Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Lívia Leššová

Autoreferát dizertačnej práce

Rozdelenia pravdepodobnosti vyjadrené parciálnymi sumáciami: limity, oscilácie a dvojrozmerné zovšeobecnenia

na získanie akademického titulu *philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.9. Aplikovaná matematika

Bratislava 27.05.2020

Dizertačná práca bola vypracovaná:
v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Lívia Leššová
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. Mgr. Ján Mačutek, PhD.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

9.1.9. Aplikovaná matematika

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Summary

Partial summations of probability distributions have been studied so far mainly for the one-dimensional case, where one probability distribution called a parent is transformed into another probability distribution called a descendant. Based on the previous research we focused mainly on two topics. We first investigate several specific cases of one-dimensional partial summations, where the partial summation is viewed as a relationship of the three probability distributions. One is the parent, the other is the descendant, and the third is the type of the summation. We provide specific examples of summations where a geometric distribution enters them as one of the members.

For the bivariate partial summations we derive relations between the probability generating functions and moments of the parent and the descendant. Our work solves the problem of the invariance, i.e. we look for the function $g(x, y)$, in which the parent entering the summation remains unchanged. We provide examples of this function for several two-dimensional discrete distributions.

Another, closely related topic deals with sequences of the distributions created by iterated partial sums. Their limit distributions are found under certain conditions for discrete distributions on a finite support. This result is an extension of the one-dimensional case; it can be found in [4].

The last topic also deals with the repeated summations. It contains as yet unrecorded simple examples of oscillating sequences for both one-dimensional and two-dimensional cases. These ideas were presented in a reviewed conference proceedings from the European Young Statisticians Meeting 2019 [3].

Úvod

V tejto dizertačnej práci skúmame parciálne sumácie pre jedno- a dvojrozmerné diskrétne rozdelenia a ich vlastnosti. Výskum parciálnych sumácií sa doteraz orientoval prevažne na jednorozmerné parciálne sumácie, táto práca prináša nové výsledky pre jedno, ale najmä pre dvojrozmerné rozdelenia. Náš výskum pri jednorozmerných sumáciách sa zameriava hlavne na geometrické rozdelenie.

Vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami rodiča a potomka v dvojrozmernom prípade je prezentovaný spolu s inými teoretickými výsledkami. Tiež sa venujeme problému invariantnosti a je poskytnutých množstvo výsledkov pre rôzne verzie dvojrozmerného geometrického rozdelenia a pre rozdelenia hypergeometrického typu.

Pri jednorozmerných parciálnych sumáciách boli vo viacerých publikáciách skúmané tzv. opakované parciálne sumácie, pričom nedávno bol zaznamenaný pokrok v tomto smere pre rozdelenia definované na konečnom nosiči. Ponúkame rozšírenie opakovaných parciálnych sumácií pre dvojrozmerné diskrétne rozdelenia. Výsledky sú dosiahnuté pomocou mocninovej metódy, ktorá bola aplikovaná pri jednorozmerných opakovaných parciálnych sumáciách. Následne sú podrobne rozobraté niektoré zaujímavé prípady pre limity postupností rozdelení hypergeometrického typu. Nakoniec uvádzame príklady oscilácie postupnosti rozdeleni pravdepodobnosti získaných pomocou opakovaných parciálnych sumácií.

Ciele

Hlavným cieľom práce bolo rozširovanie už známych poznatkov týkajúcich sa parciálnych sumácií. Dve kapitoly tejto práce sa venovali jednorozmerným parciálnym sumáciám, hlavný výskum bol zameraný na dvojrozmerný prípad. V tomto smere neboli zatiaľ výraznejšie výsledky, doteraz sme zaznamenali iba rozšírenie definície v [1], z ktorej sme vychádzali.

Dizertačná práca rozširuje prijatý článok [4] a príspevok v recenzovanom zborníku [3].

Parciálne sumácie

Nech sú $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ a $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a nech $u(x,j)$ je reálna funkcia. Potom ak platí vzťah

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} u(x,j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

tak vravíme, že $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ je výsledkom parciálnej sumácie (tzv. potomkom) rozdelenia $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ (tzv. rodiča).

