Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Peter Letavaj

Autoreferát dizertačnej práce

Metódy sumácie postupností

na získanie akdemického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.1.9. aplikovaná matematika

Bratislava, 5. apríl 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Peter Letavaj
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: prof. RNDr. Pavel Kostyrko, DrSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti: ....
....
....

....
....
....

....
....
....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....
9.1.9. aplikovaná matematika
na ....

Predseda odborovej komisie:
....
....
....

Táto dizertačná práca sa skladá zo štyroch kapitol. V každej z nich sú uvedené známe poznatky z teórie limitovania postupnosti a kapitoly (okrem prvej) končia anglicky písanými prácami, ktoré chcú byť prínosom do témy.

Obsahový rámec práce určuje pojem metóda limitovania, čo je ľubovoľné rozšírenie limity, ako lineárneho funkcionálu z množiny konvergentných postupností na väčšiu množinu. Známe metódy limitovania postupností reálnych čísel sú:

1. METÓDY LIMITOVANIA*. Využíva lineárnu transformáciu $f\colon A \to B$ pôvodnej postupnosti $x \in A$ na postupnosť $y = f(x) \in B$. Nová (rozšírená) limita bude limitou postupnosti y. Do tejto kategórie spadajú metódy určené nekonečnými maticami.

2. ABELOVA METÓDA. Abelova limita postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je určená limitou $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n$, pričom $a_{-1} = 0$.

3. $\mathcal{I}$-KONVERGENCIA. Nová limita - $\mathcal{I}$-limita je určená pomocou ideálu $\mathcal{I}$ na množine $\mathbb{N}$.

Systém $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa nazýva ideál na množine $\mathbb{N}$, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$,
2. $A \in \mathcal{I},\, B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad B \in \mathcal{I}$,
3. $A, B \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{I}$.

$$\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| > \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

$\mathcal{I}$-limitu možno určiť aj pre postupnosti prvkov ľubovoľného topologického priestoru.

Za istých podmienok sú maticové metódy limitovania* a $\mathcal{I}$-konvergencia rozšírením obvyklej limity. Je to vtedy keď:

1. Matica A spĺňa podmienky (Zn), (Sp_0) a (Zs_1) pričom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(\exists M_0 > 0)(\forall m \in \mathbb{N}): \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < M_0, \qquad \text{(Zn)} \quad \{\texttt{zn}\}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \quad \lim_{m\to\infty} a_{mn} = a_n = 0, \qquad (\mathrm{Sp}_0) \quad \{\texttt{sp0}\}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1. \qquad (\mathrm{Zs}_1) \quad \{\texttt{zs1}\}$$

Matica A spĺňajúca tieto podmienky sa nazýva regulárna. A-lim $x_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$, kde $t_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i$ je príslušná lineárna transformácia.

2. Ideál $\mathcal{I}$ obsahuje všetky konečné podmnožiny množiny $\mathbb{N}$. Takýto ideál sa nazýva prípustný.

Abelova metóda je tiež rozšírením obvyklej limity.

Dôležitou otázkou je, nakoľko tá-ktorá metóda A rozširuje limitu, resp. aké veľké je jej konvergenčné pole $F(A)$. Pod pojmom konvergenčné pole rozumieme množinu všetkých postupností limitovateľných danou metódou. Konvergenčné pole obvyklej limity označujeme symbolom C.

Pre regulárnu maticovú metódu* M platí: $F(M) \supseteq C$. Naviac, zo Steinhausovej vety (veta 1.1.10) vyplýva: $F(M) \supsetneq \ell_\infty$, kde ℓ_∞ je množina všetkých ohraničených postupností reálnych čísel.

Špeciálnym prípadom maticovej metódy je Cesàrova metóda určená maticou $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots\dots & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$. Abelova metóda je silnejšia ako Cesàrova, teda $C \subseteq F(T_1) \subsetneq F(A)$ a naviac $F(A)$ obsahuje neohraničenú postupnosť a neobsahuje všetky ohraničené.

V druhej kapitole sú uvedené výsledky týkajúce sa „veľkosti“ konvergenčného poľa regulárnych maticových metód aj Abelovej metódy. Ide o „veľkosť“ z hľadiska prvej Bairovej kategórie a z hľadiska porozity v metrickom priestore.

Množina $M \subset X$, kde $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, je prvej Bairovej kategórie, ak je zjednotením spočítateľného počtu riedkych množín.

Nech (Y, ϱ) je metrický priestor a $M \subseteq Y$. Nech $B(y, \delta)$ označuje δ-ové okolie bodu y. Položme $\gamma(y, \delta, M) = \sup\{t > 0 : (\exists z \in B(y, \delta))([B(z, t) \subset$

$B(y,\delta)] \wedge [B(z,t) \cap M = \emptyset])\}$, kde $y \in Y$ a $\delta > 0$. Ak také t neexistuje, tak $\gamma(y,\delta,M) = 0$.

