Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

RNDr. Tomáš Kulich

Autoreferát dizertačnej práce

Random Cubical Graphs and Random Systems on Graphs

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.2.1. informatika

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ:	RNDr. Tomáš Kulich Katedra informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského Mlynská dolina 842 48 Bratislava
Školiteľ:	doc. RNDr. Eduard Toman, CSc. Katedra informatiky FMFI UK Bratislava
Oponenti:	

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa

v študijnom odbore 9.2.1. informatika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, miestnosť

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod a súčasný stav problematiky

Model náhodného grafu definovali Erdős a Rényi už v roku 1959. Pomerne rýchlo na to sa pravdepodobnostná kombinatorika stala dynamickou a prudko sa rozvíjajúcou matematickou disciplínou. Množstvo štúdií vychádzajúc z Erdős-Rényiho $\mathcal{G}(n, p)$ náhodného grafu dokázalo o takýchto grafoch množstvo netriviálnych výsledkov. Našli sa prahové funkcie pre rôzne vlastnosti, detailne sa preskúmala evolúcia náhodných grafov, to znamená, vývoj grafu s postupne sa meniacou pravdepodobnosťou p. Definovalo sa niekoľko nových modelov, ako napríklad náhodný graf náhodne vybratý spomedzi všetkých takých, ktoré majú presne n vrcholov a m hrán, náhodné regulárne grafy, či (pomerne nedávno definované) priesečníkové náhodné grafy. Erdős vynašiel tiež spôsob, ako použiť takzvanú pravdepodobnostnú metódu na získanie "nepravdepodobnostného" výsledku. Myšlienka je jednoduchá - namiesto konštrukcie objektu s danými vlastnosťami ukážeme, že takýto objekt s nenulovou pravdepodobnosťou vznikne nejakým (dobre definovaným) náhodným procesom. Takýto prístup sa dá použiť na prekvapivo veľkú sadu problémov - napríklad pre Ramseyho čísla sa takto dajú dostať asymptoticky najlepšie dolné odhady. Pravdepodobnostná metóda sa úspešne uplatňuje aj na problémy ktoré nie sú grafovo motivované. Napríklad hľadanie "sum-free sets" alebo odhadovanie van der Waerdenových čísel sú problémy, ktoré presahujú hranicu teórie grafov.

V súčasnosti sa do záberu pravdepodobnostnej kombinatoriky dostávajú okrem už pomerne vyčerpávajúco preskúmaných náhodných grafov aj iné náhodné systémy. Napríklad, skúmajú sa náhodné Booleovské funkcie, algoritmy s náhodnými vstupmi, analyzuje sa správanie agentov v sieťach. V práci prezentujeme náš prínos k trom subproblematikám pravdepodobnostnej kombinatoriky. V nasledujúcich sekciách stručne predstavíme každú z nich, prezentujeme známe výsledky a bez dôkazu ukážeme, v čom spočíva prínos našej práce.

2 Nahodné hyperkocky

Model s ktorým pracujeme je nasledovný: Ako podkladový graf vezmeme hyperkocku s dimenziou n. Z nej odstránime niektoré vrcholy a to tak, aby pravdepodobnosť, že ľubovoľný vrchol sa bude nachádzať vo výslednom grafe bola nezávislá na ostatných vrcholoch a rovná p_v. Ďalej, spomedzi všetkých hrán ktoré sa nachádzajú v podgrafe indukovanom vybratými vrcholmi vyberieme každú (opäť, nezávisle na ostatných) s pravdepodobnosťou p_e. Množina vybratých vrcholov spolu s vybratými hranami tvoria graf, ktorý nazveme *náhodná hyperkocka*. Súčin $p_e \cdot p_v$ sa zvykne označovať p a výraz $\lfloor -1/\lg(1-p) \rfloor$ ako m_p. Z takto popísaného modelu je možné odvodiť niekoľko ďalších tým, že položíme $p_v = 1$ alebo $p_e = 1$.

Náhodné hyperkocky sa začali študovať okolo roku 1960. V centre pozornosti bol vtedy vyššie popísaný model pri obmedzeniach $p_e = 1$, $p_v = 1/2$. Model $p_v \neq 1/2$ bol prvý krát analyzovaný Tomanom [7]. Tento model patrí aj v súčasnosti medzi najlepšie preskúmaný, dobre preskúmaná je napríklad evolúcia takéhoto grafu [18].