Parciálne sumácie definované vzťahom (1) sú zovšeobecnením typov, ktoré dostaneme vhodnou voľbou funkcie $u(x, j)$. V práci [9] sú analyzované dva typy parciálnych sumácií, a to

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

a

$$P_x = h(x) \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Pre sumácie (2) a (3) bolo v tejto práci ukázané, za akých podmienok zostáva rodič invariantný (t.j. $P_x^* = P_x,\ x = 0, 1, 2, ...$). Nech pre rodiča $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ platí rekurentný vzťah

$$P_{x+1}^* = f(x+1) P_x^*, \quad x = 0, 1, 2, ..., \tag{4}$$

potom pre sumáciu (2) je rodič rovnaký ako potomok práve vtedy, keď

$$g(x) = 1 - f(x+1) = 1 - \frac{P_{x+1}^*}{P_x^*},$$

kde $x = 0, 1, 2, ...$ Pri sumácii (3) (tiež ak platí (4)) je to práve vtedy, keď

$$h(x) = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} f(x+k)\right)^{-1},$$

pre $x = 0, 1, 2, ...$ V [9] sú uvedené aj vzťahy medzi vytvárajúcimi funkciami rodiča a potomka. Označme μ^* strednú hodnotu rodiča, $G^*(t)$ vytvárajúcu funkciu rodiča a $G(t)$ vytvárajúcu funkciu potomka. Platí

$$G(t) = \frac{c_1}{1-t} \left(1 - tG^*(t) - \sum_{x=0}^{\infty} P_x^* f(x+1)(1 - t^{x+1})\right), \tag{5}$$

kde

$$c_1 = \frac{1}{1 + \mu^* - \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) f(x+1) P_x^*},$$

ak postupnosť $\{\sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*\}_{x=0}^{\infty}$ nemení znamienko.

Článok [7] uvádza, že rozdelenia z Katzovej triedy, pre ktorú platí

$$P_{j+1}^* = \frac{\alpha + \beta j}{1 + j} P_j^*, \quad j = 0, 1, 2, ..., \alpha \geq 0, \beta < 1$$

a ak pre $n \in \{1, 2, ...\}$ platí $\alpha + \beta n < 0$, tak $P^*_{n+j} = 0$, sú invariantné vzhľadom na (2) práve vtedy, keď

$$g(j) = 1 - \frac{\alpha + \beta j}{1 + j}, \quad j = 0, 1, 2, ..., \alpha \geq 0, \beta < 1. \tag{6}$$

Na základe (6) definuje *Katzovu triedu parciálnych sumácií* $(\alpha, \beta, \{P^*_j\}_{j=0}^{\infty})$ s rozdelením pravdepodobnosti

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha + \beta j}{1 + j}\right) P^*_j. \tag{7}$$

Pre Katzovu triedu parciálnych sumácií s (7) odvádza vzťah medzi vytvárajúcimi funkciami a faktorovými momentami.

V článku [10] sa autor pozerá na parciálnu sumáciu (1), jej typom (2) a prepojeniami rozdelení vo svetle modelov v lingvistike.

Špeciálne typy parciálnej sumácie (1) spolu s odkazmi na publikácie, v ktorých sa vyskytli:

1. Pre $h(x) = c$ (konštanta) z (3) dostávame parciálnu sumáciu

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} P^*_j, \quad x = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

(pre viac podrobností pozri [17], [12] [13] a [1]).

2. Prípad, kedy

$$P_x = c \sum_{j=x+1}^{\infty} \frac{P^*_j}{j}, \quad x = 0, 1, 2, ..., \tag{9}$$

kde $g(j) = \frac{c}{j}$ z (2), c je normalizačná konštanta. Tento typ parciálnej sumácie bol skúmaný v [19], [14], [8] a [16].

3. Nasledujúci typ parciálnych sumácií sa využíva pri kvantitatívnom modelovaní v lingvistike a v muzikológii. Pre $h(x) = \frac{c}{x}$ z (3) dostávame

$$P_x = \frac{c}{x} \sum_{j=x}^{\infty} P^*_j \tag{10}$$

pre $x = 0, 1, 2, ...$ Pre tento typ pozri [15], [5], [6].

