Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Ivana Kučerová

Autoreferát dizertačnej práce

Regulárne sa meniace riešenia diferenciálnych rovníc tretieho rádu so singulárnymi nelinearitami

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.9 Aplikovaná matematika

Miesto a dátum:

Bratislava 29.4.2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky; Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky

Predkladateľ: **Mgr. Ivana Kučerová**
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: **prof. RNDr. Jaroslav Jaroš, CSc.**

Oponenti: ....

....

....

....

....

....

(meno a priezvisko oponenta s uvedením jeho titulov a hodností
a názov ustanovizne, s ktorou je oponent v pracovnom pomere)

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....
(uviesť dátum vymenovania)

....
(študijný odbor) (názov študijného programu doktorandského štúdia)

na ....
(presná adresa miesta konania obhajoby dizertačnej práce)

Predseda odborovej komisie:

....

…..

…..

…..

Úvod

Regulárne sa meniace funkcie prirodzeným spôsobom rozširujú triedu mocninových funkcií, sú im svojim spôsobom "blízke". Iný názov, s ktorým sa v literatúre stretávame pre funkcie s rovnakou definíciou, je asymptoticky homogénne.

Mocninové závislosti, či mocninové zákony slúžia na popis mnohých pozorovaných javov v okolitej realite ako v prírodných, tak aj v spoločenských vedách (pozri napr. [8]). Vznikajú tam, kde nejaký jav podlieha pravidlám Gaussovho rozdelenia. Aj preto boli regulárne sa meniace funkcie dlho využívané najmä v štatistike a teórii pravdepodobnosti. Posledný vývoj v oblasti diferenciálnych rovníc však otvára ich obrovský aplikačný potenciál aj na veľmi presnú kvalitatívnu charakteristiku riešení diferenciálnych rovníc rôzneho typu nájdením presného predpisu ich asymptotického správania v nekonečne.

Diferenciálne rovnice samé o sebe hrajú dôležitú úlohu v aplikovanej matematike. Veľa matematických modelov vedie k nelineárnym diferenciálnym rovniciam. Mocninová nelinearita je jednou z najzákladnejších, spomeňme napríklad vo fyzike Thomas-Fermiho rovnicu. V prípade singulárnej nelinearity dostávame napr. diferenciálnu rovnicu, ku ktorej vedie použitie Croccových premenných na rovnice hraničných vrstiev pre kvapaliny, ktoré spĺňajú mocninový zákon, za podmienok rovnomerného toku okolo polonekonečnej dosky ([32]).

Štúdium kvalitatívnych vlastností lineárnych a nelineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu má na Slovensku aj v Českej republike dlhú tradíciu. Časť výsledkov aj s aplikáciami vo fyzike je zhrnutá v monografii prof. Greguša [10]. Jedným z cieľov predkladanej dizertačnej práce je pokračovať v tejto tradícii a rozšíriť existujúce výsledky o ďalšie poznatky v tejto oblasti.

Hoci aplikácií diferenciálnej rovnice tretieho rádu nie je tak veľa ako pre diferenciálne rovnice druhého a štvrtého rádu, predsa sa objavujú v rôznych oblastiach ekonómie, biológie aj poľnohospodárstva ([7], [9] a [15]) a v neposlednom rade fyziky, kde je diferenciálna rovnica tretieho rádu so singulárnou nelinearitou dôležitá pri štúdiu tenkých vizkóznych filmov s povrchovým napätím (popis tvaru kvapôčky glycerolu, silikónu a pod. na povrchu iných materiálov), [4].

V predkladanej práci sme sa venovali analýze diferenciálnej rovnice tretieho rádu so singulárnou nelinearitou

$$x''' + \alpha q(t) x^{-\gamma} = 0, \tag{A_α}$$

kde $\alpha \in \{-1, 1\}$, γ je kladná konštanta a q je kladná spojitá funkcia definovaná na intervale $[a, \infty)$ za ďalších v práci upresnených predpokladov, z ktorých najdôležitejším je predpoklad vlastnosti regulárnej variácie ako u koeficientovej funkcie q, tak aj pre riešenia tejto rovnice. Po zadefinovaní cieľov a metodiky práce, úvodných ustanoveniach, predstavení súčasneho stavu v oblasti diferenciálnych rovníc s využitím regulárnej variácie a pripomenutí podmienok existencie *primitívnych riešení*[1] rovnice so singulárnou perturbáciou všeobecnejšieho tvaru, sme prešli k podrobnej analýze podmienok existencie a asymptotického správania neprimitívnych riešení najskôr rovnice Emden-Fowlerovho typu a následne Thomas-Fermiho typu s regulárne sa meniacim koeficientom pred singulárnym nelineárnym členom. V závere hlavnej časti práce sú zhrnuté výsledky o existencii regulárne sa meniacich riešení rovnice (A_α) za splnenia jednotlivých podmienok popisom štruktúry množiny všetkých vlastných regulárne sa meniacich riešení rovnice (A_α).