Pre všeobecný prípad p_v, p_e existuje menej známych výsledkov, dokonca nie je celkom jasné, ani ako vyzerá evolúcia takýchto grafov (problémy robia isté intervaly p). Sumarizujeme niektoré známe výsledky: podobne ako pri náhodných grafoch z $\mathcal{G}(n, p)$, pri zväčšujúcom sa p postupne vzniká jeden veľký komponent, ktorý postupne absorbuje všetky ostatné. Pri konštantnej pravdepodobnosti p existujú v grafe (okrem hlavného komponentu) komponenty všetkých veľkostí z intervalu $1, 2, \ldots m_p$. Keď p prekročí $1/2$, graf sa stane súvislým. Z hľadiska našej práce sú zaujímavé výsledky Kostochku, Sapozhenka a Webera [1], ktoré hovoria o veľkosti priemeru (Diam(.)) a polomeru (Rad(.)) hlavného komponentu grafu. Tieto veličiny skoro určite spĺňajú nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} n + m_p \leq & \quad \mathrm{Diam}(G_n) & \leq n + m_p + 8, \\ n - 2 \leq & \quad \mathrm{Rad}(G_n) & \leq n \end{aligned}$$

Druhý z odhadov je tesný, polomer grafu skutočne nadobúda 3 možné hodnoty. Naopak, odhad pre priemer grafu sa dá zlepšiť. V práci ukážeme náš výsledok, podľa ktorého skoro určite platí:

$$\mathrm{Diam}(G_n) = n + m_p.$$

Z náhodnej hyperkocky (najčastejšie sa uvažuje prípad $p_e = 1$) je navyše možné odvodiť ďalší náhodný graf - takzvaný *intervalový graf* indukovaný náhodnou hyperkockou. Vrcholmi takéhoto grafu sú podkocky nachádzajúce sa v náhodnej hyperkocke, pričom dva vrcholy spojíme hranou práve vtedy, ak sa im odpovedajúce hyperkocky pretínajú. V práci sa venujeme aj takémuto grafu. Výsledky o jeho geometrických vlastnostiach (pre prípad $p_v = 1/2$) pochádzajú z [8]:

$$\mathrm{Diam}(G_n^{\mathrm{IG}}), \mathrm{Diam}(G_n^{\mathrm{IG}}) \sim n/\lg\lg(n),$$

kde IG v hornom indexe značí, že pracujeme s intervalovým grafom. V práci sa venujeme zlepšeniu tohto odhadu. Jednak pracujeme so všeobecným (konštantným) p_v, a navyše pomocou Jansonových nerovností vieme dosiahnuť väčšiu presnosť. Náš výsledok pre priemer a polomer vyzerá nasledovne:

$$\frac{n}{h(n)}\left(1 + \frac{c_L}{h(n)}\right) \leq \mathrm{Diam}(G_n^{\mathrm{IG}}), \mathrm{Rad}(G_n^{\mathrm{IG}}) \leq \frac{n}{h(n)}\left(1 + \frac{c_U}{h(n)}\right),$$

kde $h = h(n) = \lg\log_b(n) + \lg\lg\log_b(n)$ a c_L, c_U sú konštanty.

3 Nestlačiteľnosť a Lokálna Lovászova Lemma

Je známe, že argumenty o nestlačiteľnosti často vedú k podobným výsledkom, ako napríklad prvá momentová veta [20, 22]. Myšlienku ilustrujeme na príklade získania spodného odhadu pre *van der Waerdenove čísla*.

Van der Waerdenovo číslo $w(k;c)$ je najmenšie také celé číslo, pre ktoré každé slovo dĺžky $n = w(k;c)$ vytvorené nad abecedou c (alternatívne hovoríme aj o c farbách) obsahuje v sebe *monochromatickú aritmetickú postupnosť* dĺžky k. Aritmetická postupnosť $a, a+l, \ldots, a+(k-1)l$ je vzhľadom na slovo s monochromatická, ak znaky na jeho a-tom, $(a+l)$-tom, ..., $(a+(k-1)l)$-tom mieste sú rovnaké.) Vieme, že pre náhodné slová neexistuje efektívny kompresný algoritmus, to znamená, neexistuje injektívne zobrazenie zo slov dĺžky N do slov menšej dĺžky. Toto vieme využiť nasledovne: vezmime hocijaké slovo o dĺžke n. V tomto slove sa určite nachádza monochromatická aritmetická postupnosť dĺžky k. Aritmetických postupností dĺžky k v tomto slove je najviac $\lfloor n^2/k \rfloor$, to znamená, že na zapamätanie si pozície jednej z nich potrebujeme najviac $\log_c(n^2/k) + o(1)$ znakov (môžeme uvažovať mnohokrát opakovaný proces, kedy všetky horné a dolné celé časti prestávajú hrať rolu). Ďalej, na zakódovanie farby postupnosti potrebujeme 1 znak. Túto postupnosť teraz zo slova vymažeme čím sa slovo skráti o k znakov. Tento zvyšok si vieme zapamätať triviálne pomocou $n-k$ znakov. Celé slovo by sme teda vedeli kódovať pomocou:

$$\log_c(n^2/k) + o(1) + 1 + n - k$$

znakov, čo však kvôli argumentom o nestlačiteľnosti musí byť aspoň n. Jednoduchým výpočtom dostávame:

$$w(k;c) = n \geq (1 - o(1))\sqrt{k}c^{k/2-1}.$$

Tento výsledok je podobný výsledku, ktorý by sme dostali keby sme použili prvú momentovú vetu. Lokálna Lovászova Lemma však dáva výsledok ešte výrazne lepší:

$$w(k;c) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}\frac{k-1}{k}.$$

Pascal Swcheitzer v práci [19] našiel spôsob ako podobný výsledok dostať pomocou argumentov o nestlačiteľnosti. Jeho výsledok je v tvare:

$$w(k;c) \geq \frac{c^{k-1}}{4k}\frac{k-1}{k},$$

čo je o faktor $4/e$ horšie ako výsledok ktorý dáva Lokálna Lovászova Lemma. Myšlienka jeho dôkazu je nasledovná: na zapamätanie si jednej aritmetickej postupnosti (ako bolo diskutované vyššie) potrebujeme $\lg(n^2/k)$ bitov. Na zapamätanie si druhej aritmetickej postupnosti o ktorej vieme, že pretína prvú postupnosťm potrebujeme však už len $\lg(nk^2/(k-1)$ bitov, čo je výrazne menej. Táto myšlienka sa dá použiť na opakované hľadanie monochromatických postupností, ich následné mazanie a nahrádzanie novými znakmi.

V našej práci prezentujeme modifikáciu tohto algoritmu. Algoritmus síce operuje s dopredu neznámymi spôsobmi kódovania objektov, z úvah o entropii však vyplynie, že patričné kódovania sa dajú zvoliť tak, aby z nestlačiteľnosti slov pomocou nášho (vylepšeného algoritmu) vyplýval výsledok

$$w(k;c) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}\frac{k-1}{k},$$

čo je výsledok totožný s výsledkom Lokálnej Lovászovej Lemmy.

4 Systémy s pravidlami voľby väčšiny

Uvažujme graf G, ktorého vrcholy sú na začiatku nejako ofarbené čiernou a bielou farbou. Na takomto grafe môžme uvažovať nasledovný synchrónny prefarbovací proces: každý vrchol v každom čase zmení svoju farbu na farbu ktorá je majoritne zastúpená medzi jeho susedmi. Takýto systém budeme volať *systém s pravidlom voľby väčšiny* (majority-based system). Podľa toho, či vyžadujeme, aby na zmenu farby vrchola bola potrebná aspoň polovica susedov opačnej farby rozlišujeme medzi rôznymi scenármi (simple majority, strong majority a niekoľko ďalších). Systém voláme *ireverzibilný*, ak v ňom čierny vrchol ostáva navždy čierny (neprefarbuje sa teda za žiadnych okolností).

Metóda voľby väčšiny sa bežne používa na riešenie problémov súvisiacich s udržovaním konzistencie medzi rôznymi časťami distribuovaného výpočtu. Pre väčšiu konkrétnosť uveďme príklad udržovania konzistencie dát, ktoré sú menené rôznymi výpočtovými jednotkami, či riešenie nekonzistencií v databázach. Za iným účelom boli tieto systémy tiež úspešne použité na skúmanie plasticity a presnosti imunologickej reakcie [40].

