Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

RNDr. Robert Lukoťka

Autoreferát dizertačnej práce

# Real-valued flows and circular colourings of cubic graphs

(Reálne toky a cirkulárne farbenia na kubických grafoch)

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.2.1. informatika

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

| | |
|---|---|
| Predkladateľ: | RNDr. Robert Lukoťka<br>Katedra informatiky<br>Fakulta matematiky, fyziky a informatiky<br>Univerzity Komenského<br>Mlynská dolina<br>842 48 Bratislava |
| Školiteľ: | Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.<br>Katedra informatiky FMFI UK<br>Bratislava |
| Oponenti: | ..............................................<br>..............................................<br>..............................................<br>..............................................<br>.............................................. |


Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa ................ o ...........
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ................

v študijnom odbore 9.2.1. informatika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, ..................

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

# 1 Úvod

Štúdium tokov na grafoch je dôležitou súčasťou teórie grafov s mnohými teoretickými aj praktickými aplikáciami. *$k$-tok* na grafe $G$ je orientácia grafu $G$ a priradenie nezáporných celých čísel, tokových hodnôt, menších ako $k$ ku hranám grafu $G$ tak, aby sa súčet tokových hodnôt na vchádzajúcich hranách rovnal súčtu tokových hodnôt na vychádzajúcich hranách. Tok na grafe $G$ sa navyše nazýva *nikde-nulový* ak toková hodnota na žiadnej hranie nie je 0. Tokové číslo grafu $G$, označované ako $\Phi(G)$, je najmenšie $k$ také, že graf $G$ má nikde-nulový $k$-tok. Toky možno analogicky zadefinovať na ľubovolnej komutatívnej grupe. Navyše platí [26], že graf $G$ má nikde-nulový $A$-tok, kde $|A| = k$, práve vtedy, keď má aj nikde-nulový $k$-tok.

Systematické štúdium nikde-nulových tokov začal Tutte v [25] a [26], kde nikde-nulové toky boli skúmané ako duálny pojem k pojmu vrcholového farbenia. Okrem iného Tutte predložil nasledujúcu hypotézu:

- *Hypotéza o* 5*-toku:* Každý graf bez mosta má nikde nulový 5-tok.

Evidentne, graf s mostom nemôže mať nikde-nulový tok. Na druhej strane sa ponúka otázka, či existuje hranica $n$ taká, že každý bezmostový graf $G$ má nikde-nulový $n$-tok. Hypotéza o 5-toku hovorí, že číslo 5 je touto hranicou. Existenciu takejto hranice dokázali nezávisle Kilpatrick [14] a Jaeger [11], ktorí ukázali, že táto hranica je 8. Neskôr ich výsledok zlepšil Seymour [22] na 6.

Hypotéza o 5-toku zatiaľ odoláva všetkým pokusom o vyriešenie. Táto hypotéza podnietila množstvo výskumu. Jedným z konceptov, ktoré sa pri tomto výskume objavili je koncept reálnych nikde-nulových tokov. Základy teórie reálnych nikde-nulových tokov položili Goddyn, Tarsi a Zhang v [8], kde zaviedli pojem *frakčného* toku ako duálnemu pojmu ku *$(k, d)$-farbeniam.* Pomocou duality odvodili základné vlastnosti týchto farbení. Časom sa prišlo na to, že tieto pojmy možno zaviesť omnoho prirodzenejším spôsobom. Reálny nikde-nulový $r$-tok je $\mathbb{R}$-tok, ktorého tokové hodnoty navyše patria do intervalu $\langle 1, r-1\rangle$. Reálne tokové číslo grafu $G$, označované ako $\Phi_{\mathbb{R}}(G)$, je infímum z množiny všetkých reálnych čísel $r \geq 2$ takých, že $G$ má nikde-nulový $r$-tok. Infímum z definície sa pre konečné grafy vždy dosahuje, navyše je racionálne [8]. Zároveň je zjemnením bežného tokového čísla – platí $\Phi(G) = \lceil \Phi_{\mathbb{R}}(G) \rceil$.

Reálnemu tokovému číslu od jeho zavedenia Goddynom a kol. bolo venované dosť veľa pozronosti. Mimoriadne zaujímavé je štúdium reálneho tokového čísla snarkov. *Snark* je "netriviálny" kubický graf, ktorého hrany nie sú zafarbiteľné tromi farbami. Záujem o tieto grafy rástol, keď sa postupne ukazovalo, že práve táto trieda grafov by v sebe musela obsahovať najmenšie protipríklady na mnohé významné hypotézy o grafoch. Napriek jednoduchej definícii týchto grafov a napriek rokom ich výskumu o týchto grafoch nie je známe mnoho.