Ciele dizertačnej práce

Cieľom práce bolo využiť teóriu regulárnej variácie funkcií (v Karamatovom zmysle) pri analýze existencie a asymptotického správania riešení základného prototypu singulárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu:

rovnice Emden - Fowlerovho typu

$$x''' + q(t)x^{-\gamma} = 0; \tag{A_+}$$

rovnice Thomas-Fermiho typu

$$x''' - q(t)x^{-\gamma} = 0 \tag{A_-}$$

za predpokladov upresnených v práci. Nakoľko existencia primitívnych riešení rovníc s pravou stranou nerastúcou v nezávislej premennej, ktorých rovnice (A_+) a (A_-) sú špeciálnym prípadom, je už dlho charakterizovaná ([26]), bolo našou ambíciou analyzovať neprimitívne riešenia oboch týchto rovníc. Konkrétne

- nájsť nutnú a postačujúcu podmienku existencie regulárne sa meniaceho riešenia určitého indexu;

- nájsť presný predpis správania sa jednotlivých regulárne sa meniacich riešení v nekonečne v terminológii asymptotickej ekvivalencie;

- popísať celkovú štruktúru množiny regulárne sa meniacich riešení oboch rovníc.

[1] t.j. riešení x, pre ktoré $x \sim ct^i$, pre nejakú konštantu c a nejaké $i \in \{0, 1, 2\}$, pre $t \to \infty$, ostatné riešenia nazývame *neprimitívne* (bližšie v časti Úvodné ustanovenia);

Metodika práce

Po základnej apriórnej klasifikácii typov riešení každej z rovníc (A_+) aj (A_-) sme na získanie výsledkov uvedených v práci použili nasledovný postup aplikovaný osobitne na každý typ neprimitívneho riešenia rovnice (A_+), resp. (A_-).

1. V prvom kroku v našom skúmaní riešení rovnice (A_+), resp. (A_-) je nájdená príslušná integrálna rovnica pre daný typ riešenia, ktorá je aproximovaná asymptotickým integrálnym vzt'ahom. Na uplatnenie prostriedkov poskytovaných teóriou regulárnej variácie sme predpokladali, že koeficient v perturbácií diferenciálnej rovnice je regulárne sa meniacou funkciou, a tiež že riešenie, ktoré hl'adáme, má byt' také. Ako je v práci ukázané, skutočne existuje regulárne sa meniace riešenie tohto asymptotického integrálneho vzt'ahu. V postupe dôkazu bolo využitých viacero vlastností regulárne sa meniacich funkcií, najdôležitejšou je Karamatova veta o integrovaní (priama čast'). Všetky sú podrobnejšie popísané v kapitole Úvodné ustanovenia.

2. Vyriešením asymptotického integrálneho vzt'ahu sme získali "približné riešenie", ktoré nám slúži na horný a dolný odhad potenciálneho presného riešenia pôvodnej diferenciálnej rovnice. Tento bol potrebný pri dokazovaní splnenia jednej z podmienok Schauderovej-Tichonovovej vety, ktorej uplatnenie predstavuje druhý zásadný krok v našom postupe (podmienka, že tam definované zobrazenie je zobrazením "do"). V prípade rastúcich riešení bola uplatnená aj veta o monotónnych ekvivalentoch z teórie regulárnej variácie. V rámci dokazovania splnenia ostatných podmienok Schauderovej-Tichonovovej vety sme využili Arzelovu-Ascoliho lemu (dokazovanie relatívnej kompaktnosti obrazu operátora), a Lebesgueovu vetu o dominantnej konvergencii (dokazovanie spojitosti operátora). Vd'aka Schauderovej-Tichonovovej vete sme ukázali, že riešenie diferenciálnej rovnice existuje a súčasne sme popísali aj jeho asymptotické správanie v nekonečne, avšak práve len v termínoch horného a dolného odhadu.

3. Na upresnenie popisu tohto správania sme použili v tret'om kroku zovšeobecnené L´Hospitalovo pravidlo. Za predpokladu, že koeficient v rovnici je regulárne sa meniacou funkciou, sme dokázali, že riešenie diferenciálnej rovnice, ktorého existenciu sme ukázali v druhom kroku, je asymptoticky ekvivalentné s riešením asymptotického integrálneho vzt'ahu, nájdeným v prvom kroku, teda je regulárne sa meniacou funkciou s presne určeným asymptotickým správaním.

Tento postup bol zopakovaný pre všetky typy neprimitívnych riešení pre rovnicu (A_+), ako aj pre rovnicu (A_-). Všetky zistené poznatky o existencií a asymptotickom správaní sa vlastných riešení sme využili na popísanie štruktúry množiny všetkých vlastných regulárne sa meniacich riešení oboch rovníc v poslednej časti práce.

Úvodné ustanovenia

(Výber z Kapitoly Úvodné ustanovenia, číslovanie viet korešponduje s číslovaním v práci.)

Definícia 4.1([3]). Nech l je kladná merateľná funkcia definovaná na nejakom okolí nekonečna $[a, \infty)$, spĺňajúca

$$\lim_{t\to\infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1,$$

pre všetky $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Potom hovoríme, že l je *pomaly sa meniaca funkcia* (v Karamatovom zmysle).

