-dimensional version of the local Bézout's theorem is derived and two different formulas are given. Both describe differences between the local intersection multiplicity of a common point of three intersecting surfaces and the product of multiplicities of the point on each of the three surfaces.

Literatúra

[1] ATIYAH, M. F. – MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* London : Addison-Wesley, 1969.

[2] BOĎA, E. – FARNBAUER, R. On Standard Basis and Multiplicity of $(X^a - Y^b, X^c - Y^d)$. *Acta Math. Univ. Comenianae.* 2003, vol. LXXII, no. 1, p. 15–22.

[3] BOĎA, E. – ORSZÁGHOVÁ, D. On the Multiplicity of $(X^a - Y^b, X^c - Y^d)$. *Acta Math. Univ. Comenianae.* 1998, vol. LXVII, no. 2, p. 273–276.

[4] BOĎA, E. – SCHENZEL, P. A Note on the Computation of Multiplicities. In *Beiträge zur Algebra und Geometrie.* 2004, vol. 45, no. 1, p. 183–190.

[5] BOĎA, E. – SCHENZEL, P. On multiplicities of primary and parameter ideals with a geometric application. *(v tlači)*

[6] BOĎA, E. – VOGEL, W. On system of parameters, local intersection multiplicity and Bezout's theorem. In. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1980, vol. 78, no. 1, p. 1–7.

[7] BRIESKORN, E. – KNÖRRER, H. *Plane Algebraic Curves.* Basel : Birkhäuser, 1986. ISBN 3-7643-1769-8.

[8] BUREŠ, J. – VANŽURA, J. *Algebraická geometrie.* Praha : SNTL, 1989.

[9] BYDŽOVSKÝ, B. *Úvod do algebraické geometrie.* Praha : JČMF, 1948.

[10] COX, D. A. – LITTLE, J. – O'SHEA, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* 3rd ed. New York : Springer, 2007. ISBN 978-0-387-35650-1.

[11] COX, D. A. – LITTLE, J. – O'SHEA, D. *Using Algebraic Geometry.* 2nd. ed. New York : Springer, 1998. ISBN 0-387-20733-3.

[12] DECKER, W. – LOSSEN CH. *Computing in Algebraic Geometry.* Berlin : Springer, 2006. ISBN 3-540-28992-5.

[13] EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* New York : Springer, 1995. ISBN 978-0-387-94269-8.

[14] FISCHER, G. *Plane Algebraic Curves.* Providence : American Mathematical Society, 2001. ISBN 0-8218-2122-9.

[15] FULTON, W. *Algebraic curves : An Introduction to Algebraic Geometry.* [online]. [s.l.] : [s.n.], 2008. [cit. 20.03.2014]. Dostupné na internete: `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/`.

[16] GREUEL, G. M. – PFISTER, G. *A Singular Introduction to Commutative Algebra.* 2nd. ed. New York : Springer, 2008. ISBN 978-3-540-73541-0.

[17] KATRIŇÁK, T. a kol. *Algebra a teoretická aritmetika.* Bratislava : Vydavateľstvo UK, 1985. ISBN 80-223-1674-1.

[18] KUNZ, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Boston : Birkhäuser, 1985. ISBN 978-0-8176-3065-2.

[19] KUNZ, E. *Introduction to Plane Algebraic Curves.* Boston : Birkhäuser, 2005. ISBN-10 0-8176-4381-8.

[20] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory.* Cambridge : Cambridge University Press, 1986.

[21] NORTHCOTT, D. G. *Lessons on Rings Modules and Multiplicities.* New York : Cambridge University Press, 1968. ISBN 978-0-521-09807-6.

[22] OSBORNE, M. S. *Basic Homological Algebra.* New York : Springer, 2000. ISBN 0-387-98934-X.

[23] PERRIN, D. *Algebraic Geometry : An Introduction.* London : Springer, 2008. ISBN 978-1-84800-055-1.

[24] RENSCHUCH, B. *Elementare und praktische Idealtheorie.* Berlin : Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976.

[25] SERRE, J. P. *Local Algebra.* Berlin : Springer, 2000. ISBN 978-3-540-66641-7.

[26] VOGEL, W. *Lectures on Results on Bezout's Theorem.* Bombay : Tata Institute of Fundamental Research, 1984.

[27] ZARISKI, O. – SAMUEL, P. *Commutative Algebra. Vol. I.* Princeton : Van Nostrand, 1958. ISBN 0-387-90089-6.

[28] ZARISKI, O. – SAMUEL, P. *Commutative Algebra. Vol. II.* Princeton : Van Nostrand, 1960. ISBN 0-387-90171-X.

Zoznam publikovaných prác

[1] BOĎA, Eduard – MAŤAŠOVSKÝ, Alexander. On Local Intersection Multiplicity and Bézout's Theorem. In *Slovak Journal for Geometry and Graphics.* Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2013, vol. 10, no. 19. ISSN 1336-524X, p. 13-22.

[2] MAŤAŠOVSKÝ, Alexander. Korekčný člen lokálnej Bézoutovej vety. In *Katedra geometrie 50. rokov založenia.* Bratislava : Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012. ISBN 978-80-8147-000-4, s. 52.

[3] MAŤAŠOVSKÝ, Alexander. O niektorých metódach výpočtu lokálnej priesekovej násobnosti algebraických variet. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'2011.* Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2011, vol. 20. ISBN 978-80-227-3580-3, p. 94-99.

[4] MAŤAŠOVSKÝ, Alexander. Lokálna Bézoutova veta. In *Geometria a jej aplikácie 2010 : Algebrická geometria, zborník abstraktov.* Bratislava : Nakladateľstvo STU, 2010. ISBN 978-80-227-3258-1. Uverejnené na stránke <http://www.math.sk/gaja/> od februára 2010 do decembra 2020.