4. V modeloch rizika v [6] sa skúma napríklad čas zruinovania, prebytok tesne pred zruinovaním, deficit v čase ruinovania a iné, čo vedie k parciálnej sumácii

$$P_x = d \sum_{j=x}^{\infty} r^{j-x} P^*_j, \quad x = 0, 1, 2, ..., \tag{11}$$

$r \in \mathbb{C}$, c normalizačná konštanta. Pre tento typ pozri tiež [5].

Kombinovanie rodičovského rozdelenia a sumácie

Významný článok pre sumácie typu (2), ktorý rozoberá vzťah rodiča, potomka a sumácie, je [18]. Autori v ňom ukázali, že dve rozdelenia pravdepodobnosti $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ a $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ definované na $\mathbb{N}_0$ so všetkými pravdepodobnosťami nenulovými spĺňajú (1) pre

$$u(x,j) = u(j) = \frac{P_j^* - P_{j+1}^*}{P_j}, \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{12}$$

Ako dôsledok v ňom bolo uvedené, že nemá zmysel hovoriť o triede parciálnych sumácií s napríklad Poissonovským rodičom, keďže všetky rozdelenia s nosičom $\mathbb{N}_0$ s nenulovými pravdepodobnosťami môžu byť vyjadrené ako potomkovia Poissonovského rodiča a nejakej funkcie $u(x,j)$. Preto ak chceme vybudovať triedu rozdelení, musíme fixovať dva z troch prvkov - rodič, potomok, funkcia $u(x,j)$. Vtedy je tretí prvok jednoznačne určený (v prípade rozdelení s nosičom $\mathbb{N}_0$ s nenulovými pravdepodobnosťami), inak je rozdiel spôsobený normalizačnou konštantou. Tiež ale môže nastať prípad, že dvaja rozdielni rodičovia s dvoma rôznymi funkciami $u(x,j)$ vyústia do rovnakých potomkov.

Táto kapitola sa venuje jednorozmerným parciálnym sumáciám, konkrétne parciálnym sumáciám typu (2), pričom normalizačnú konštantu c nezahŕňame do funkcie $g(x)$:

$$P_x = c\sum_{j=x}^{\infty} g(j)P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

Zaujímavým problémom je otázka, čo vznikne z nejakého konkrétneho rodičovského rozdelenia a jemu nezodpovedajúcej parciálnej sumácie v zmysle, že je sumácia $g(x)$ rôzna od tej, ktorá necháva rodiča nezmeneného. Pre nájdenie takéhoto potomka využívame vetu z článku [9], prípadne priame odvodenie z definície (13).

Na začiatok uvažujme najjednoduchší prípad a to sumáciu zodpovedajúcu gometrickému rozdeleniu. V prípade, že uvažujeme geometrickú sumáciu, je funkciou $g(x)$ taká funkcia, ktorá necháva nezmenené geometrické rozdelenie, a takouto funkciou je konštanta (pozri [9]), konkrétne

$$g(x) = p, \quad p \in (0,1). \tag{14}$$

Vytvárajúca funkcia potomka v tomto prípade je

$$G(t) = \frac{1}{1+\mu^*}\frac{1-tG^*(t)}{1-t},$$

kde μ^* je stredná hodnota rodiča a $G^*(t)$ jeho vytvárajúca funkcia (pozri [9]). Môžeme si všimnúť, že toto vzniknuté rozdelenie je nezávislé na voľbe parametra p, teda nezávislé na hodnote funkcie $g(x)$.

V tabuľke 1 môžeme vidieť vybrané príklady rozdelení potomkov pri funkcii $g(x)$ (14) zodpovedajúcej geometrickému rozdeleniu pri sumácii (13).

V tabuľke 2 môžeme vidieť vybrané príklady rozdelení potomkov pri rodičovskom rozdelení geometrickom a funkcii $g(x)$ zodpovedajúcej Poissonovmu a Salviovmu-Bollingerovmu rozdeleniu pri rovnakej sumácii.