Definícia 4.2([3]). Nech f je kladná merateľná funkcia definovaná na nejakom okolí nekonečna $[a, \infty)$, nech $\rho \in \mathbb{R}$ a nech platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\rho, \tag{1}$$

pre všetky $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Potom hovoríme, že f je *regulárne sa meniaca funkcia indexu* ρ.

Množinu všetkých regulárne sa meniacich funkcií indexu ρ budeme značiť RV(ρ) (z angl. "regularly varying"). Pre množinu všetkých pomaly sa meniacich funkcií namiesto RV(0) budeme písať SV (z angl. "slowly varying").

Spojením predchádzajúcich dvoch definícií dostávame nasledujúcu v práci intenzívne využívanú reprezentáciu regulárne sa meniacich funkcií

$$f(t) = t^\rho l(t), \tag{2}$$

kde $t \in [a, \infty)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{RV}(\rho)$ a $l \in \mathrm{SV}$.

Poznámka 4.1. Vlastnosť regulárnej variácie je možné definovať aj v inom bode ako v nekonečne, v literatúre sa vyskytuje najmä definícia takéhoto asymptotického správania v bode nula, prípadne v inom konečnom bode.

Zavedieme pojem a značenie asymptotickej ekvivalencie.

Definícia 4.3. Nech f a g sú kladné funkcie definované v okolí nekonečna. Budeme hovoriť, že f je asymptoticky ekvivalentná s g pre $t \to \infty$ alebo "f sa správa ako g pre

$t \to \infty$ “, ak platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Tento asymptoticky ekvivalentný vzt’ah budeme značit symbolom $\sim$, t.j.

$$f(t) \sim g(t) \quad \text{pre} \quad t \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Takto môžme prepísat’ vzt’ah (1) z Definície 4.2 do tvaru

$$f(\lambda t) \sim \lambda^{\rho} f(t), \quad t \to \infty,$$

z ktorého je tiež zrejmé, prečo iným názvom pre vlastnost’ regulárnej variácie (indexu ρ) je práve asymptotická homogenita (stupňa ρ).

Zo zápisu (2) regulárne sa meniacej funkcie f vidíme, že to, čo prináša novú vlastnost’ oproti homogénnym funkciám, je práve pomaly sa meniaca funkcia l. Pokial’ by sme volili $l(t) \equiv c$, kde c je kladná konštanta, dostali by sme homogénnu funkciu. Iným triviálnym príkladom pomaly sa meniacej funkcie, je funkcia, ktorá síce konštantná nie je, ale jej limita v nekonečne je rovná kladnej konštante. Na rozlíšenie funkcií, tvoriacich podmnožinu regulárne sa meniacich funkcií f indexu ρ, ktoré je možné vyjadrit’ v tvare (2), kde $l(t) \sim c$, c je kladná konštanta, používame priliehavý názov *triviálne regulárne sa meniaca funkcia* (*indexu* ρ), zn. $tr\mathrm{RV}(\rho)$, v prípade $\rho = 0$ *triviálne pomaly sa meniaca funkcia.* Pokial’ takéto vyjadrenie možné nie je, hovoríme o *netriviálne regulárne sa meniacej funkcii* (*indexu* ρ), zn. $ntr\mathrm{RV}(\rho)$ resp. *netriviálne pomaly sa meniacej funkcii.*

V súvislosti s týmito definíciami zavedieme i pojem *primitívnych riešení* x rovníc (A_+) a (A_-), ako takých, pre ktoré platí $x(t) \sim ct^j$, pre nejaké $c > 0$ a $j \in \{0, 1, 2\}$, ostatné riešenia sa nazývajú *neprimitívne* a ako neskôr uvidíme, tieto môžu byt’ triviálne alebo netriviálne regulárne sa meniacimi funkciami.

Príkladmi netriviálne pomaly sa meniacich funkcií sú nasledovné:

$$l(t) = \prod_{k=1}^{n} (\log_k t)^{\rho_k},$$

kde $\rho_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\log_k$ značí k-tu iteráciu logaritmu,

$$l(t) = \exp\left(\prod_{k=1}^{n} (\log_k t)^{\varrho_k} \right),$$

kde $0 < \varrho_k < 1$,

$$l(t) = \frac{1}{t} \int\limits_a^t \frac{1}{\ln s} ds, \quad a > 1$$

a nemonotónna

$$l(t) = \exp\left((\ln t)^\tau \cos(\ln t)^\tau\right), \quad 0 < \tau < 1/2,$$

ktorá nekonečne osciluje.