'Netriviálnosť' snarku sa obyčajne definuje nasledovne. Snark je cyklicky 4-hranovo-súvislý kubický graf s obvodom aspoň 5 a s chromatickým indexom 4. Pripomíname, že graf sa nazýva *cyklicky $k$-hranovo-súvislý*, ak zmazanie menej ako $k$ hrán nerozdelí graf na dva komponenty, ktoré obe obsahujú kružnicu, Tieto obmedzenia boli zavedené aby sa zabránilo prípadom, kedy by bolo triviálne a nezaujímavé skonštruovať snark. Napríklad kubický graf s mostom nie je nikdy 3-hranovo-zafarbiteľný. Ekvivalencia nikde-nulového $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$-toku s hranovými 3-zafarbeniami kubických grafov ukazuje, že reálne tokové číslo snarku je viac ako 4. Ak platí Tutteho hypotéza, tak zároveň reálne tokové číslo snarku je nanajvýš 5.

Ekvivalencia nikde-nulových 4-tokov a hranových 3-farbení kubických grafov podnecuje otázky o ich prípadnom súvise týchto invariantov na triede snarkov. Predmetom nášho záujmu bude preto čiastočne aj reálna verzia hranových farbení – cirkulárny chromatický index. *Circulárne hranové r-farbenie* grafu $G$ je zobrazenie $c : E(G) \to [0, r)$ také, že $1 \leq |c(e) - c(f)| \leq r - 1$ pre ľubovolné susedné hrany $e$ a $f$ grafu $G$. *Circulárny chromatický index* grafu $G$, označovaný ako $\chi'_c(G)$, je infímum spomedzi všetkých hodnôt $r \geq 1$ takých, že $G$ má circulárne hranové $r$-zafarbenie. Základné vlastnosti cirkulárneho chromatického indexu sú podobné ako základné vlastnosti reálneho tokového čísla – infímum sa dosahuje, je racionálne a navyše chromatický index je horná celá časť cirkulárneho chromatického indexu.

# 2 Hlavné výsledky práce

## 2.1 Základné vlastnosti reálneho tokového čísla

Základné vlastnosti reálneho tokového čísla boli získané pomocou tokovo-farbiacej duality. Tieto vlastnosti dokážeme priamo, konštruktívne, bez použitia tokovo-farbiacej duality na matroidoch. Zároveň v dôkazoch eliminujeme analytické argumenty a dokážeme tieto vlastnosti kombinatorickými metódami. Dokážeme, že infímum z definície reálneho tokového čísla sa dosahuje, že je racionálne a navyše $\lceil \Phi_{\mathbb{R}}(G) \rceil = \Phi(G)$.

## 2.2 Reálne tokové číslo a cyklomatické číslo grafu

V tejto kapitole zachytávame intuitívnu vlastnosť, že pokiaľ je graf malý, na vyjadrenie jeho reálneho tokového čísla nepotrebujeme veľký menovateľ (pripomíname, že reálne tokové číslo je vždy racionálne). K zachyteniu tohoto vzťahu sa používa pojem cyklomatického čísla grafu $G$, $\beta(G)$, ktoré určuje dimenziu cyklového priestoru grafu $G$. Pre súvislý graf platí $\beta(G) = |E(G) - V(G) + 1|$.

**Veta 1.** *Nech $G$ je graf a platí $\Phi_{\mathbb{R}}(G) = p/q$, kde $p$ a $q$ sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla, potom $\beta(G) \geq p + q - 1$.*

Špeciálne pre snarky možno z tohoto odhadu dostať dolný odhad pre ich reálne tokové číslo.

**Veta 2.** *Pre graf $G$ s $n$ vrcholmi platí*

$$\Phi_{\mathbb{R}}(G) \geq 4 + 1/\lceil (n-4)/8 \rceil \geq 4 + \frac{8}{n+2}.$$

Zároveň ukážeme, že tento odhad sa dosahuje. Isaacsov snark $I_{2k+1}$ má $4(2k + 1)$ vrcholov. Nikde nulový $(4 + 1/k)$-tok na tomto snarku skonštruoval Steffen [23]. Pomocou tohoto odhadu určujeme, že reálne tokové číslo Isaacsoveho snarku $I_{2k+1}$ je $4 + 1/k$. Tieto výsledky boli publikované v [1].