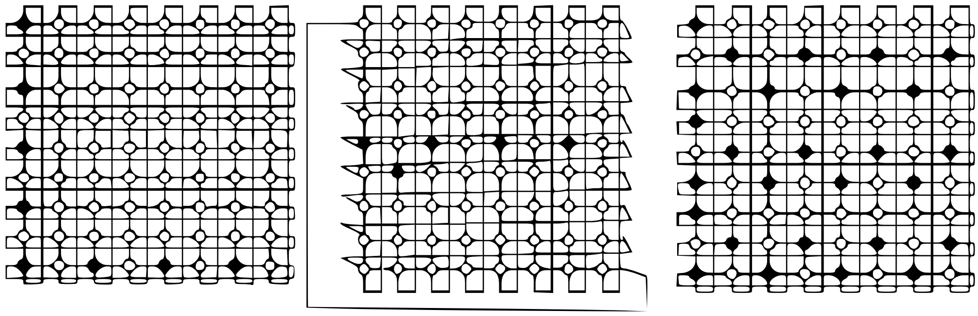
Známe výsledky sa týkajú väčšinou konkrétnych tried grafov. Základnou otázkou o týchto systémoch, ktorú si vedci kladú je nájdenie takzvaného *optimálneho dynama*. *Dynamom* nazveme takú počiatočnú konfiguráciu čiernych vrcholov, ktorá vedie k monochromatickému čiernemu grafu; dynamo nazveme *optimálne*, ak obsahuje minimálny možný počet čiernych vrcholov. Známe výsledky pre mohutnosť minimálnych dynám na rôznych typoch mriežok na toruse ukazuje tabuľka (*toroidal mesh* je mriežka na toruse, teda posledný vrchol radu/stĺpca je napojený na prvý vrchol radu/stĺpca; *torus cordalis* je mriežka, ktorej posledný vrchol radu je napojený na prvý vrchol nasledujúceho radu, avšak posledný vrchol stĺpca je napojený opäť na prvý vrchol stĺpca; *torus serpentinus* je mriežka, ktorej posledný vrchol vo rade/stĺpci je napojený na nasledovný vrchol v rade/stĺpci).

	Simple majority		Strong majority	
	Lower b.	Upper b.	Lower b.	Upper b.
Toroidal mesh	$\lceil \frac{a+b}{2} \rceil - 1$	$\lceil \frac{a+b}{2} \rceil - 1$	$\lceil \frac{ab+1}{3} \rceil$	$\min\{\lceil \frac{a}{3} \rceil (b+1), \lceil \frac{b}{3} \rceil (a+1)\}$
Torus cordalis	$\lceil \frac{b}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 1$	$\lceil \frac{ab+1}{3} \rceil$	$\lceil \frac{a}{3} \rceil (b+1)$
Torus serpentinus	$\lceil \frac{\min\{a,b\}}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{\min\{a,b\}}{2} \rfloor + 1$	$\lceil \frac{ab+1}{3} \rceil$	$\min\{\lceil \frac{a}{3} \rceil (b+1), \lceil \frac{b}{3} \rceil (a+1)\}$

Obrázok 1 ukazuje optimálne ireverzibilné dynamá pre rôzne druhy mriežok na toruse a rôzne scenáriá.

Popri mohutnosti je ďalším dôležitým parametrom dynama čas, za ktorý sa kontaminácia rozšíri. Tento čas bol po prvý krát analyzovaný v literatúre v prácach [27, 28]. Nazvime *t-time dynamo* také dynamo, ktoré vedie k monochromatickému čiernemu grafu v čase zhora ohraničenom hodnotou t. Jeden z výsledkov [45] ukazuje, že v regulárnom grafe s n vrcholmi je veľkosť minimálneho t-time ireverzibilného dynama aspoň $\lceil \frac{n}{2t+1} \rceil$. Tento odhad je tesný pre mriežky na toruse, prstence či wrapped butterflies. Niektoré ďalšie odhady ukazuje tabuľka.

	Lower bound	Upper bound
d-regular	$\lceil \frac{n}{2t+1} \rceil$	?
Ring, Tori	$\lceil \frac{n}{2t+1} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2t+1} \rceil$
Cube Connected Cycle (for $t > 5$)	$\lceil \frac{n}{8} \rceil$	$\lceil \frac{n}{4}(1 + \frac{3}{4(t-2)} \rceil$
Hypercube ($n = 2^d$)	$\lceil \frac{n}{2t+1} \rceil$	$\lceil \frac{n}{t+1} \rceil - \lceil \frac{n}{\sqrt{\pi d/8}} \rceil$



Obr. 1: Vľavo: simple majority, toroidal mesh. Stred: simple majority, torus cordalis. Vpravo: Strong majority, toroidal mesh.