Medzi najzákladnejšie vlastnosti pomaly sa meniacich funkcií, ktoré v práci využijeme, patria tieto:

Veta 4.2([28], Dodatok Veta 4(i)). *Ak l, l_1 a l_2 sú pomaly sa meniace funkcie, potom aj l^ρ pre každé reálne ρ a $l_1.l_2$ sú pomaly sa meniace funkcie.*

Veta 4.3([28], Dodatok Veta 7). *Ak sa kladná merateľná funkcia f správa ako regulárne sa meniaca funkcia indexu ρ, t.j. $f(t) \sim t^\rho l(t)$, pre $t \to \infty$ a nejakú pomaly sa meniacu funkciu l, potom f je regulárne sa meniaca funkcia indexu ρ, t.j. $f(t) = t^\rho l^*(t)$, kde $l^* \in \mathrm{SV}$ a vo všeobecnosti $l^* \neq l$, ale platí $l^*(t) \sim l(t)$, pre $t \to \infty$.*

Veta 4.5 ([3], Veta 1.5.3).(O monotónnych ekvivalentoch) *Nech $f \in \mathrm{RV}(\rho)$, vyberme a tak, aby f bola lokálne ohraničená na $[a, \infty)$. Ak $\rho > 0$, potom*

(i) $\overline{f}(t) := \sup\{f(s) : a \leq s \leq t\} \sim f(t), \quad t \to \infty,$

(ii) $\underline{f}(t) := \inf\{f(s) : s \geq t\} \sim f(t), \quad t \to \infty.$

Ak $\rho < 0$, potom

(i) $\overline{f}(t) := \sup\{f(s) : s \geq t\} \sim f(t), \quad t \to \infty,$

(ii) $\underline{f}(t) := \inf\{f(s) : a \leq s \leq t\} \sim f(t), \quad t \to \infty.$

Kľúčovou pre celý v práci uvedený postup analýzy riešení rovníc (A_+) a (A_-) je nasledujúca Karamatova veta o integrovaní (priama časť), ktorá nám ukazuje, že aj integrovanie prebieha z asymptotického pohľadu rovnako ako integrovanie homogénnych funkcií.

Veta 4.6([3], Veta 1.5.8 - 1.5.10). *Nech $L \in \mathrm{SV}$.*

(i) *Ak $\alpha > -1$ a a dosť veľké na to, aby L bola lokálne ohraničená na $[a, \infty)$, potom*

$$\int_a^t s^\alpha L(s) ds \sim \frac{1}{\alpha + 1} t^{\alpha+1} L(t), \quad t \to \infty.$$

(ii) *Ak $\alpha < -1$, potom $\int^\infty t^\alpha L(t) dt < \infty$ a*

$$\int_t^\infty s^\alpha L(s) ds \sim -\frac{1}{\alpha + 1} t^{\alpha+1} L(t), \quad t \to \infty.$$

(iii) *Ak $\alpha = -1$ a a také, že L je lokálne integrovateľná na $[a, \infty)$, potom*

$$l(t) := \int_a^t \frac{L(s)}{s} ds \in \mathrm{SV} \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{l(t)}{L(t)} = \infty.$$

(iv) *Ak* $\alpha = -1$ *a* $\int^{\infty} \frac{L(t)}{t} dt < \infty$, *potom*

$$m(t) := \int_t^{\infty} \frac{L(s)}{s} ds \in \mathrm{SV} \quad a \quad \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{L(t)} = \infty.$$

Okrem teórie regulárnej variácie sme v práci využili aj ďalšie vety - Schauderova-Tichonovova veta, Arzelova-Ascoliho lema, Lebesgueova veta o dominantnej konvergecii a zovšeobecnené L'Hospitalovo pravidlo:

Lema 4.2([34])). *Nech* f, $g \in C^1[T,\infty)$ *a predpokladajme, že*

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty \quad a \quad g'(t) > 0, \quad t \in [T,\infty),$$

alebo

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad a \quad g'(t) < 0, \quad t \in [T,\infty).$$

Potom

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)}, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Motivačný príklad

Nasledujúci príklad, kde q je homogénna funkcia, demonštruje, že rovnica tvaru (A_α) môže mať aj iné ako známe primitívne riešenia.

Majme rovnicu

$$x'''(t) + \alpha t^{\sigma} x^{-\gamma} = 0, \tag{A_0}$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\gamma > 0$. Hľadajme kladné riešenie v tvare

$$x(t) = ct^{\rho}, \quad c > 0, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Derivovaním a dosadením do rovnice (A_0) vidíme, že musí platiť

$$c = \left[\frac{\alpha}{(-\rho)(\rho-1)(\rho-2)}\right]^{1+\gamma}, \quad \rho = \frac{\sigma+3}{1+\gamma}.$$

Aby takto nájdené riešenie bolo kladné, vidíme, že ak

(a) $\alpha = 1$, potom musí $\rho \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$;

(b) $\alpha = -1$, potom platí $\rho \in (0, 1) \cup (2, \infty)$.

Nie náhodou hranicami týchto intervalov, v ktorých je potrebné, aby sa nachádzal exponent riešenia v hľadanom tvare $x(t) = ct^\rho$, sú práve exponenty primitívnych riešení. Buduje sa nám takto intuitívna predstava o štruktúre množiny riešení a o vzťahu, v ktorom je následne potrebné, aby boli σ a γ, pre existenciu takýchto riešení:

(a) $\alpha = 1$, $\sigma < -3 \vee \gamma - 2 < \sigma < 2\gamma - 1$;

(b) $\alpha = -1$, $-3 < \sigma < \gamma - 2 \vee 2\gamma - 1 < \sigma$.

