Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

RNDr. Veronika Lacková

Autoreferát dizertačnej práce

Vlastnosti koreflektívnych a reflektívnych tried v kategóriách topologických štruktúr

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia:
9.1.7 Geometria a topológia

Bratislava 2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK.

Predkladateľka: RNDr. Veronika Lacková
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4

Školiteľ: Doc. RNDr. Juraj Činčura, CSc.
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4

Oponenti: ....
....

....
....

....
....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o .... h pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie
....
v študijnom odbore 9.1.7. Geometria a topológia
na FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4.

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4

1 Úvod

Využívanie metód teórie kategórií v topológii viedlo v minulom storočí k vzniku novej disciplíny – kategoriálnej topológie. Okrem iného sem patrí skúmanie reflektívnych a koreflektívnych podkategórií v kategóriách topologických priestorov a spojitých zobrazení. Významný impulz pre výskum v tejto oblasti dala Herrlichova monografia *Topologische Reflexionen und Coreflexionen* [11]. Tejto problematike sú venované aj práce Herrlicha, Hušeka, Franklina, Streckera, Kannana a mnohých ďalších.

Pri skúmaní podkategórií kategórie **Top** všetkých topologických priestorov ide predovšetkým o skúmanie tried topologických priestorov určených nejakými topologickými vlastnosťami. Môžeme ich interpretovať ako plné podkategórie kategórie **Top**. Keďže takéto triedy obsahujú s každým priestorom aj všetky priestory s ním homeomorfné, sú plné podkategórie určené týmito triedami uzavreté vzhľadom na izomorfizmy. Preto v práci o všetkých podkategóriách predpokladáme, že sú plné a uzavreté vzhľadom na izomorfizmy. Aby sme vylúčili triviálne prípady predpokladáme, že každá kategória obsahuje neprázdny priestor.

2 Ciele dizertačnej práce

H. Herrlich a M. Hušek v ich práci *Some open categorical problems in Top* [15] navrhli okrem iného skúmanie uzavreto-dedičných koreflektívnych podkategórií kategórie **Haus** všetkých hausdorffovských topologických priestorov a spojitých zobrazení. Cieľom dizertačnej práce bolo prispieť k riešeniu tejto problematiky. Preto sa v dizertačnej práci venujeme najmä uzavreto-dedičným koreflektívnym a uzavreto-dedičným aditívnym divizibilným (skrátene AD) podkategóriám v kategóriách **Top**, **Haus** a ďalších netriviálnych epireflektívnych podkategóriách **A** kategórie **Top**. Platí, že podkategória **B** kategórie **A** je koreflektívna v **A** práve vtedy, keď je uzavretá vzhľadom na toplogické súčty a extrémne kvocienty z **A**. Vo faktor-reflektívnych podkategóriách kategórie **Top** extrémnym kvocientom zodpovedajú faktorové priestory, preto je v týchto podkategóriách pojem koreflektívnej podkategórie totožný s pojmom AD podkategórie. V epireflektívnych podkategóriách **A** kategórie **Top**, ktoré nie sú faktor-reflektívne platí, že každá koreflektívna podkategória kategórie **A** je aj AD podkategória, ale existujú AD podkategórie, ktoré nie sú koreflektívne. Preto je prirodzené venovať sa najprv skúmaniu uzavreto-dedičných (prípadne dedičných) AD podkategórií v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top**, a potom sa zamerať na štúdium rozdielov v štruktúre systému uzavreto-dedičných AD podkategórií a v štruktúre systému uzavreto-dedičných koreflektívnych podkategórií v epireflektívnych podkategóriách, ktoré nie sú faktor-reflektívne, najmä v kategórii tichonovovských priestorov a v kategórii nularozmerných priestorov.

Koreflektívne podkategórie v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top** sú úplné aj koúplné, zatiaľ čo AD podkategórie nemusia byť ani úplné, ani koúplné. Preto sú pre nás koreflektívne podkategórie zaujímavé a nestačí sa obmedziť na skúmanie AD podkategórií.