## 2.3 Reálne tokové číslo niektorých tried snarkov.

Na štúdium reálneho tokového čísla sme si vybrali tri nekonečné triedy snarkov – Isaacsove snarky, zovšeobecnené Blanušove snarky a Goldbergove snarky. Cieľom bolo nájsť metódy na určovanie reálneho tokového čísla snarkov. Veta 2 umožňuje určiť reálne tokové číslo prvej triedy grafov, Isaacsovych snarkov.

**Veta 3.** *Reálne tokové číslo Isaacsoveho snarku $I_{2k+1}$ je $4 + 1/k$.*

Na výpočet reálneho tokového čísla zovšeobecnených Blanušových snarkov bolo potrebné použiť nové techniky. Vďaka nim sa nám podarilo určiť reálne tokové číslo zovšeobecnených Blanušovych snarkov oboch typov.

**Veta 4.** *Reálne tokové číslo zovšeobecnených Blanušovych snarkov je $4,5$ s výnimkou Petersenovho grafu, ktorého reálne tokové číslo je $5$.*

Pre Goldbergove snarky sa nám poradilo nájsť len nasledujúci odhad ich reálneho tokového čísla.

**Veta 5.** *Reálne tokové číslo Goldbergovho snarku $G_k$ je aspoň $4+1/(2k+1)$ a nanajvýš $4 + 1/k$.*

## 2.4 Snarky s daným tokovým číslom

Pan a Zhu [21] skonštruovali pre každé racionálne číslo medzi 4 a 5 grafy s daným reálnym tokovým číslom. Tieto grafy však neboli kubické, preto položili otázku, či existuje pre každé racionálne číslo medzi 4 a 5 aj kubický graf s týmto tokovým číslom a taktiež, či pre každé racionálne číslo z intervalu $\langle 4, 5\rangle$ existuje aj snark s týmto tokovým číslom.

Nájdeme metódu, ktorá nám umožní rozdeliť vrcholy stupňa väčšieho ako tri bez toho, aby sme zvýšili tokové číslo a zároveň bez toho aby sme znížili cyklickú súvislosť grafu pod 4 a obvod grafov pod 5. Tým ukážeme že na obe otázky Pana a Zhua je odpoveď "áno". Dokážeme nasledovnú vetu:

**Veta 6.** *Každé racionálne číslo z intervalu $\langle 4, 5\rangle$ je reálnym tokovým číslom pre nekonečne veľa snarkov.*

Keďže reálne tokové číslo grafu je vždy racionálne, tento výsledok je najlepší možný za predpokladu, že platí Tutteho hypotéza o 5-toku. Výsledok pochádza z článku [2]

## 2.5 Snarky s daným cirkulárnym chromatickym indexom

Podobný výsledok dokážeme aj pre cirkulárny chromatický index. V tomto prípade sú však naše výsledky mimoriadne prekvapivé. Až do našej práce neboli známe kubické grafy, ktorých cirkulárny chromatický index bol v tvare $3 + p/q$, kde $p$ a $q$ sú nesúdeliteľné a $p > 2$. Ghebleh [6] vyslovil hypotézu, že neexistujú kubické grafy, pre ktoré $p > 2$. Taktiež Zhu vyslovil hypotézu [29] o globálnej štruktúre prípustných hodnôt cirkulárneho chromatického indexu grafov (nie len kubických). Táto hypotéza hovorila, že neexistuje rastúca ohraničená postupnosť cirkulárnych chromatických indexov grafov. Napriek týmto predstavám sa nám podarilo dokázať nasledujúci výsledok

**Veta 7.** *Pre každé racionálne číslo $r$ z intervalu $\langle 3, 3 + 1/3\rangle$ existuje nekonečne veľa kubických grafov s cirkulárnym chromatickým indexom $r$.*

Tento výsledok vyvracia obe spomínané hypotézy a ukazuje nový spôsob ako konštruovať snarky a zároveň pri tom ovládať ich cirkulárny chromatický index.

Taktiež sa nám podarilo získať ďalšie možné hodnoty cirkulárneho chromatického indexu kubického grafu.

**Veta 8.** *Pre každé kladné celé číslo p, existuje nekonečne veľa grafov s cirkulárnym chromatickým indexom* $3 + p/(3p - 1)$.

Tieto výsledky výrazne rozširujú vedomosť o prípustných hodnotách cirkulárneho chromatického indexu. Okrem už spomínaných hodnôt sú ešte známe kubické grafy s cirkulárnymi chromatickými indexmi $3 + 2/3$ (Petersenov graf) a 4 (niektoré kubické grafy s mostami).