Z prác [Ko1], [Ko2] sú uvedené výsledky týkajúce sa konvergenčného poľa regulárnych maticových metód.

Veta 2.1.3: Nech (S_1, ϱ) je FK-priestor obsahujúci všetky ohraničené postupnosti. Konvergenčné pole $F(A)$ ľubovoľnej regulárnej maticovej metódy A je množinou prvej Bairovej kategórie.

Veta 2.1.4: Nech $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor ohraničených postupností so suprémovou normou. Konvergenčné pole $F(A)$ ľubovoľnej regulárnej maticovej metódy A je silno porózna množina.

Veta 2.1.7: Nech A je regulárna maticová metóda a $(S_1(A), \varrho)$ je nasledovný metrický priestor: $S_1(A) = \{x \in S : (\exists t = (t_n))(\forall n \in \mathbb{N}) t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\}$ a $\varrho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$ je Fréchetova metrika. Potom $F(A)$ je σ-porózna množina v $S_1(A)$.

Prínosom tejto práce v prvej kapitole je veta 2.1.8 a článok [L1] na konci kapitoly.

Veta 2.1.8: Konvergenčné pole $F(A)$ Abelovej sumačnej metódy je množinou prvej Bairovej kategórie v priestore (ℓ_∞, ϱ). (priestor ohraničených postupností so suprémovou metrikou.)

Hlavné tvrdenie z [L1]: Konvergenčné pole $F(A)$ Abelovej sumačnej metódy je veľmi porózna množina v priestore (ℓ_∞, ϱ).

V druhej kapitole sú uvedené výsledky prác viacerých autorov ohľadom pojmov:

1. $\mathcal{I}$-bod uzáveru, $\mathcal{I}$-hromadná hodnota a hromadná hodnota postupnosti,
2. $\mathcal{I}$-konvergencia siete, konvergencia filtra, $\mathcal{I}$-konvergencia funkcie.

Obsah prvej podtémy súvisí s tým, že v článku [L3] sa hovorí o $\mathcal{I}$-konvergencii postupnosti k nejakej množine, pričom sa skúma súvis tejto množiny a množiny $\mathcal{I}(\Gamma_x)$ $\mathcal{I}$-bodov uzáveru danej postupnosti x. Sú tu uvedené definície štatistickej konvergencie, štatistických bodov uzáveru, štatistických hromadných hodnôt a tvrdenia popisujúce vlastnosti množín Λ_x (štatistické hromadné hodnoty), Γ_x (štatistické body uzáveru) a L_x (hromadné hodnoty).

Z viet 3.1.11 a 3.1.12 máme, že množina Λ_x je množinou typu F_σ, a ak $X \subset \mathbb{R}$ je množina typu F_σ, tak existuje postupnosť x, že $\Lambda_x = X$.

Veta 3.1.16 je postačujúcou podmienkou na to, aby množina Γ_x bola súvislá. (Pre ohraničenú postupnosť x.)

Vety 3.1.20 a 3.1.21 sa zaoberajú postupnosťami prvkov metrických priestorov (separabilných, neseparabilných) a hovoria ku akým množinám existuje (neexistuje) postupnosť, aby daná množina bola (nebola) množinou $\mathcal{I}(\Gamma_x)$, či $\mathcal{I}(\Lambda_x)$.
$\mathcal{I}(\Lambda_x)$ je množina $\mathcal{I}$-hromadných hodnôt postupnosti x.

Teda podkapitola 3.1 obsahuje tvrdenia charakterizujúce množiny Γ_x, Λ_x, $\mathcal{I}(\Gamma_x)$, $\mathcal{I}(\Lambda_x)$ a L_x v rôznych priestoroch.

Podkapitola 3.2 chce ujasniť a zjednotiť niektoré koncepty konvergencie v topologických priestoroch. Ide o konvergenciu a $\mathcal{I}$-konvergenciu dvojných postupností, konvergenciu a $\mathcal{I}$-konvergenciu sietí, konvergenciu filtrov a $\mathcal{I}$-konvergenciu funkcií, resp. konvergenciu funkcie podľa filtra. Okrem iného, táto časť práce obsahuje mnoho tvrdení zo všeobecnej topológie.

Motiváciou pre túto podkapitolu boli články [LD], [DMS], v ktorých sa autori venujú $\mathcal{I}$-konvergencii sietí a štatistickej konvergencii dvojných postupností.

Zjednocujúcou časťou je definícia 3.2.24 limity zobrazenia(funkcie) podľa filtra a príklad 3.2.25, ktorý ilustuje toto zjednotenie. Naviac je zvýraznená zhoda nielen pre $\mathcal{I}$-limity ale aj $\mathcal{I}$-body uzáveru (pre pôvodný koncept $\mathcal{I}$-konvergencie postupností a iný koncept z definície 3.2.24). To, čo sa týmto iným konceptom popísať nedá je $\mathcal{I}^*$-konvergencia.