V dizertačnej práci sme skúmali vlastnosti uzavreto-dedičného AD, resp. koreflektívneho jadra a obalu podkategórií v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top**. Zaoberali sme sa štruktúrou systému uzavreto-dedičných koreflektívnych, resp. AD podkategórií v epireflektívnych podkategóriách **A** kategórie **Top**, pričom sme sa sústredili na otázku existencie a opis minimálnych prvkov nad kategóriou **Dis** všetkých diskrétnych priestorov. V prípade epireflektívnych podkategórií **A**, pre ktoré **ZD** $\subseteq$ **A** $\subseteq$ **Tych**, ktoré nie sú faktor-reflektívne, sme osobitne skúmali rozdiely medzi vlastnosťami uzavreto-dedičných koreflektívnych podkategórií a uzavreto-dedičných AD podkategórií.

3 Známe výsledky

Najskôr uvedieme definíciu reflektívnej a koreflektívnej podkategórie.

Definícia 3.1 *Podkategória* **A** *kategórie* **B** *sa nazýva reflektívna v* **B***, ak pre každé* $B \in \mathbf{B}$ *existuje* **A***-reflexia, čiže* **B***-morfizmus* $r_B : B \to A_B$*, kde* $A_B \in \mathbf{A}$ *a pre každý* **B***-morfizmus* $f : B \to A$ *existuje jediný* **A***-morfizmus* $\bar{f} : A_B \to A$*, pre ktorý platí* $f = \bar{f} \circ r_B$*.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "f"'] & A_B \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

V prípade, že každá **A**-reflexia je (extrémny) epimorfizmus hovoríme, že podkategória **A** je (extrémne) epireflektívna.

Pojem koreflektívnej podkategórie je duálny k pojmu reflektívnej podkategórie.

Definícia 3.2 *Podkategória* **A** *kategórie* **B** *sa nazýva koreflektívna v* **B***, ak pre každé* $B \in \mathbf{B}$ *existuje* **A***-koreflexia, čiže* **B***-morfizmus* $c_B : A_B \to B$*, kde* $A_B \in \mathbf{A}$ *a pre každý* **B***-morfizmus* $f : A \to B$ *existuje jediný* **A***-morfizmus* $\bar{f} : A \to A_B$*, pre ktorý* *platí* $f = c_B \circ \bar{f}$.

$$\begin{tikzcd} A_B \arrow[r, "c_B"] & B \\ A \arrow[u, "\bar{f}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

V prípade, že každá **A**-koreflexia je monomorfizmus (bimorfizmus), hovoríme, že podkategória **A** je monokoreflektívna (bikoreflektívna).

Nech **A** je epireflektívna podkategória kategórie **Top**. Podkategória **B** je koreflektívna v **A** práve vtedy, keď je uzavretá vzhľadom na kosúčiny a extrémne kvocienty. Ak **A** obsahuje priestor, ktorý nie je indiskrétny, tak obsahuje všetky diskrétne priestory a kosúčinom v **A** zodpovedajú topologické súčty. Takéto epireflektívne podkategórie nazývame netriviálne.

Je známe, že podkategória kategórie **Top** je epireflektívna práve vtedy, keď je uzavretá vzhľadom na topologické súčiny a podpriestory. Podkategória kategórie **Top** je koreflektívna práve vtedy, keď je uzavretá vzhľadom na topologické súčty a faktorové priestory. Ide teda o skúmanie kategórií topologických priestorov, ktoré sú uzavreté vzhľadom na na niektoré zo základných topologických konštrukcií. Je známe (pozri [17]), že neexistuje vlastná podkategória kategórie **Top**, ktorá by bola reflektívna aj koreflektívna. To znamená, že kategória **Top** nemá vlastné podkategórie, ktoré by boli uzavretá vzhľadom na všetky štyri spomínané konštrukcie.

V dizertačnej práci sa venujeme najmä (uzavreto-dedičným) koreflektívnym podkategóriám v kategórii **Top** všetkých topologických priestorov a spojitých zobrazení a (uzavreto-dedičným) koreflektívnym podkategóriám v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top**. Viaceré základné výsledky týkajúce sa uzavreto-dedičných a dedičných koreflektívnych podkategórií kategórie **Top** možno nájsť už v prácach V. Kannana, najmä v jeho dizertácii [16] a jeho monografii [18]. Sú to najmä tieto výsledky.