V našej práci ukážeme niekoľko zaujímavých výsledkov týkajúcich sa náhodných počiatočných konfigurácií takýchto systémov. Za týmto účelom definujeme c^p ako náhodné počiatočné ofarbenie, ktoré každý vrchol zafarbí čiernou farbou s pravdepodobnosťou p, nezávisle na zafarbení ostatných vrcholoch. Zaujímať sa budeme o asymptotické výsledky, to znamená, aké musí byť p (ako funkcia n) na to, aby náhodné počiatočné ofarbenie c^p s pravdepodobnosťou limitne blízkou jednej aby toto farbenie tvorilo/netvorilo dynamo.

Zaujímať sa ďalej budeme o prípady, ktorých výsledky sú netriviálne a ktoré sú v literatúre najviac študované. Volíme preto ireverzibilný systém; ako podkladový graf slúži jednak klasická mriežka na toruse (je ľahko nahliadnuť, že výsledky pre zvyšné dva typy mriežok sú asymptoticky totožné) a náhodný 4-regulárny graf. Výsledky sú zhrnuté v nasledovných vetách, vo všetkých prípadoch rozoberáme ireverzibilný prípad a simple majority scenario:

Veta 1. *Nech G je mriežka na toruse o rozmere $n \times n$. Potom, ak $p \leq 0.012/\ln(n)$, náhodné počiatočné ofarbenie c^p s vysokou pravdepodobnosťou netvorí dynamo na grafe G.*

Veta 2. *Nech G je mriežka na toruse o rozmere $n \times n$. Potom, ak $p \geq 1.65/\ln(n)$, náhodné počiatočné ofarbenie c^p s vysokou pravdepodobnosťou tvorí dynamo na grafe G.*

Veta 3. *Nech G je náhodný 4-regulárny graf a nech $p \geq 0.12$. Potom c^p s vysokou pravdepodobnosťou tvorí dynamo na grafe G.*

Veta 4. *Nech G je náhodný 4-regulárny graf a nech $p \leq 0.10$. Potom c^p s vysokou pravdepodobnosťou netvorí dynamo na grafe G.*

Na záver, prezentujeme ešte jeden výsledok, ktorý, napriek tomu že sa dosahuje pravdepodobnostnou metódou nemá pravdepodobnostný charakter. Opäť uvažujeme ireverzibilný prípad a simple majority scenario:

Veta 5. *Každý 4-regulárny graf obsahuje dynamo o veľkosti najviac $0.44|V|$,*

čo predstavuje zlepšenie oproti známemu výsledku $0.5|V|$.

5 Zoznam použitej literatúry

[1] A. V. Kostochka, A. A. Sapozhenko, K. Weber, *Radius and diameter of random subgraph of the hypercube*, Random Struct. Algorithms 4, 215-229, 1993.

[2] M. E. Dyer, A. M. Frieze, L. R. Foulds, *On the strength of connectivity of random subgraphs of the n-cube*, Annuals of Discrete Math. 33 17-40, 1987.

[3] U. Konieczna, K. Weber, *Graph theoretic parameters on random subgraoh of the n-cube*, Dresder Reihe zur Forschung no. 9, 25-29, 1988.

[4] K. Weber, *On the evolution of random graphs in the n-cube*, Teubner-Texte zur Mathematik, vol. 73, Leipzig, pp. 203-206, 1985.

[5] K. Weber, *On components of random graphs in the n-cube*, Elektron. Inf. verarb. Kybern. EIK 22 no. 12, 601-613, 1986.

[6] A. V. Kostochka, A. A. Sapozhenko, K. Weber, *On Random Cubical Graphs*, Fourth Czechoslovakian symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity, J. Nešetřil and M. Fiedler, Eds. Elsevier Science Publishers.

[7] E. Toman, *Geometric structure of random boolean functions*, Problemy Kibernetiki, Vol. 35, Nauka, Moscow pp. 111-132, 1979 (in Russian).

[8] A. A. Sapozhenko, *Geometric structure of almost all Boolean functions*, Problemy kibernetiki, Vol. 30, Nauka, Moscow pp. 227-261, 1975 (in Russian).

[9] E. Toman, *Average degree in the interval graph of a random Boolean function*, Computers and Artificial Inteligence, Vol. 12, No. 2, pp. 123-133, 1993.

[10] M. Škoviera, *On the minimization of random boolean function I*, Computers and Artifical Inteligence, Vol. 5, No. 4, pp. 321-334, 1986.