Tieto výsledky pochádzajú z [3].

# 3 Zoznam použitej literatúry


[1] AFSHANI, P. et al. 2005. Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3. In *J. Graph Theory.* 2005, vol. 49, no. 4, p. 325–335.

[2] DIESTEL, R. 2005. *Graph Theory.* 3-rd ed. Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. IBSN 3-540-26183-4.

[3] GARDENER, M. 1976. Mathematical games: Snarks, Boojums, and other conjectures related to the Four-Color-Map Theorem. In *Sci. Am.* 1976, vol. 234, p. 126–130.

[4] GHEBLEH, M. et al. 2006. The circular chromatic index of Flower snarks. In *The Electronic J. of Combinatorics* [online]. 2006, vol. 13, no. 20.

[5] GHEBLEH, M. 2007. The circular chromatic index of Goldberg snarks. In *Discrete Math.*. 2007, vol. 307, no.24, p. 3220–3225.

[6] GHEBLEH, M. 2007. *Theorems and Computations in Circular Colourings of Graphs* : PhD thesis. Vancouver : Simon Fraser University, 2007.

[7] GHEBLEH, M. 2008. Circular Chromatic Index of Generalized Blanusa Snarks. In *The Electronic J. of Combinatorics* [online]. 2006, vol. 15, no. 44.

[8] GODDYN, L. A. – TARSI, M. – ZHANG, C. 1998. On $(k, d)$-colorings and fractional nowhere-zero flows. In *J. Graph Theory.* 1998, vol. 28, no. 3, p. 155–161.

[9] ISAACS, R. 1975. Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable, In *Am. Math. Monthly.* 1975, vol. 82, p. 221–239.

[10] JAEGER, F. 1975. Balanced valuations and flows in multigraphs, In *Proc. Am. Math. Soc.* 1975, vol. 55, p. 237–242.

[11] JAEGER, F. 1988. Nowhere-zero flow problems, In *Topics in Graph Theory.* London : Academic Press, 1988, p. 70–95.

[12] JEAGER, F – SWART, T. 1980. Conjecture 1. In *Combinatorics 79* (M. Deza and I. G. Rosenberg, Eds.), Ann. Discrete Math. 1980, vol. 9, p. 305.

[13] KAISER, T. – KRÁĽ, D. – ŠKREKOVSKI, R. 2004. A revival of the girth conjecture, In *J. Combin. Theory Ser. B.* 2004, vol. 92, no 1, p. 41–53.

[14] KILPATRICK, P. A. 1975. *Tutte's first Colour-Cycle Conjecture* : PhD. Thesis. Cape Town : University of Cape Town, 1975.

[15] KOCHOL, M. 1996. Snarks without Small Cycles, In *J. Combin. Theory Ser. B.* 1996, vol 67, no. 1, p. 34–47.

[16] KRÁĽ, D. et al. 2009. Circular edge-colourings of cubic graphs with girth six. In *J. Combin. Theory Ser. B* [online]. 2009, vol. 34.

[17] MÁČAJOVÁ, E. – RASPAUD, A. 2006. On the strong circular 5-flow conjecture. In *J. Graph Theory.* 2006, vol. 52, no. 4, p. 307–316.

[18] MAZÁK, J. 2008. Circular Chromatic Index of Type 1 Blanuša Snarks. In *J. Graph Theory.* 2008, vol. 59, no. 2, p. 89–96.

[19] MOHAR, B. 2003. Problem of the Month, March and April 2003. In `http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/` [online]. 2003.

[20] NADOLSKI, A. 2007. The circular chromatic index of some class 2 graphs. In *Discrete Math.* 2007, vol. 307, no. 11–12, p. 1447–1454.

[21] PAN, Z. – ZHU, X. 2003. Construction of graphs with given circular flow numbers, In *J. Graph Theory.* 2003, vol. 43, no. 4, p. 304– 318.

[22] SEYMOUR, P. D. 1981. Nowhere-zero 6-flows. In *J. Combin. Theory Ser. B.* 1981, vol. 30, no. 2, p. 130–135.

[23] STEFFEN, E. 2001. Circular flow numbers of regular multigraphs, In *J. Graph Theory.* 2001, vol. 36, no. 1, p. 24–34.

[24] TAIT, P. G. 1880. Note on a Theorem in Geometry of Position. In *Trans. Roy. Soc. Edinburgh.* 1880, vol. 29, p. 657–660.

[25] TUTTE, W. T. 1949. On the imbending of linear graphs in surfaces. In *Proc. London Math. Soc. Ser. 2.* 1949, vol. 51, p. 474–483.