- Ak **A** je uzavreto-dedičná podkategória **Top**, tak jej koreflektívny obal v **Top** je uzavreto-dedičná koreflektívna podkategória.
- Ak **A** je koreflektívna podkategória **Top**, tak podkategória CS**A** (S**A**) pozostávajúca zo všetkých uzavretých podpriestorov (podpriestorov) priestorov z **A** je uzavreto-dedičná (dedičná) koreflektívna podkategória kategórie **Top**.
- Ak **A** je dedičná podkategória **Top**, ktorá s každým priestorom obsahuje aj všetky priestory s jemnejšou topológiou na danej množine, tak koreflektívny obal **A** v **Top** je dedičná koreflektívna podkategória.

V roku 1993 H. Herrlich a M. Hušek v ich článku *Some open categorical problems in Top* [15] navrhli skúmanie štruktúry dedičných koreflektívnych podkategórií kategórie **Top**, uzavreto-dedičných koreflektívnych podkategórií kategórie **Haus** všetkých hausdorffovských priestorov, skúmanie a opis dedičných, resp. uzavreto-dedičných koreflektívnych jadier a obalov a príbuzné problémy. Riešenie problematiky dedičných koreflektívnych podkategórií, resp. dedičných aditívnych a divizibilných (skrátene AD) podkategórií v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top** obsahujú práce [7], [8], [27], [28]. Spomeňme napríklad charakterizáciu dedičných koreflektívnych podkategórií v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top** pomocou prvotných faktorov. Ak X je topologický priestor a $a \in X$, tak prvotný faktor X_a priestoru X v bode a je priestor definovaný na tej istej množine ako X, pričom všetky body, okrem bodu a, sú v X_a izolované a okolia bodu a v X_a sú tie isté ako okolia a v X. Potom platí nasledujúca veta.

Veta [8] *Ak* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna podkategória kategórie* **Top**, *ktorá neobsahuje dvojprvkový indiskrétny priestor a* $\mathbf{B}$ *je koreflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{A}$, *tak* $\mathbf{B}$ *je dedičná práve vtedy, keď je uzavretá vzhľadom na vytváranie prvotných faktorov.*

Ďalšie výsledky sa týkajú generovania dedičných koreflektívnych podkategórií a konštrukcie generátorov dedičných koreflektívnych obalov. Konkrétne je tu dokázané, že každá dedičná koreflektívna podkategória v epireflektívnej podkategórii kategórie **Top** je koreflektívny obal nejakej kategórie prvotných priestorov. Tiež je tu dokázané, že koreflektívna podkategória nemusí mať dedičné koreflektívne jadro a sú tu uvedené viaceré výsledky týkajúce sa dedičných koreflektívnych jadier a obalov koreflektívnych podkategórií.

Zatiaľ je málo známe o uzavreto-dedičných koreflektívnych podkategóriách v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top**, o uzavreto-dedičných koreflektívnych jadrách a obaloch koreflektívnych podkategórií. Z Kannanovych výsledkov vyplýva. že každá koreflektívna podkategória kategórie **Top** má uzavreto-dedičné koreflektívne jadro a uzavreto-dedičný koreflektívny obal.

4 Prehľad výsledkov dizertačnej práce

Pre ľubovoľné regulárne kardinálne číslo α označme kategóriu všetkých P_α-priestorov ako $\mathbf{Top}(\alpha)$. V [9] je dokázané, že pre ľubovoľné regulárne kardinálne číslo sú podkategórie $\mathbf{Top}(\alpha) \cap$

Tych koreflektívne v **Tych** a $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{ZD}$ sú koreflektívne v **ZD**. Podobné tvrdenie platí aj pre kategóriu $\mathbf{Reg_1}$ všetkých regulárnych T_1-priestorov.

Veta 4.1 *Podkategórie* $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{Reg_1}$ *sú koreflektívne v kategórii* $\mathbf{Reg_1}$ *pre ľubovoľné regulárne kardinálne číslo* α.

Nech **A** je netriviálna epireflektívna podkategória kategórie **Top**. Priestor $X \in \mathbf{A}$ sa nazýva $s_{\mathbf{A}}$-priestor, ak pre každý priestor Y z **A** platí, že ak je zobrazenie $f : X \to Y$ sekvenciálne spojité, tak je spojité. Ak $\mathbf{A} = \mathbf{Tych}$, tak pojem $s_{\mathbf{Tych}}$-priestoru je totožný so známym pojmom $s_{\mathbb{R}}$-priestoru ([24]). Podobne, namiesto pojmu $s_{\mathbf{ZD}}$-priestor použijeme pojem $s_{D(2)}$-priestoru. Je zrejmé, že ak $\mathbf{ZD} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$ a $X \in \mathbf{A}$ je $s_{\mathbb{R}}$-priestor, tak je to aj $s_{\mathbf{A}}$-priestor. Kategóriu všetkých $s_{\mathbf{A}}$-priestorov z **A** budeme označovať $\mathbf{S_A}$.