Prirodzene sa otvára otázka, pokiaľ homogénny koeficient $q(t) = t^\sigma$ nahradíme asymptoticky homogénnym, t.j. regulárne sa meniacou funkciou indexu σ, či bude aj riešenie regulárne sa meniace stupňa ρ. Technika použitá v práci umožňuje veľmi detailnú analýzu jednotlivých typov riešení, pre ľubovoľné regulárne sa meniace koeficienty.

Výsledky práce

Hlavné výsledky práce sú zachytené v nasledujúcich vetách (číslovanie viet korešponduje s číslovaním použitým v práci).

Rovnica (A_+)

Silno klesajúce riešenia, trieda $P_0[0]$

Silno klesajúce riešenie x rovnice (A_+) je riešenie z množiny riešení $P_0[0]$, t.j. má vlastnosť

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Veta 6.1.5. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica (A_+) má netriviálne pomaly sa meniace riešenie vtedy a len vtedy, ak $\sigma = -3$ a platí*

$$\int_a^\infty t^2 q(t)dt < \infty.$$

Naviac každé takéto riešenie x má asymptotické správanie

$$x(t) \sim \left[\frac{1+\gamma}{2}\int_t^\infty s^2 q(s)ds\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t\to\infty.$$

Veta 6.1.6. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica (A_+) má regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho < 0$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma < -3$. V tomto prípade je index ρ daný predpisom*

$$\rho = \frac{\sigma+3}{1+\gamma} \tag{3}$$

a každé také riešenie x má asymptotické správanie

$$x(t) \sim \left[\frac{t^3 q(t)}{(-\rho)(1-\rho)(2-\rho)}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Mierne rastúce riešenia, trieda $P_2[\mathrm{int}]$

Mierne rastúcim riešením x rovnice (A_+) rozumieme riešenie z množiny riešení $P_2[\mathrm{int}]$, t.j. ktoré má vlastnosť

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t^2} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = \infty.$$

Veta 6.2.7. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A_+) *má netriviálne regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho = 1$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma = \gamma - 2$ a platí*

$$\int_a^\infty t^{1-\gamma} q(t) dt = \infty.$$

Každé také riešenie x má asymptotické správanie

$$x(t) \sim t\left[(1+\gamma)\int_a^t s^{1-\gamma} q(s) ds\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Veta 6.2.8. *Nech $\gamma < 1$ q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A_+) *má regulárne sa meniace riešenia indexu $\rho \in (1,2)$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma \in (\gamma-2, 2\gamma-1)$. V takom prípade index ρ je daný predpisom* (3) *a každé také riešenie x má asymptotické správanie*

$$x(t) \sim \left[\frac{t^3 q(t)}{\rho(\rho-1)(2-\rho)}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Veta 6.2.9. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A_+) *má netriviálne regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho = 2$ vtedy a len vtedy, keď $\sigma = 2\gamma - 1$ a platí*

$$\int_a^\infty t^{-2\gamma} q(t) dt < \infty.$$

V takom prípade má každé také riešenie x asymptotické správanie

$$x(t) \sim t^2\left[\frac{1+\gamma}{2}\int_t^\infty s^{-2\gamma} q(s) ds\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Rovnica (A$_-$)

Silno rastúce riešenia, trieda $P_3[\infty]$

Silno rastúcim riešením x rovnice (A$_-$) je riešenie z triedy $P_3[\infty]$, t.j. x má vlastnosť

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t^2} = \infty.$$

Veta 7.1.5. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A$_-$) *má netriviálne regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho = 2$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma = 2\gamma - 1$ a platí*

$$\int_a^\infty t^{-2\gamma} q(t) dt = \infty.$$

Naviac každé takéto riešenie x má asymptotické správanie

$$x(t) \sim t^2 \left[\frac{1+\gamma}{2} \int_a^t s^{-2\gamma} q(s) ds \right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Veta 7.1.6. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A$_-$) *má regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho > 2$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma > 2\gamma - 1$. V tomto prípade je index ρ daný predpisom* (3) *a každé také riešenie x má asymptotické správanie*

$$x(t) \sim \left[\frac{t^3 q(t)}{\rho(\rho-1)(\rho-2)} \right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Mierne rastúce riešenia, trieda $P_1[\mathrm{int}]$

Mierne rastúce riešenie x rovnice (A$_-$) je riešenie z triedy $P_1[\mathrm{int}]$ a má teda vlastnosť

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \infty.$$

Veta 7.2.7. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A$_-$) *má netriviálne pomaly sa meniace riešenie vtedy a len vtedy, ak $\sigma = -3$ a platí*

$$\int_a^\infty t^2 q(t) dt = \infty.$$

Každé také riešenie x má asymptotické správanie

$$x(t) \sim \left[\frac{1+\gamma}{2} \int_a^t s^2 q(s) ds \right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Veta 7.2.8. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A_-) *má regulárne sa meniace riešenia indexu $\rho \in (0,1)$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma \in (-3, \gamma - 2)$. V takom prípade index ρ je daný predpisom* (3) *a každé také riešenie x má asymptotické správanie*

$$x(t) \sim \left[\frac{t^3 q(t)}{\rho(1-\rho)(2-\rho)}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Veta 7.2.9. *Nech $\gamma < 1$ a q je regulárne sa meniaca funkcia indexu σ. Rovnica* (A_-) *má netriviálne regulárne sa meniace riešenie indexu $\rho = 1$ vtedy a len vtedy, ak $\sigma = \gamma - 2$ a platí*

$$\int_a^\infty t^{1-\gamma} q(t) dt < \infty.$$

V takom prípade každé také riešenie x má asymptotocké správanie

$$x(t) \sim t\left[(1+\gamma)\int_t^\infty s^{1-\gamma} q(s) ds\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad t \to \infty.$$