Tabuľka 1: Rozdelenie potomka pri sumácii zodpovedajúcej geometrickému rozdeleniu s rôznymi rodičovskými rozdeleniami.

rodičovské rozdelenie	rozdelenie potomka
Poissonovo	$\frac{e^{-\lambda}}{1+\lambda}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}$
negatívne binomické	$\frac{p}{p+(1-p)k}\left[1-p^k\sum_{i=0}^{x-1}\frac{(1-p)^i k^{(i-1)}}{i!}\right]$
hyper-Pascalovo	$\frac{{}_2F_1(k,1;m;q)-\sum_{i=0}^{x-1}\frac{q^i k^{(i)}}{m^{(i)}}}{{}_2F_1(k,1;m;q)(1-k)+k\ {}_2F_1(k+1,1;m;q)}$
hyperlogaritmické	$\frac{q\ {}_2F_1(1,x+1;m+x+1;q)}{m(\ {}_2F_1(1,1;m+1;q)-1)}\frac{x!q^x}{(m+1)^{(x)}}$

Tabuľka 2: Rozdelenie potomka pri sumácii zodpovedajúcej rôznym rozdeleniam s geometrickým rodičovským rozdelením.

sumácia	rozdelenie potomka
Salviova-Bollingerova	$\frac{p(1-p)^{x+2}}{1-p+p\ln p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{x+k+2}$
Poissonova	$\frac{p^2(1-p)^x}{1-\lambda p}\left(\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{x+1}\ {}_2F_1(1,x+1;x+2;q)\right)$

Dvojrozmerné parciálne sumácie

Doteraz boli viacrozmerné parciálne sumácie spomenuté iba v práci [1], pričom šlo iba o definíciu a akési odporúčanie k ďalšiemu výskumu v tejto oblasti. Autori rozšírili definíciu parciálnej sumácie

$$P_x = c\sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0,1,2,...$$

na dvojrozmernú parciálnu sumáciu

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \frac{P(X_1 > y_1, X_2 > y_2)}{E(X_1X_2)}. \tag{15}$$

Nadviazali sme na túto prácu a ďalej uvádzame dosiahnuté výsledky.

V definícii dvojrozmerných parciálnych sumácií definovaných na diskrétnych rozdeleniach vychádzame a zovšeobecňujeme dvojrozmerné rozšírenie v [1]. Ako dvojrozmernú analógiu sumácie (2) môžeme definovať dvojrozmernú parciálnu sumáciu

$$P_{x,y} = \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P^*_{i,j}, \quad x,y = 0,1,2,..., \tag{16}$$

kde $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ je rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti, $\{P_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ je tiež rozdelením pravdepodobnosti (potomok) a $g(x,y)$ je reálna funkcia. Parciálna sumácia (15) z úvodu kapitoly je špeciálnym prípadom tejto sumácie (16), kedy je funkcia $g(x,y)$ konštantná.

Uvažujme parciálnu sumáciu

$$P_{x,y} = c \sum_{i=x}^{\infty} \sum_{j=y}^{\infty} g(i,j) P^*_{i,j}, \quad x,y = 0,1,2,..., \tag{17}$$

kde c je normalizačná konštanta. V tejto parciálnej sumácii na rozdiel od (16) normalizačná konštanta nie je súčasťou funkcie $g(x,y)$.

Označme $f(x,y) = 1 - g(x,y)$. Potom pre prislúchajúce vytvárajúce funkcie týchto rozdelení platí nasledujúca veta.

Veta 1. *Nech $G(s,t)$ a $G^*(s,t)$ sú vytvárajúce funkcie prislúchajúce rozdeleniam pravdepodobnosti $\{P_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$, $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ z (17). Ak existujú stredné hodnoty $E_{P^*}(X)$, $E_{P^*}(Y)$, $E_{P^*}(XY)$, potom platí*

$$G(s,t) = c \frac{1 - sG^*_X(s) - tG^*_Y(t) + stG^*(s,t) - \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(1-s^{x+1})(1-t^{y+1}) f(x,y) P^*_{x,y}}{(1-s)(1-t)},$$

kde

$$c = \frac{1}{E_{P^*}(XY) + E_{P^*}(X) + E_{P^*}(Y) + 1 - \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(x+1)(y+1) f(x,y) P^*_{x,y}}$$

a $G^*_X(s)$, $G^*_Y(t)$ sú marginálne vytvárajúce funkcie prislúchajúce rozdeleniu pravdepodobnosti $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$.