[26] TUTTE, W. T. 1954. A contribution to the theory of chromatic polynomials. In *Canad J. Math..* 1954, vol. 6, p. 80–91.

[27] WATKINS, J. J. 1989. Snarks, In *Ann. New York Acad. Sci.* 1989, vol. 576, p. 606–622.

[28] ZHU, X. 2001. Circular chromatic number – a survey. In *Discrete Math.* 2001, vol. 229, no. 1, p. 371–410.

[29] ZHU, X. 2006. Recent developments in circular colourings of graphs. In *Topics in Discrete Mathematics.* Heidelberg : Springer, 2006, p. 497–550.

# 4 Zoznam publikovaných prác autora so vzťahom ku skúmanej problematike

[1] LUKOŤKA, R. – ŠKOVIERA, M. 2008. Real flow number and the cycle rank of a graph. In *J. Graph Theory.* 2009, vol 59, no. 1, p. 11–16.

[2] LUKOŤKA, R. – ŠKOVIERA, M. 2010. *Snarks with given real flow number*. 2010. In *J. Graph Theory*. Manuscript.

[3] LUKOŤKA, R. – MAZÁK, J. 2009. *Graphs with given circular chromatic index*, 2009. Manuscript.

# 5 Summary

A real flow on a graph (also known as the circular flow) is a flow with values in $\mathbb{R}$. A real nowhere-zero $r$-flow is a real flow $\phi$ with each edge satisfying the condition $1 \leq |\phi(e)| \leq r - 1$. The real flow number $\Phi_{\mathbb{R}}(G)$ of a graph $G$ is the infimum of all reals $r$ such that $G$ has a real nowhere-zero $r$-flow. The infimum from the definition is always achieved [8]. The real flow number is always rational and it is a refinement of the ordinary flow number—it holds that $\Phi(G) = \lceil \Phi_{\mathbb{R}}(G) \rceil$.

First, we present new elementary proofs of basic properties of the real flow number mentioned above. In our proofs we will avoid using the flow colouring duality on matroids. We also avoid using linit arguments.

Later we precise the intuition that the denominator of the real flow number of a graph needs not to be large if the graph is small. Precisely we connect the real flow number with the of cycle rank of the graph $\beta(G)$. We show that if $\Phi_{\mathbb{R}}(G) = p/q$, where $p$ and $q$ are two coprime integers, $\beta(G) \geq p + q - 1$. For a snark $G$ this bound yields a tight lower bound of its real flow number: $\Phi_{\mathbb{R}}(G) \geq 4 + 1/\lceil (n-4)/8 \rceil \geq 4 + \frac{8}{n+2}$. Using this lower bound show that the real flow number of the Isaacs snark $I_{2k-1}$ is $4 + 1/k$, where $k$ is a positive integer. This also proves that this bound can be achieved.

We study the set of possible real flow numbers of a snark. Pan and Zhu [21] showed that every rational number between 4 and 5 is a real flow number of some graph, however their graphs were not cubic. Therefore they asked whether every rational number between 4 and 5 is the real flow number of some cubic graph or even whether every such number is a real flow number of a snark. We answer both these questions in affirmative as we show that for every rational number $r$ between 4 and 5, there exist infinitely many snarks with real flow number $r$. Since the real flow number is always rational this is the best possible result assuming that Tutte's 5-flow conjecture is true.

We try to compute the real flow number of two other families of snarks. We show that the real flow numbers of generalized Blanuša snarks of both types is 4.5, except for the Petersen graph which real flow number is 5. For the Goldberg snarks we obtain the following bounds on their real flow number: $4 + \frac{1}{2k+1} \leq \Phi_{\mathbb{R}}(G_k) \leq 4 + \frac{1}{k}$.

For every rational number $r$ between 3 and $3 + 1/3$ we find a cubic graph with circular chromatic index $r$. We also construct graphs with circular chromatic indices $3 + p/(3p - 1)$, where $p$ is a positive integer. This results are somewhat unexpected. It disproves conjecture of Ghebleh [4] that the circular flow index of a cubic graph is always in form $3 + p/q$, where $p$ and $q$ are two non-negative integers, $p \leq 2$ and $q \neq 0$. It also disproves a more general conjecture of Zhu [29] about general (not only cubic) graphs, that there exists no bounded increasing sequence of circular chromatic indices of graphs. In fact this construction is first construction that produces cubic graphs with circular chromatic index in form $3 + p/q$, where $p > 2$.