Príklad 4.2 Nech $\mathbf{ZD} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$. Platí, že v kategórii **A** je podkategória $\mathbf{S_A}$ koreflektívny obal priestoru $S(\omega_0)$.

V práci sme sa zaoberali najmä uzavreto-dedičnými AD (resp. koreflektívnymi) podkategóriami. Podkategória **A** kategórie **B** sa nazýva uzavreto-dedičná, ak s každým priestorom obsahuje všetky jeho uzavreté podpriestory. Ukázali sme, že v každej netriviálnej epireflektívnej podkategórii kategórie **Top** existuje koreflektívna podkategória, ktorá nie je uzavreto-dedičná.

Veta 4.3 *Ak* **A** *je netriviálna epireflektívna podkategória kategórie* **Top**, *tak* $\mathbf{K}_{D(2)} \cap \mathbf{A}$ *je koreflektívna podkategória kategórie* **A**, *ktorá nie je uzavreto-dedičná.*

Nech **A** je epireflektívna podkategória kategórie **Top** a **B** je podkategória kategórie **A**. Uzavreto-dedičný AD obal **B** v **A** je vzhľadom na inklúziu najmenšia podkategória kategórie **A**, ktorá obsahuje **B** a je uzavreto-dedičná, aditívna a divizibilná v **A**. Uzavreto-dedičné AD jadro **B** v **A** je vzhľadom na inklúziu najväčšia podkategória kategórie **B**, ktorá je uzavreto-dedičná, aditívna a divizibilná v **A**. Analogicky môžeme definovať uzavreto-dedičný koreflektívny obal a jadro.

Nasledujúca veta charakterizuje uzavreto-dedičný AD obal podkategórií v epireflektívnych podkategóriách kategórie **Top**.

Veta 4.4 *Nech* **A** *je netriviálna epireflektívna podkategória kategórie* **Top** *a* **B** *je podkategória kategórie* **A**. *Potom podkategória* $\mathbf{C} = \{Y \in \mathbf{A}$: *existuje faktorové zobrazenie* $f : X \to Y$, *kde* X *je uzavretý podpriestor topologického súčtu priestorov z* $\mathbf{B}\}$ *je uzavreto-dedičný AD obal* **B** *v* **A**.

Pomocou tejto vety sme dokázali nasledujúce tvrdenie:

Veta 4.5 *Každý* T_1*-priestor (*T_0*-priestor, topologický priestor) je homeomorfný s uzavretým podpriestorom nejakého* T_1*-*$k_{\mathbb{R}}$*-priestoru (*T_0*-*$k_{\mathbb{R}}$*-priestoru,* $k_{\mathbb{R}}$*-priestoru).*

Pre faktor-reflektívne podkategórie kategórie **Top** dostaneme tento dôsledok:

Dôsledok 4.6 *Nech* **A** *je faktor-reflektívna podkategória kategórie* **Top** *a* **B** *je podkategória kategórie* **A**. *Potom podkategória* $\mathbf{C} = \{Y \in \mathbf{A}$: *existuje faktorové zobrazenie* $f : X \to Y$, *kde* X *je uzavretý podpriestor topologického súčtu priestorov z* $\mathbf{B}\}$ *je uzavreto-dedičný koreflektívny obal* **B** *v* **A**.

Nasledujúca veta popisuje konštrukciu uzavreto-dedičného koreflektívneho obalu v ľubovoľnej netriviálnej epireflektívnej podkategórii kategórie **Top**.

Veta 4.7 *Nech* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{Top}$ *a* $\mathbf{B}$ *je koreflektívna v* $\mathbf{A}$*. Nech* $\mathbf{B_1} = \mathbf{B}$*,* $\mathbf{B}_{\alpha+\mathbf{1}} = \mathrm{CH}_{\mathbf{A}}(\mathrm{CS}\mathbf{B}_\alpha)$ *a* $\mathbf{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{B}_\beta$ *ak* α *je limitný ordinál. Potom kategória* $\mathbf{B}^* = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbf{B}_\alpha$ *je uzavreto-dedičný koreflektívny obal* $\mathbf{B}$ *v* $\mathbf{A}$*.*

Pre uzavreto-dedičné AD jadro AD podkategórií v netriviálnych epireflektívnych podkategóriách kategórie $\mathbf{Top}$ platí nasledujúca veta.