Zaujímavou otázkou tiež je, ako vyzerajú základné momenty a kovariancia zložiek potomka získaného parciálnou sumáciou (17). Pre strednú hodnotu X dostávame

$$E_P(X) = E_{P^*}\left(\frac{c}{2} X(X+1)(Y+1) g(X,Y)\right).$$

Na výpočet disperzie využijeme druhý počiatočný moment, z čoho je disperzia

$$D_P(X) = E_{P^*}\left(\frac{c}{6}X(X+1)(2X+1)(Y+1)g(X,Y)\right) - \left(E_{P^*}\left(\frac{c}{2}X(X+1)(Y+1)g(X,Y)\right)\right)^2.$$

Kovariancia zložiek potomka vyjadrená pomocou rodiča

$$\begin{aligned} cov_P(X,Y) =& E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) = \\ =& \frac{c}{4}E_{P^*}\left(XY(X+1)(Y+1)g(X,Y)\right) - \\ &- \frac{c^2}{4}E_{P^*}\left(X(X+1)(Y+1)g(X,Y)\right)E_{P^*}\left(Y(X+1)(Y+1)g(X,Y)\right). \end{aligned}$$

Invariantnosť vzhľadom na parciálne sumácie

Jedným zo zaujímavých problémov v parciálnych sumáciách bol a stále zostáva problém invariantnosti, t.j. určenie funkcie $g(i,j)$ takej, aby bolo rozdelenie pravdepodobnosti potomka zhodné s daným rozdelením rodiča. Výsledky z tejto a nasledujúcej časti boli spísané v článku [4].

Veta 2. *Nech $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$, $P^*_{x,y} \neq 0$ pre $x,y = 0,1,2,\ldots$, je dvojrozmerné diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a nech preň platí*

$$P^*_{x+1,y+1} = P^*_{x+1,y} + P^*_{x,y+1} - f(x,y)P^*_{x,y}, \quad x,y = 0,1,2,... \tag{18}$$

Potom rozdelenie $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ je invariantné vzhľadom na parciálnu sumáciu (16) práve vtedy, keď

$$g(x,y) = 1 - f(x,y), \quad x,y = 0,1,2,... \tag{19}$$

V tabuľke (3) môžeme vidieť príklady rozdelení s im zodpovedajúcimi funkciami $g(x,y)$ s ktorými zostávajú nezmenené vzhľadom na parciálnu sumáciu (16). Viac príkladov možno nájsť v dizertačnej práci.

Opakované parciálne sumácie

Opakované parciálne sumácie pre sumáciu (8) boli zadefinované v článku [11] nasledovne. Nech $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$, $\{P_x^{(2)}\}_{x=0}^{\infty}$, ..., $\{P_x^{(n)}\}_{x=0}^{\infty}$, ... sú rozdelenia pravdepodobnosti na nezáporných celých číslach vygenerované z rozdelenia $\{P^*_x\}_{x=0}^{\infty}$ pomocou parciálnej

Tabuľka 3: Príklady funkcie $g(x,y)$, pri ktorej zostávajú príslušné rozdelenia invariantné vzhľadom na danú parciálnu sumáciu.

Phatakovo-Sreehariho geometrické rozdelenie

$$p_1p_2\frac{(x+y+2)(x+y+1)}{(x+1)(y+1)} - p_1\frac{(x+y+1)}{(x+1)} - p_2\frac{(x+y+1)}{(y+1)} + 1$$

Hawkesovo geometrické rozdelenie

$$\begin{cases} 1+p-r-\dfrac{p}{r}, & y+1<x, \\ 1+p-r-p\dfrac{1+p-r-s}{(r-p)(1-r)}, & x=y+1, x>y, \\ 1+p-\dfrac{(r-p)(1-r)}{1+p-r-s}-\dfrac{(s-p)(1-s)}{1+p-r-s}, & x=y, \\ 1+p-s-p\dfrac{1+p-r-s}{(s-p)(1-s)}, & y=x+1, y>x, \\ 1+p-s-\dfrac{p}{s}, & y>x+1 \end{cases}$$