[11] M. Škoviera, *On the minimization of random boolean function II*, Computers and Artifical Inteligence, Vol. 5, No. 6, pp. 493-509, 1986.

[12] V. V. Glagolev, *Some Estimations for Disjunctive Normal Forms of Boolean Functions*, Problemy Kibernetiki, Vol. 19, Nauka, Moscow, pp. 75-94, 1976 (in Russian).

[13] K. Weber, *Subcube Coverings of Random Graphs in the n-Cube*, Anals of Discrete Math., Vol. 28, pp. 319-256, 1985.

[14] S. Janson, *Poisson approximation for large deviations*, Random Struct. Algor., 1 pp. 221-230, 1990.

[15] S. Janson, T. Łuczak , A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley, New York, 2000.

[16] E. Toman, M. Stanek M, *Analysis of greedy algorithm for vertex covering of random graph by cubes*, Computing and Informatics, Vol. 25, 393-404, 2006.

[17] A. A. Sapozhenko, *On D.N.F. complexity obtained by help of greedy algorithm*, Diskretny analiz, Vol. 21, pp. 62-72, 1972 (in Russian).

[18] P. Erdős, J. Spencer, *Evolution of the n-Cube*, Comput. Math. Appl., Vol. 5, pp 33-39, 1979.

[19] P. Schweitzer, *Using the incompressibility method to obtain local lemma results for Ramsey-type problems*, Inform. Process. Lett. 109, 229-232, 2009.

[20] M. Li, P. Vitányi, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, 2nd ed., Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1997.

[21] Z. Szabó, *An application of Lovász's local lemma — a new lower bound for the van der Waerden number*, Random Struct. Algorithms 1 (3) 343–360, 1990.

[22] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley, New York, 1992.

[23] R. Moser, *A constructive proof of the Lovasz Local Lemma*, Proceedings of the 41st ACM Symposium on Theory of Computing, 2009.

[24] Y. Hassin and D. Peleg, *Distributed Probabilistic Pooling an Applications to Proportionate Agreement*, Information & Computation 171 248-268, 2001.

[25] M. Raynal, *Algorithms for mutual exclusion*, MIT press, 1986.

[26] N. Santoro, *Design and Analysis of Distributed Algorithms*, Wiley, New York, 2007.

[27] P. Flocchini, F. Geurts, N. Santoro, *Optimal irreversible dynamos in chordal rings*, Discrete Applied Mathematics 113:23-42, 2001.

[28] P. Flocchini, E. Lodi, F. Luccio, L. Pagli, N. Santoro, *Dynamic monopolies in tori*, Discrete applied Mathematics 137(2): 197-212, 2004.

[29] P. Flocchini, R. Kralovic, P. Ruzicka, A. Roncato, N. Santoro *On time versus size for monotone dynamic monopolies in regular topologies*, J. Discrete Algorithms 1(2):129-150, 2003.

[30] P. Flocchini, A. Nayak, A. Schulz, *Cleaning an arbitrary regular network with mobile agents*, 2nd Int. Conf. on Communication in Computing 200-206, 2005.

[31] D. Peleg, *Local majority voting, small coalitions an controlling monopolies in graphs: A review*, Theoretical Computer Science 282:231-257, 2002.

[32] R. Kralovic, P. Ruzicka, *On Immunity and Catastrophic indices in Graphs*, 8th International Colloquium on Structural Information an Communication Complexity (SIROCCO) 231-242, 2001.

[33] P. Flocchini, *Contamination and Decontamination in Majority-Based Systems*, Journal of Cellular Automata, Vol. 4, Num. 3, pp 183–200, 2009.

[34] K. Athreya, P. Ney, *Branching Processes*, Springer-Verlag New York, 1972.

[35] E. A. Bender, E. R. Canfield, *The asymptotic number of non-negative integer matrices with given row and column sums*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 24 296–307, 1978.

[36] B. Bollobás, *A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs*, European Journal of Combinatorics, Vol. 1 311–316, 1980.

[37] N. C. Wormald, *The asymptotic connectivity of labelled regular graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 31 156–167, 1981.

[38] N. C. Wormald, *The asymptotic distribution of short cycles in random regular graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 31 168–182, 1981.

[39] N. C. Wormald, *Models of random regular graphs*, Surveys in Combinatorics, J. D. Lamb and D. A. Preece, eds, pp. 239–298, 1999.