Označme $\mathcal{R}_+$ množinu všetkých vlastných regulárne sa meniacich riešení rovnice (A_+) a $\mathcal{R}_-$ množinu všetkých vlastných regulárne sa meniacich riešení rovnice (A_-) a definujme ich podmnožiny $\mathcal{R}_*(\rho) = \mathcal{R}_* \cap \mathrm{RV}(\rho)$, $tr\mathcal{R}_*(\rho) = \mathcal{R}_* \cap \mathrm{tr} - \mathrm{RV}(\rho)$, $ntr\mathcal{R}_*(\rho) = \mathcal{R}_* \cap \mathrm{ntr} - \mathrm{RV}(\rho)$, kde $*$ je $+$ alebo $-$. Označme

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^\infty t^2 q(t) dt, \quad \mathrm{I}_2 = \int_a^\infty t^{1-\gamma} q(t) dt \quad \text{a} \quad \mathrm{I}_3 = \int_a^\infty t^{-2\gamma} q(t) dt$$

a pripomeňme, že ρ je dané vzt'ahom (3). V práci dosiahnuté výsledky o existencii jednotlivých typov riešení v kombináciami so známymi poznatkami o existencii primitívnych riešení môžme zhrnút' v nasledujúcom prehl'ade.

ŠTRUKTÚRA REGULÁRNE SA MENIACICH RIEŠENÍ ROVNÍC (A_+) a (A_-):

(1) Ak $\sigma < -3$, potom $\rho < 0$ a

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+(\rho) \cup tr\mathcal{R}_+(0) \cup tr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = tr\mathcal{R}_-(0) \cup tr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(2);$$

(2) Ak $\sigma = -3$ a súčasne $\mathrm{I}_1 < \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = ntr\mathcal{R}_+(0) \cup tr\mathcal{R}_+(0) \cup tr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = tr\mathcal{R}_-(0) \cup tr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(2);$$

(3) Ak $\sigma = -3$ a súčasne $\mathrm{I}_1 = \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = tr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = ntr\mathcal{R}_-(0) \cup tr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(2);$$

(4) Ak $\sigma \in (-3, \gamma - 2)$, potom $\rho \in (0, 1)$ a

$$\mathcal{R}_+ = tr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_-(\rho) \cup tr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(2);$$

(5) Ak $\sigma = \gamma - 2$ a súčasne $\mathrm{I}_2 < \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = tr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = ntr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(1) \cup tr\mathcal{R}_-(2);$$

(6) Ak $\sigma = \gamma - 2$ a súčasne $\mathrm{I}_2 = \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = ntr\mathcal{R}_+(1) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = tr\mathcal{R}_-(2);$$

(7) Ak $\sigma \in (\gamma - 2, 2\gamma - 1)$, potom $\rho \in (1, 2)$ a

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+(\rho) \cup tr\mathcal{R}_+(2)$$

$$\mathcal{R}_- = tr\mathcal{R}_-(2)$$

(8) Ak $\sigma = 2\gamma - 1$ a súčasne $\mathrm{I}_3 < \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = ntr\mathcal{R}_+(2) \cup tr\mathcal{R}_+(2),$$

$$\mathcal{R}_- = tr\mathcal{R}_-(2);$$

(9) Ak $\sigma = 2\gamma - 1$ a súčasne $\mathrm{I}_3 = \infty$, potom

$$\mathcal{R}_+ = \emptyset,$$

$$\mathcal{R}_- = ntr\mathcal{R}_-(2);$$

(10) Ak $\sigma > 2\gamma - 1$, potom $\rho > 2$ a

$$\mathcal{R}_+ = \emptyset,$$

$$\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_-(\rho).$$

Záver a možnosti ďalšieho výskumu

Hlavným prínosom predkladanej práce sú nové výsledky o existencii a presnej asymptotike regulárne sa meniacich riešení pre diferenciálnu rovnicu tretieho rádu so singulárnou nelinearitou. V práci predstavená technika hľadania riešení a ich asymptotických tvarov rovnice (A_α) s využitím vlastností regulárnej variácie umožňuje jemnú analýzu za použitia dobre zrozumiteľného aparátu. Týmto sa stáva veľmi perspektívnou a dá sa očakávať jej postupné rozšírenie na všeobecnejšie rovnice so singulárnou nelinearitou. Uveďme napríklad rovnice tvaru (vo všetkých nižšie uvedených rovniciach je q kladná spojitá regulárne sa meniaca funkcia definovaná na intervale $[a,\infty), a>0$)

$$(p_2(t)(p_1(t)y')')' \pm q(t)y^{-\gamma} = 0, \tag{4}$$

kde $\gamma>0$, p_1, p_2 sú kladné spojité funkcie definované na $[a,\infty)$, $a>0$ a p_i, $i=1,2$ naviac spĺňajú podmienku

$$\int_a^\infty \frac{1}{p_i}dt = \infty. \tag{5}$$

Zaujímavé môže byť i rozšírenie metódy na rovnice tvaru (4), kde koeficienty p_i, $i=1,2$ podmienku (5) nespĺňajú. V takomto prípade by bola klasifikácia riešení do rôznych tried o niečo zložitejšia.