Nairovo-Nairovo geometrické rozdelenie

$$(1-p_1\theta^y-p_2\theta^x+p_1p_2\theta^{x+y+1})+(\theta-1)\frac{p_1^2p_2^2\theta^{2x+2y+3}-p_1p_2\theta^{x+y+1}-2}{1-p_1\theta^y-p_2\theta^x+p_1p_2\theta^{x+y+1}}$$

---

negatívne binomické rozdelenie

$$p_1p_2\frac{(r+x+y+1)(r+x+y)}{(x+1)(y+1)} - p_1\frac{r+x+y}{x+1} - p_2\frac{r+x+y}{y+1} + 1$$

sumácie (8):

$$\begin{aligned}
P_x^{(1)} &= c_1 \sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
P_x^{(2)} &= c_2 \sum_{j=x}^{\infty} P_j^{(1)}, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
&\vdots \\
P_x^{(n)} &= c_n \sum_{j=x}^{\infty} P_j^{(n-1)}, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{20}$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ sú normalizačné konštanty.

Pomocou vytvárajúcich funkcií autor ukazuje, že limitné rozdelenie

$$P_x^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} P_x^{(n)}, \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

takýchto opakovaných parciálnych sumácií existuje, ak existuje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_{x+1}^*}{P_x^*} = q$$

a $0 \leq q < 1$. Limitné rozdelenie je buď deterministické (pre $q = 0$), alebo geometrické s parametrom q (pre $0 < q < 1$).

Zovšeobecnením (20) sú opakované parciálne sumácie vychádzajúce z (2). Nech $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ je rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti definované na nezáporných celých číslach a

$$\begin{aligned}
P_x^{(1)} &= c_1 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
P_x^{(2)} &= c_2 \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(1)}, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
&\vdots \\
P_x^{(n)} &= c_n \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^{(n-1)}, \quad x = 0, 1, 2, ..., \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{21}$$

kde $\{P_x^{(1)}\}_{x=0}^{\infty}$, $\{P_x^{(2)}\}_{x=0}^{\infty}$, ..., $\{P_x^{(n)}\}_{x=0}^{\infty}$, ... sú rozdelenia pravdepodobnosti na nezáporných celých číslach, $g(j)$ je reálna funkcia a $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ sú normalizačné konštanty.

V [2] boli skúmané takto definované opakované parciálne sumácie s rodičom definovanom na konečnom nosiči. Využitím mocninovej metódy bola za určitých podmienok ukázaná konvergencia a bol nájdený limitný potomok $P_x^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} P_x^{(n)}, x = 0, 1, 2, ...$

V šiestej kapitole tejto práce rozširujeme tento výsledok pre dvojrozmerné opakované parciálne sumácie definované na konečnom nosiči.

Opakované dvojrozmerné parciálne sumácie získame zovšeobecnením jednorozmerného prístupu z jednorozmerného prípadu (pozri [11]). Majme rodičovské rozdelenie $\{P^*_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ a nejakú reálnu funkciu $g(x, y)$, $x, y = 0, 1, 2, ...$ Potom ak c_1 je normalizačná konštanta, tak potomka $\{P^{(1)}_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$ podľa (17) dostaneme vzťahom

$$P^{(1)}_{x,y} = c_1 \sum_{i=x}^{\infty}\sum_{j=y}^{\infty} g(i, j)P^*_{i,j}.$$

Potomka druhej generácie pri danej funkcii g získame, ak pristúpime k $P^{(1)}_{x,y}$ (potomkovi predchádzajúcej generácie) ako k rodičovi. Dostávame

$$P^{(2)}_{x,y} = c_2 \sum_{i=x}^{\infty}\sum_{j=y}^{\infty} g(i, j)P^{(1)}_{i,j},$$

kde c_2 je normalizačná konštanta. Potomka k-tej generácie získame analogicky sumáciou potomka $(k-1)$-vej generácie ako

$$P^{(k)}_{x,y} = c_k \sum_{i=x}^{\infty}\sum_{j=y}^{\infty} g(i, j)P^{(k-1)}_{i,j}.$$

Predmetom skúmania je, či limitný potomok, teda limita $\lim_{k\to\infty}\{P^{(k)}_{x,y}\}_{x,y=0}^{\infty}$, existuje a čomu sa rovná. V nasledujúcej časti oboznamujeme čitateľa s mocninovou metódou, ktorá veľmi prispela k výsledkom v tejto otázke pri rodičovských rozdeleniach definovaných na konečnom nosiči.