Posledná kapitola je venovaná slabej $\mathcal{I}$-konvergencii. Postupnosť (x_n) prvkov normovaného priestoru X slabo $\mathcal{I}$-konverguje ku x, ak pre každý lineárny ohraničený funkcionál $f \in X^*$ číselná postupnosť $(f(x_n))$ $\mathcal{I}$-konverguje ku $f(x)$.

Vo vete 4.2 sú uvedené základné vlastnosti slabej $\mathcal{I}$-limity. Ide o jednoznačnosť, lineárnosť priestoru slabo $\mathcal{I}$-limitovateľných postupností, či tvrdenie, že slabá $\mathcal{I}$-limita rozširuje slabú limitu.

Ďalšia veta hovorí o ekvivalencii slabej $\mathcal{I}$-konvergencii a $\mathcal{I}$-konvergencii podľa normy v konečnorozmerných normovaných priestoroch. Naviac objasňuje, prečo vo všeobecnosti slabá $\mathcal{I}$-konvergencia neimplikuje $\mathcal{I}$-konvergenciu. (Ide o postupnosť prvkov ortonormálnej bázy v Hilbertovom priestore ℓ_2.)

V článku [L2], ktorý je uvedený na konci kapitoly, sú vyšetrované priestory L_p, $p \geq 1$ a $C(a,b)$ a platnosť implikácie: slabá $\mathcal{I}$-konvergencia $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$-konvergenciu (podľa normy). Je ukázané, že ani v týchto priestoroch spomenutá implikácia neplatí.

Okrem toho v tejto kapitole vo vete 4.7 je kritérium konečnorozmernosti Banachových priestorov z článku [CGK]: Banachov priestor je konečnorozmerný práve vtedy, keď každá slabo štatisticky konvergentná postupnosť s limitou $\mathcal{O}$ obsahuje ohraničenú podpostupnosť. Dôkaz vety je „pestrý“, lebo využíva tvrdenia z viacerých oblastí.

1 Summary

This thesis consists of four chapters, three of them contain papers at the end. These papers [L1], [L3] and [L2] are the product of the scientific activity of the author.

The first chapter is a short introduction to the topic of the summation methods of sequences. Matrix summation method, $\mathcal{I}$-convergence and Abel summation method, and basic properties of them are presented here. This part coincides with the project of this thesis.

In the second chapter, there are described the convergence field $F(M)$ of regular matrix transformations (methods) and the convergence field $F(A)$ of Abel summation method. The main results mentioned here are taken from the works [Ko1], [Ko2]. These results give some properties of the set $F(M)$.

Namely, $F(M)$ is a set of the first Baire category in any FK-space (S, ϱ).

The set $F(M)$ is strongly porous in the Banach space $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$. ($\|\cdot\|$ is sup-norm.)

Let (S, ϱ) be the space of all real sequences endowed with Fréchet metric. The set $F(M)$ is σ-porous in $S(M)$, where $S(M)$ is the domain of the regular matrix transformation M.

Results about the convergence field $F(A)$ of Abel summation method are the following: $F(A)$ is a set of the first Baire category and $F(A)$ is very porous set in the space $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$. ($\|\cdot\|$ is sup-norm.)

The third chapter is divided into two parts. The first one contains the results about the sets $\mathcal{I}(\Gamma_x)$, $\mathcal{I}(\Lambda_x)$ and L_x. These sets are the sets of all $\mathcal{I}$-cluster points, $\mathcal{I}$-limit points and limit points of the sequence x for an admissible ideal $\mathcal{I}$. As a special case we study the ideal $\mathcal{I}_d$ for statistical convergence. There are mentioned some properties of these sets and relation between them in this part. This part serves as a characterization of the set $\mathcal{I}(\Gamma_x)$, which is dealt with in the paper [L3].

The second part gives generalization of the concepts: $\mathcal{I}$-convergence of sequences, convergence of filters in topological space and $\mathcal{I}$-convergence of nets. This generalization is made using concept of convergence of function with respect to a filter. See [Bou], [Ca2] and [Ca1].

It is shown that $\mathcal{I}$-cluster points and $\mathcal{I}$-limits are special cases of the

corresponding notions defined for the convergence of function with respect to filter. Disadvantage of this concept is impossibility to describe $\mathcal{I}^*$-convergence to $\mathcal{I}^*$-limit be preserved.