Iným spôsobom rovnicu (A_α) zovšeobecňujú rovnice tvaru

$$((((y')^{\alpha_1^*})')^{\alpha_2^*})' \pm q(t)y^{-\beta} = 0,$$

kde $y^{\alpha_i^*} = |y|^{\alpha_i}\mathrm{sgn}y$, $\alpha_i>0$, $i=1,2$, $\beta>0$ a $\alpha_1.\alpha_2>\beta$ (podmienka subhomogenity) alebo rovnice

$$y''' \pm q(t)\phi(y) = 0,$$

kde ϕ je spojitá regulárne sa meniaca funkcia (v bode nekonečno alebo nula podľa typu skúmaného riešenia) indexu $\gamma \in (-1,0)$.

Dá sa predpokladať, že metóda je s drobnými prispôsobeniami použiteľná tiež na diferenciálne rovnice so singulárnou nelinearitou iných rádov (párnych aj nepárnych), ako vyšších, tak aj pre diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Pre nás však bola príťažlivá práve rovnica tretieho rádu, ako diferenciálna rovnica najnižšieho nepárneho rádu, pre ktorú sa naplno rozvinie bohatosť štruktúry množiny riešení.

Otvárajú sa aj možnosti využitia v parciálnych diferenciálnych rovniciach pri popise radiálne symetrických riešení.

Jedinou nevýhodou takto predstaveného postupu je potreba, aby exponent γ, resp. $-\gamma$, bol v absolútnej hodnote menší ako 1, ktorá sa objaví pri dokazovaní splnenia podmienok Schauderovej-Tichonovovej vety. V literatúre sa stretávame s obdobnými výsledkami pre niektoré typy riešení aj pre superlineárne obyčajné diferenciálne rovnice. Napr. v práci [28] Marić samotnú existenciu kladného riešenia smerujúceho k nule dokazuje odvolaním sa na výsledok so všeobecnejšou platnosťou z práce Wonga [35]. Príklady s netriviálnymi regulárne sa meniacimi riešeniami uvedené v práci tiež naznačujú, že regulárne sa meniace riešenia s analogickými vlastnosťami môžu existovať aj pre diferenciálne rovnice s exponentom v signulárnej nelinearite $-\gamma$ v absolútnej hodnote väčším ako 1.

Summary

This thesis is devoted to the asymptotic analysis of proper solutions of the third-order differential equation with singular nonlinearity

$$x''' + \alpha q(t) x^{-\gamma} = 0, \tag{A_α}$$

where $\alpha \in \{-1, 1\}$, γ is a positive constant and q is a positive continuous function on $[a, \infty)$. It is shown that if q is a regularly varying function, then it is possible to establish necessary and sufficient conditions for the existence of regularly varying solutions of various indices of various classes of solutions and to acquire precise information about the asymptotic behavior at infinity of these solutions.

The main tool is the Schauder-Tychonoff fixed point theorem combined with the theory of regular variation. Obtained results are summarized in the description of the structure of the set of all proper regularly varying solutions of Eq. (A_α).

Keywords third order nonlinear differential equation, singular nonlinearity, existence of positive solution, asymptotic behavior, asymptotic homogeneity, regularly varying functions

Zoznam prác doktoranda

Kučerová, I.: *Decaying regularly varying solutions of third-order differential equations with a singular nonlinearity*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, (v tlači).

Literatúra

[1] Avakumović, V. G.: *Sur l'eq́uation differentielle de Thomas-Fermi, I.* PIMB(NS), **1**, No. 15 (1947), 101-13.

[2] Avakumović, V. G.: *Sur l'eq́uation differentielle de Thomas-Fermi, II.* PIMB(NS), **2**, No. 16, 223-35.

[3] Bingham, N. H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.: *Regular variation.* Encyklopedia of Mathematics and its Applications **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[4] Duffy, B. R., Wilson, S. K.*A Third-Order Differential Equation Arising in Thin-Film Flows and Relevant to Tanner's Law.* Appl. Math. Lett. **10** (1997), 63-68.

[5] Edwards, R. E.: *Functional analysis, Theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[6] Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.: *Asymptotic Representations of Solutions of Nonautomous Ordinary Differential Equations With Regularly Varying Nonlinearities.* Diff. Eq., Vol. **47**, Issue 5 (2011), 627-649.

[7] Feigenbaum, J.:*Second-, third-, and higher-order consumption functions: a precautionary tale.* J. Econ. Dyn. Control, **29** (2005), 1385-1425.

[8] Gabaix, X.: *Power Laws in Economics and Finance.* Annu. Rev. Econ.**1** (2009), 255-93.