Pri jednorozmerných parciálnych sumáciách v práci [2] bolo ukázané, že parciálnu sumáciu takéhoto typu pri rodičovskom rozdelení s konečným nosičom vieme zapísať pomocou maticového zápisu. Štartovacím vektorom pri aplikácii mocninovej metódy bolo rodičovské rozdelenie pravdepodobnosti a prvky funkcie g boli vhodným spôsobom usporiadané do matice. Opakované parciálne sumácie potom vytvárali postupnosť rozdelení pravdepodobnosti, preto bolo možné využiť mocninovú metódu a ukázať konvergenciu k dominantnému vlastnému vektoru, pričom limitné rozdelenie pravdepodobnosti bolo násobkom práve tohto dominantného vlastného vektora.

Aby sme mohli uplatniť postup použitý pre jednorozmerné opakované parciálne sumácie definované na konečnom nosiči v [2] aj pre dvojrozmerné opakované parciálne sumácie, využijeme zobrazenie, ktoré prevedie maticu na stĺpcový vektor. Týmto krokom dostávame analogickú situáciu a obdobné výsledky.

Oscilujúce postupnosti rozdelení

V minulosti bola za určitých predpokladov ukázaná existencia limity opakovaných parciálnych sumácií (pozri [2], [4], [11]). Avšak nebol známy príklad, kedy by táto limita neexistovala. Posledná časť práce sa venuje príkladom z jednorozmerných aj dvojrozmerných parciálnych sumácií, kedy limita postupnosti rozdelení potomkov opakovanej parciálnej sumácie neexistuje. Výsledky z nej boli publikované v zborníku medzinárodnej konferencie EYSM [3].

Doteraz nebol zaznamenaný podobný príklad oscilácie postupnosti pravdepodobnosti, uvádzame s nosičom veľkosti dva. Nech je rodičovské rozdelenie dané

$$\begin{pmatrix} P_0^* \\ P_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^* \\ 1 - P_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

Funkcia $g(x)$ je daná $g(0) = -1$ a $g(1) = 1$. Potomok prvej generácie s takýmto rodičovským rozdelením a funkciou $g(x)$ bude

$$\begin{pmatrix} P_0^{(1)} \\ P_1^{(1)} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \dfrac{8}{10} \\ \dfrac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{17} \\ \dfrac{9}{17} \end{pmatrix}.$$

Potomok druhej generácie je

$$\begin{pmatrix} P_0^{(2)} \\ P_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{9}{10} \end{pmatrix},$$

ktorý je identický s pôvodným rodičovským rozdelením.

Takáto postupnosť potomkov určená parciálnou sumáciou $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ začínajúca rodičom $P_0^* = \frac{1}{10}$, $P_1^* = \frac{9}{10}$ osciluje s periódou $k = 2$.

Literatúra

[1] S. Kotz and N. Johnson. A Note on Renewal (Partial Sums) Distributions for Discrete Variables. *Statistics & Probability Letters*, 12:229–231, September 1991.

[2] M. Koščová, R. Harman, and J. Mačutek. Iterated partial summations applied to finite-support discrete distributions. *Mathematica Slovaca*, 70(2):489–496, 2020.

[3] L. Leššová. Oscillating sequences of partial-sums discrete probability distributions. In B. Milošević and M. Obradović, editors, *Proceedings from the 21st European Young Statisticians Meeting*, pages 41–45. Faculty of Mathematics, Belgrade, 2019.

[4] L. Leššová and J. Mačutek. On the limit behaviour of finite-support bivariate discrete probability distributions under iterated partial summations. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, to appear, 2020.