[40] Z. Agur, *Fixed points of majority rule cellular automata applied to plasticity and precision of the immune response*, Complex Systems, 351-357, 1991.

[41] Ching-Lueh Chang, Yuh-Dauh Lyuu, *Spreading messages*, Theor. Comput. Sci. 410(27–29), 2714–2724, 2009.

[42] J.P. Gleeson, D.J. Cahalane, *Seed size strongly affects cascades on random networks*, Phys. Rev. E 75, 056103, 2007.

[43] D.J. Watts, *A simple model of global cascades on random networks*, Proc. Nat. Acad. Sci. 99(9), 5766–5771, 2002.

[44] Ching-Lueh Chang, Yuh-Dauh Lyuu, *Spreading of messages in random graphs*, In Downey, R., Manyem, P., eds.: Fifteenth Computing: The Australasian Theory Symposium (CATS 2009). Volume 94 of CRPIT., Wellington, New Zealand, ACS 3–7, 2009.

[45] Ching-Lueh Chang, Yuh-Dauh Lyuu, *Bounding the number of tolerable faults in majority-based systems*, to be presented on 7th International Conference on Algorithms and Complexity May 26-28, 2010 Rome, Italy

[46] E. A. Bender, E. R. Canfield, *The asymptotic number of non-negative integer matrices with given row and column sums*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 24, 296–307, 1978.

[47] T Reddy, D Krishna, C Rangan, *Variants of Spreading Messages*, WALCOM Algorithms and Computation [3-642-11440-7] Reddy, p. 240, 2010.

[48] J. Závodný, *Lecture Notes on Probabilistic Combinatorics*, http://www.fks.sk/∼kubus/doc/notes/probcomb.pdf

[49] E. PALMER, *Graphical Evolution*, Wiley, New York, 1985.

[50] N. Alon, J. Spencer, and P. Erdős, *The Probabilistic Method*, Wiley, New York, 1992.

6 Publikačná činnosť autora so vzťahom ku skúmanej problematike

Výsledky týkajúce sa náhodných hyperkociek sú sformulované v dvoch článkoch [Kulich1, Kulich2]. Vylepšený algoritmus P. Schweitzera a jeho dôsledky na spodný odhad van der Waerdenových čísel sú zhrnuté v článku [Kul, Kem]. Výsledky týkajúce sa systémov s pravidlami voľby väčšiny sú zhrnuté v článku [Kulich4], ktorý je pripravený na zaslanie do odborného časopisu.

[Kulich1] T. Kulich, *Diameter of random subgraph of a hypercube*, manuscript submitted to Random Structures and Algorithms, (2009).

[Kulich2] T. Kulich, *Geometrical properties of interval graph induced by random hypercube*, manuscript submitted to Acta Mathematica Universitatis Comenianae (2010).

[Kul, Kem] T. Kulich, M. Kemeňová, *On the paper of Pascal Schweitzer concerning similarities between incompressibility methods and the Lovász Local Lemma*, manuscript submitted to Information Processing Letters, (2010).

[Kulich4] T. Kulich, *Majority-based systems with random initial condition*, manuscript ready for submission.

7 Summary

In this thesis we study several problems from the field of probabilistic combinatorics. First, we present two results related to random cubical graphs. Although development of the theory of random cubical graphs thrived in 1980's and 1990's, some non-trivial and unsolved issues still remain. We present sharpened results about geometrical properties of random cubical graphs, as well as of interval graph induced by random hypercube.

Next, we present short debate about the compressing algorithm of Pascal Schweitzer. This algorithm together with incompressibility arguments gives result that are almost as good as those obtained by Lovász Local Lemma. The method was illustrated on the problem of obtaining lower bound for van der Waerden numbers. However, his result using incompressibility arguments is worse than those obtained by Local Lemma by a multiplicative factor of $4/e$. We improve his method to give exactly the same result as the Local Lemma.

Finally, we present our results on majority–based systems. Although there exist many results that describe these systems, there are only few works known to us, that would analyze these systems with random initial condition. We analyze majority–based systems with random initial coloring on two different types of underlying graph: the toroidal mesh and random 4–regular graph. We also show, how we can use probabilistic combinatorics to analyze the deterministic case: we show that under simple majority scenario every 4–regular graph have irreversible dynamic monopoly of size at most $0.44|V|$ (which is improvement in comparison with known result $0.5|V|$.