[9] Goppold, A.: *Information and third order ontology.* BioSystem, **46** (1998), 169-173.

[10] Greguš, M.: *Third Order Linear Differential Equations.* Mathematics and its applications 22, D. Riedel Pub. Co., 1987.

[11] Jaroš, J., Kusano, T.: *On White Hole Solutions of a Class of Nonlinear Ordinary Differential Equations of the Second Order.* Funkcialaj Ekvcioj, Vol. **45**, (2002), 319-339.

[12] Jaroš, J., Kusano, T., Manojlović, J.: *Asymptotic analysis of positive solutions of generalized Emden-Fowler differenctial equations in the framework of regular variation.* Cent. Eur. J. Math. **11**(12) (2013), 2215-2233.

[13] Jaroš, J., Kusano, L., Tanigawa, T.: *Asymptotic analysis of positive solutions of a class of third order nonlinear differential equations in the framework of regular variation.* Math. Nachr., Vol. **286**, Issue 2-3 (2013), 205-223.

[14] Jaroš, J., Kusano, L., Tanigawa, T.: *Existence and Precise Asymptotics of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Differenctial Equations of the Third Order.* Georgian Math. J., Vol. **20**, Issue 3 (2013), 493-531.

[15] Jones, P. G., Thornton, P. K.: *Fitting a third-order markov rainfall model to interpolated climate surface.* Agr. Forest Meteorol. **97** (1999), 213-231.

[16] Kamo, K., Usami, H.: *Asymptotic forms of positive solutions of quasilinear ordinary differential equations with singular nonlinearities.* Nonlinear Anal. 01/2008; **68**(6), 1627-1639.

[17] Kamo, K., Usami, H.: *Asymptotic forms of positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations with sub-homogeneity.* Hiroshima Math. J., **31** (2001), 35-49.

[18] Kamo, K., Usami, H.: *Asymptotic forms of positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations.* Adv. Math. Sci. Appl. **10** (2000), 673-688.

[19] Kučerová, I.: *Decaying regularly varying solutions of third-order differential equations with a singular nonlinearity*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, (v tlači).

[20] Kusano, T., Manojlović, J.: *Asymptotic behavior of positive solutions of odd order Emden-Fowler type differential equations in the framework of regular variation.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2012, No. **45** (2012), 1-23.

[21] Kusano, T., Manojlović, J.: *Asymptotic behavior of positive solutions of sublinear differential equations of Emden-Fowler type.* Comput. Math. Appl., Vol. **62**, Issue 2 (2011), 551-565.

[22] Kusano, T., Manojlović, J.: *Complete asymptotic analysis of positive solutions of odd-order nonlinear differential equation* Lithuanian Mathematical Journal, Vol **53**, No. 1, (2013), 40-62.

[23] Kusano, T., Manojlović, J.: *Precise asymptotic behavior of solutions of the sublinear Emden-Fowler differential equation.* Appl. Math. Comput., Vol. **217** (2011), 4382-4396.

[24] Kusano T., Marić, V., Tanigawa, T.: *An asymptotic analysis of positive solutions of generalized Thomas-Fermi differential equations - The sub-half-linear case.* Nonlinear Anal. Vol **75** (2012), 2474-2485.

[25] Kusano, T., Naito, M.: *Kiguradze classes for radial entire solutions of higher order quasilinear elliptic equations*, Hiroshima Mathematical Journal, 22 (1992), 301-363.

[26] Kusano, T., Singh, B. Positive solutions of functional differential equation with singular nonlinear terms. Nonlinear Anal., **09**, No. 8 (9) (1984), 1081-1090.

[27] Kusano T., Tanigawa, T.: *Positive Solutions to a Class of Second Order Differential Equations with Singular Nonlinearities.* Appl. Anal. Vol **69**(3-4) (1998), 315-331.

[28] Marić, V.: *Regular variation and differential equations.* Lecture notes in Mathematics Vol. **1726**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[29] Marić, V., Tomić, M.: *Asymptotic properties of the equation* $y'' = f(x)Q(y(x))$. MZ, **149** (1976), 261-6.

[30] Marić, V., Tomić, M.: *Regular variation and asymptotic properties of solutions of non-linear differential equations.* PIMB(NS), **21**, No. 35 (1977), 119-29.

[31] Mitrović, D. Zubrinić, D.: *Fundamentals of Applied Functional Analysis.* Addison Wesley Longman Inc., Harlow, 1998.

[32] Taliaferro, S.: *On the positive solutions of* $y'' + \phi(t)y^{-}\gamma = 0$. Nonlinear Anal., Vol. **2**, No. 4 (1978), 437-446.

[33] Tanigawa, T.: *Positive solutions to second order singular differential equations involving the one-dimensional M-Laplace operator.* Georgian Math. J., Vol. **6**, No. 4 (1999) 347-362.

[34] Taylor, A. E.: *L'Hospital's rule.* Amer. Math. Monthly **59**, No. 1 (1952), 20-24.

[35] Wong, P. K.: *Existence and asymptotic behaviour of proper solutions of a class of second-order non-linear differential equations*. Pacific J. Math. **13** (1963), 737-760.