Veta 4.8 *Nech* $\mathbf{A}$ *je netriviálna epireflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{Top}$ *a* $\mathbf{B}$ *je AD podkategória kategórie* $\mathbf{A}$*. Potom podkategória* $\mathbf{C} = \{X \in \mathbf{B} :$ *ak* Y *je uzavretý podpriestor priestoru* X*, tak* $Y \in \mathbf{B}\}$ *je uzavreto-dedičné AD jadro* $\mathbf{B}$ *v* $\mathbf{A}$*.*

Ak $\mathbf{B}$ nie je AD podkategória epireflektívnej podkategórie $\mathbf{A}$ kategórie $\mathbf{Top}$, tak nemusí mať uzavreto-dedičné AD jadro. Ak $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ sú uzavreto-dedičné AD podkategórie také, že $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ nie je uzavreto-dedičná AD podkategória, tak $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ nemá uzavreto-dedičné AD jadro. Môžeme zobrať napríklad $\mathbf{C} = \mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\alpha))$, $\mathbf{D} = \mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\beta))$, kde α a β sú rôzne regulárne kardinálne čísla.

Pre faktor-reflektívne podkategórie kategórie $\mathbf{Top}$ dostávame nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 4.9 *Nech* $\mathbf{A}$ *je faktor-reflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{Top}$ *a* $\mathbf{B}$ *je koreflektívna v* $\mathbf{A}$*. Potom podkategória* $\mathbf{C} = \{X \in \mathbf{B} :$ *ak* Y *je uzavretý podpriestor priestoru* X*, tak* $Y \in \mathbf{B}\}$ *je uzavreto-dedičné koreflektívne jadro* $\mathbf{B}$ *v* $\mathbf{A}$*.*

Tento dôsledok vo všeobecnosti neplatí, ak $\mathbf{A}$ je epireflektívna, ale nie je faktor-reflektívna, napríklad v prípade, že $\mathbf{A} = \mathbf{Tych}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{K}_{\mathbb{R}} \cap \mathbf{Tych}$, kde $\mathbf{K}_{\mathbb{R}}$ je kategória všetkých $k_{\mathbb{R}}$-priestorov.

V práci sme skúmali koreflektívne podkategórie v epireflektívnych podkategóriách $\mathbf{A}$ kategórie $\mathbf{Top}$, pre ktoré platí, že $\mathbf{ZD} \subseteq$

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$. Ukázali sme, že za určitých predpokladov je uzavreto-dedičný koreflektívny obal priestoru $S(\omega_0)$ v $\mathbf{A}$ kategória $\mathbf{A}$.

Veta 4.10 *Nech platí Martinova axióma,* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{Top}$*,* $\mathbf{ZD} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$ *a* $\mathbf{B}$ *je uzavreto-dedičná koreflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{A}$*, ktorá obsahuje* $S(\omega_0)$*. Potom* $\mathbf{B}$ *obsahuje všetky priestory z* $\mathbf{A}$ *s nemerateľnou kardinalitou.*

Ak teda platí Martinova axióma a predpokladáme, že každé kardinálne číslo je nemerateľné, tak uzavreto-dedičný koreflektívny obal priestoru $S(\omega_0)$ v $\mathbf{A}$ je kategória $\mathbf{A}$.