The fourth chapter is dealing with weak ideal convergence W$\mathcal{I}$C in norm spaces, which is a generalization of weak convergence. Some properties of W$\mathcal{I}$C are given and equivalence between W$\mathcal{I}$C and N$\mathcal{I}$C (norm ideal convergence) is proved for finite-dimensional spaces. That implication W$\mathcal{I}$C $\Rightarrow$ N$\mathcal{I}$C does not hold in general is illustrated here, and also in paper [L2]. A criterion of finite-dimensionality of a Banach space is mentioned. A Banach space is finite dimensional if and only if every weakly statistically null sequence has a bounded subsequence.

Zoznam prác dizertanta

[1] Peter Letavaj. Convergence field of Abel summation methods. *Math. Slov.* to appear.

[2] Peter Letavaj. $\mathcal{I}$-convergence to a set. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXXX(1):103–106, 2011.

[3] Peter Letavaj. On weak ideal convergence. submitted.

Zoznam použitej literatúry

[AA] M. D. Ašić and D. D. Adamović. Limit points of sequences in metric spaces. *Amer. Math. Monthly*, 77:613–616, 1970.

[Boo] J. Boos. *Classical and modern methods in summability.* Oxford University Press, New York, 2000.

[Bou] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics. General Topology. Chapters I-IV.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Ca1] H. Cartan. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 205:777–779, 1937.

[Ca2] H. Cartan. Théorie des filtres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 205:595–598, 1937.

[Ch] J. Christopher. The asymptotic density of some k-dimensional sets. *Amer. Math. Monthly*, 63:399–401, 1956.

[CGK] J. Connor, M. Ganichev, and V. Kadets. A characterization of banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 244:251–261, 2000.

[ČŠST] J. Činčura, T. Šalát, M. Sleziak, and V. Toma. Sets of statistical cluster points and $\mathcal{I}$-cluster points. *Real Anal. Exchange*, 30(2):565–580, 2004.

[DMS] Lakshmi Kanta Dey, Prasanta Malik, and Pratap Kumar Saha. On statistical cluster points of double sequences. submitted.

[E] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6.

[F1] J. A. Fridy. On statistical convergence. *Analysis*, 5:301–313, 1985.

[F2] J. A. Fridy. Statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118:1187–1192, 1993.

[Ke] John L. Kelley. *General Topology*. Springer, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics 27.

[Ko1] P. Kostyrko. Convergence fields of regular matrix transformations. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 28:153–157, 2004.

[Ko2] P. Kostyrko. Convergence fields of regular matrix transformations 2. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 40:143–147, 2008.

[KK] M.I. Kadets and V.M. Kadets. *Series in Banach spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. Operator Theory; Vol. 94.

[KLO] Vladimir Kadets, Alexander Leonov, and Cihan Orhan. *Weak statistical convergence and weak filter convergence for unbounded sequences*. J. Math. Anal. Appl., 2010. doi:10.1016/j.jmaa.2010.05.031.

[KMŠS1] P. Kostyrko, M. Mačaj, T. Šalát, and O. Strauch. On statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:2647–2654, 2001.

[KMŠS2] P. Kostyrko, M. Mačaj, T. Šalát, and M. Sleziak. $\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points. *Math. Slov.*, 55(4):443–464, 2005.

[KN] John L. Kelley and I. Namioka. *Linear Topological Spaces.* van Nostrand, New York, 1963.

[KŠW] P. Kostyrko, T. Šalát, and W. Wilczyński. $\mathcal{I}$-convergence. *Real Anal. Exchange*, 26:669–686, 2000-2001.

[L1] Peter Letavaj. Convergence field of Abel summation methods. *Math. Slov.* to appear.

[L2] Peter Letavaj. On weak ideal convergence. submitted.

[L3] Peter Letavaj. $\mathcal{I}$-convergence to a set. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXXX(1):103–106, 2011.

[LD] B. K. Lahiri and Pratulananda Das. I-convergence and I^*-convergence of nets. *Real Anal. Exchange*, 33(2):431–442, 2007.

[M] Marian Muresan. *A Concrete Approach to Classical Analysis.* Springer, 2008.

[PŞY] S. Pehlivan, Celaleddin Şençimen, and Z. H. Yaman. Weak ideal convergence. submitted.

[Š1] T. Šalát. *Nekonečné rady.* Academia, Praha, 1974.

[Š2] T. Šalát. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slov.*, 30(2):139–150, 1980.

[S1] Roman Sikorski. *Funkcje Rzeczywiste I.* PWN, Warzsawa, 1959.

[S2] Roman Sikorski. *Funkcje Rzeczywiste II.* PWN, Warzsawa, 1959.

[ŠŠN] M. Švec, T. Šalát, and T. Neubrunn. *Matematická analýza funkcií reálnej premennej.* Alfa, Bratislava, 1987.

[T] B. S. Thomson. *Real Functions.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[Z] L. Zajíček. Porosity and σ-porosity. *Real Anal. Exchange*, 13, 1987.