[5] S. Li, Y. Lu, and J. Garrido. A Review of Discrete-Time Risk Models. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 103(2):321–337, 2009.

[6] X. Lin and G. Willmot. Analysis of a Defective Renewal Equation Arising in Ruin Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25:63–84, 1999.

[7] J. Mačutek. Katz Partial Summations Family. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 22:143–148, 2001.

[8] J. Mačutek. Discrete Probability Distributions Generated by the Generalized STER Summation. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 16:1–6, 2002.

[9] J. Mačutek. On Two Types of Partial Summations. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 26:403–410, 2003.

[10] J. Mačutek. Discrete Distributions Connected by Partial Summations. *Glottometrics*, 11:51–55, 2005.

[11] J. Mačutek. A Limit Property of the Geometric Distribution. *Theory of Probability and Its Applications*, 50(2):316–319, 2006.

[12] N. Nair and N. Hitha. Characterization of Discrete Models by Distribution Based on Their Partial Sums. *Statistics & Probability Letters*, 8:335–337, 1989.

[13] N. Nair, P. Sankaran, and M. Preeth. Reliability Aspects of Discrete Equilibrium Distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 41:500–515, 2012.

[14] G. Wimmer and G. Altmann. On the Generalization of the STER Distribution Applied to Generalized Hypergeoemetric Parents. *Acta Universitatis Palackianae Olomoucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 39:215–247, 2000.

[15] G. Wimmer and G. Altmann. A New Type of Partial-Sums Distributions. *Statistics & Probability Letters*, 52:359–364, 2001.

[16] G. Wimmer and G. Altmann. Models of Rank - Frequency Distributions in Language and Music. In Wimmer, G., Altmann, G., and Köhler, R., editors. *Text as a Linguistic Paradigm: Levels, Constituents, Constructs*, pages 283–294, 2001.

[17] G. Wimmer and J. Kalas. A Characterization of the Geometric Distribution. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 17:325–329, 1999.

[18] G. Wimmer and J. Mačutek. New Integrated View at Partial - Sums Distributions. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 51:183–190, 2012.

[19] E. Xekalaki. A Property of the Yule Distribution and Its Applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 12/10:1181–1189, 1983.

Zoznam publikácií

1. Leššová L., Mačutek J. (2020): On the limit behaviour of finite-support bivariate discrete probability distributions under iterated partial summations, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, to appear.

2. Leššová L. (2019): Oscillating sequences of partial-sums discrete probability distributions, *Proceedings from the 21st European Young Statisticians Meeting*,Faculty of Mathematics, Belgrade, Milošević, B. and Obradović, M., pp. 41-45.

Účasť na konferenciách

- ODAM 2017 - Olomoucian Days of Applied Mathematics, Olomouc, Česká republika, 2017. Prednáška

- ROBUST 2018 - Rybník, Česká republika, 2018. Poster a prednáška

- ISCAMI 2018 - International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, Malenovice, Česká republika, 2018. Prednáška

- LinStat 2018 - The International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference, Będlewo, Poľská republika, 2018. Poster

- ODAM 2019 - Olomoucian Days of Applied Mathematics, Olomouc, Česká republika, 2019. Prednáška

- EYSM 2019 - The 21st European Young Statisticians Meeting, Belehrad, Srbsko, 2019. Prednáška

Granty

- Nové štatistické metódy pre špeciálne triedy rozdelení a ich aplikácie (spoluriešiteľ)
  Grant VEGA 2/0054/18
  Hlavný riešiteľ: prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.

- Opakované parciálne sumácie diskrétnych rozdelení pravdepodobnosti (hlavný riešiteľ)
  Grant UK/334/2019

- Diskrétne a spojité pravdepodobnostné modely a ich aplikácie (spoluriešiteľ)
  Grant VEGA 2/0047/15
  Hlavný riešiteľ: prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.
- Kvantitatívna analýza slabík v slovanských jazykoch (ruština, slovenčina, srbčina) (spoluriešiteľ)
  Grant APVV SK-SRB-2016-0021
  Hlavný riešiteľ: doc. Mgr. Ján Mačutek, PhD.