Pre koreflektívne podkategórie kategórie $\mathbf{A}$ platí nasledujúca veta:

Veta 4.11 *Nech* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{Top}$ *taká, že* $\mathbf{ZD} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$ *a* $\alpha \geq \omega_1$ *je regulárne kardinálne číslo. Potom* $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{A}$ *je dedičná koreflektívna podkategória kategórie* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{A} = \mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{ZD}$*.*

V dizertačnej práci sme sa zaoberali aj minimálnymi uzavreto-dedičnými AD (resp. koreflektívnymi) podkategóriami, ktoré obsahujú kategóriu $\mathbf{Dis}$ všetkých diskrétnych priestorov ako vlastnú podkategóriu. Takéto uzavreto-dedičné AD podkategórie nazývame netriviálne. Pre kategóriu $\mathbf{Top_1}$ všetkých T_1-priestorov platí:

Veta 4.12 *V kategórii* $\mathbf{Top_1}$ *neexistujú minimálne netriviálne uzavreto-dedičné koreflektívne podkategórie.*

Pre epireflektívne podkategórie $\mathbf{A}$ kategórie $\mathbf{Top}$, pre ktoré $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Haus}$ platí:

Veta 4.13 *Nech* $\mathbf{A}$ *je netriviálna epireflektívna podkategória kategórie* **Top** *taká, že* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Haus}$ *a* $\mathbf{B}$ *je uzavreto-dedičná AD podkategória kategórie* $\mathbf{A}$*, ktorá obsahuje pseudoradiálny priestor, ktorý nie je diskrétny. Potom existuje regulárne kardinálne číslo* α *také, že* $\mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\alpha)) \subseteq \mathbf{B}$.

Z tejto vety vyplýva, že podkategórie $\mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\alpha))$ sú minimálne netriviálne uzavreto-dedičné AD podkategórie v kategórii $\mathbf{A}$. Nevieme ale, či systém podkategórií $\mathcal{S} = \{\mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\alpha)),\ \alpha$ je regulárne kardinálne číslo$\}$ obsahuje všetky minimálne netriviálne uzavreto-dedičné AD podkategórie v kategórii $\mathbf{A}$. V prípade, že $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{TD} \cap \mathbf{Haus}$, kde **TD** je kategória všetkých totálne nesúvislých priestorov, platí táto veta:

Veta 4.14 *Nech* $\mathbf{A}$ *je epireflektívna podkategória kategórie* **Top** *taká, že* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{TD} \cap \mathbf{Haus}$ *a* $\mathbf{B} \neq \mathbf{Dis}$ *je AD podkategória kategórie* $\mathbf{A}$*. Potom existuje regulárne kardinálne číslo* α *také, že* $\mathbf{B}$ *obsahuje kategóriu* $\mathrm{AD}_{\mathbf{A}}(S(\alpha))$.

V tomto prípade systém $\mathcal{S}$ obsahuje všetky minimálne netriviálne uzavreto-dedičné AD podkategórie v $\mathbf{A}$. Príkladmi epireflektívnych podkategórií $\mathbf{A}$ kategórie **Top**, pre ktoré $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{TD} \cap \mathbf{Haus}$ sú kategórie **TS** (kategória všetkých totálne separovaných priestorov), **ZD** a $\mathbf{TD} \cap \mathbf{Haus}$.

5 Summary

In the thesis we deal mainly with closed hereditary additive and divisible (AD) and closed hereditary coreflective subcategories in nontrivial epireflective subcategories of **Top**. It is known that if $\mathbf{A}$ is a nontrivial epireflective subcategory of **Top** then a subcategory of $\mathbf{A}$ is coreflective in $\mathbf{A}$ if and only if it is closed under

extremal quotient objects and topological sums. Moreover, extremal quotient objects in quotient reflective subcategories of **Top** are quotient spaces. This means that in quotient reflective subcategories of **Top** the notion of a coreflective subcategory is equivalent to the notion of an AD subcategory. In epireflective subcategories that are not quotient reflective every coreflective subcategory is also an AD subcategory, but there are AD subcategories that are not coreflective. First we study closed hereditary additive and divisible subcategories of nontrivial epireflective subcategories **A** of **Top**. Then we investigate the differences between the structure of closed hereditary AD subcategories of **A** and the structure of closed hereditary coreflective subcategories of **A**.

We characterize the closed hereditary AD hull of subcategories in nontrivial epireflective subcategories of **Top** and the closed hereditary AD kernel of AD subcategories. We show that every subcategory of an epireflective subcategory of **Top** has a closed hereditary coreflective hull. However, there are subcategories that do not have a closed hereditary AD kernel.

We investigate closed hereditary coreflective subcategories in epireflective subcategories **A** of **Top** such that $\mathbf{ZD} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Tych}$. We prove that the subcategories $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{A}$ where $\alpha \geq \omega_1$ is a regular cardinal number are hereditary coreflective subcategories of **A** and $\mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{A} = \mathbf{Top}(\alpha) \cap \mathbf{ZD}$. We show that under some set-theoretical assumptions the closed hereditary coreflective hull of the space $S(\omega_0)$ in **A** is the whole category **A**.

We also study minimal closed hereditary AD subcategories above the category of all discrete spaces in nontrivial epireflective subcategories **A** of **Top**. We show that in the category $\mathbf{Top_1}$

there are no such minimal subcategories. We present some results for the case that $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Haus}$.

6 Zoznam publikovaných prác

[L] V. Lacková. *Closed hereditary additive and divisible subcategories in epireflective subcategories of Top*, Acta Math. Univ. Comenianae **83**(1) (2014), 135–146.

Literatúra

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories*,
`http://katmat.math.uni-bremen.de/acc`

[2] A. V. Arkhangeľskii, V. I. Ponomarev. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

[3] B. Balcar, M. Hušek. *Sequential continuity and submeasurable cardinals*, Topolgy and its Applications **111** (2001), 49–58.

[4] L. Bukovský. *Štruktúra reálnej osi*, VEDA, Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1979.

[5] D. V. Choodnovsky. *Sequentially continuous mappings and realvalued measurable cardinals*, in: Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **10**I (1975) 275–288.

[6] D. V. Choodnovsky. *Sequentially continuous mappings of product spaces*, Semin. Geom. des Espaces de Banach, Ec.

polytech., Cent. Math., 1977-1978, Expose No.**4** (1978) 1–15.

[7] J. Činčura. *Heredity and coreflective subcategories of the category of topological spaces*, Appl. Categ. Structures **9** (2001), 131–138.

[8] J. Činčura. *Hereditary coreflective subcategories of categories of topological spaces*, Appl. Categ. Structures **13** (2005), 329–342.

[9] J. Činčura. *Hereditary Coreflective Subcategories of the Categories of Tychonoff and Zero-Dimensional Spaces*, Appl. Categ. Structures **21** (2013), 671–679.

[10] R. Engelking. *General topology, revised and completed edition*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[11] H. Herrlich. *Topologische Reflexionen und Coreflexionen*, Springer, Berlin, 1968.

[12] H. Herrlich, G. Strecker. *Coreflective subcategories*, Trans. Amer. Math. Soc. **157** (1971), 205–226.

[13] H. Herrlich, G. Strecker. *Categorical topology – its origins, as exemplified by the unfolding of the theory of topological reflections and coreflections before 1971*, Handbook of the History of General Topology **1** (1997), 255–341.

[14] H. Herrlich, G. Strecker. *Category Theory: An Introduction*, Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[15] H. Herrlich, M. Hušek. *Some open categorical problems in Top*, Appl. Categ. Structures **1** (1993), 1–19.

[16] V. Kannan. *Coreflexive subcategories in topology*, Dizertačná práca, Madurai University, 1970.

[17] V. Kannan. *Reflexive cum Coreflexive Subcategories in Topology*, Math. Ann. **195** (1972), 168–174.

[18] V. Kannan. *Ordinal invariants in topology*, Mem. Amer. Math. Soc. **245** (1981).

[19] J. F. Kennison. *Reflective functors in general topology and elsewhere*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 303–315.

[20] J. F. Kennison. *A note on reflection maps*, Illinois J. Math **11** (1967), 404–409.

[21] V. Lacková. *Vlastnosti kategórií topologických priestorov*, Rigorózna práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2012.

[22] V. Lacková. *Closed hereditary additive and divisible subcategories in epireflective subcategories of Top*, Acta Math. Univ. Comenianae **83**(1) (2014), 135–146.

[23] N. Noble. *Countably compact and pseudocompact products*, Czechoslovak Mathematical Journal **19**(3) (1969), 390–397.

[24] N. Noble. *The continuity of functions on cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 187–198.

[25] G. Preuss. *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1988.

[26] J. Schröder. *The category of Urysohn spaces is not cowellpowered*, Topolgy and its Applications **16** (1983), 237–241.

[27] M. Sleziak. *Heredity, hereditary coreflective hulls and other properties of coreflective subcategories of categories of topological spaces*, Dizertačná práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2006.

[28] M. Sleziak. *Hereditary, additive and divisible classes in epireflective subcategories of Top*, Appl. Categ. Structures **16** (2008), 451–478.