



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**Mgr. Jozef Kováč**

Autoreferát dizertačnej práce

**Náhodné dynamické systémy generované zobrazeniami intervalu do seba**

na získanie akademického titulu *philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.9. Aplikovaná matematika

**Bratislava 2019**

**Dizertačná práca bola vypracovaná:**

v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

**Predkladateľ:** Mgr. Jozef Kováč

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

**Školiteľ:**

doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.  
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

Obhajoba dizertačnej práce sa koná ..... o ..... h  
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vyme-  
novanou predsedom odborovej komisie dňa .....  
v študijnom odbore 9.1.9. Aplikovaná matematika  
na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave,  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**Predseda odborovej komisie:**

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.  
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

# Úvod

Dynamické systémy slúžia na matematické opísanie pohybu bodu v danom priestore s meniacim sa časom - na ten sa môžeme pozeráť spojito alebo diskkrétne. V práci pracujeme výlučne s diskrétnym časom, teda bod v priestore sledujeme iba v určitých pravidelných časových okamihoch. Takéto systémy majú využitie v mnohých vedných odboroch, napr. fyzike (pohyb telies), biológii (populačná dynamika) alebo ekonómii (napr. [8],[11],[20],[25]). Teória sa zameriava najmä na dlhodobé správanie dynamických systémov - či sa po dostatočne dlhom čase systém ustáli v nejakom vyváženom stave (napr. pevnom bode) alebo či sa správa chaoticky, teda nepredvídateľne, resp. zdanlivo náhodne - napriek tomu, že systém je deterministický.

V štandardných dynamických systémoch sa na modelovanie používa jedna funkcia - to však môže byť na modelovanie reálnych situácií nedostačujúce, preto sa skúmajú aj tzv. neautonómne dynamické systémy, v ktorých sa berie do úvahy viacero funkcií. Dizertačná práca sa zameriava na systémy, v ktorých je zohľadnená aj istá náhodnosť a to takým spôsobom, že v každom kroku (čase) je pohyb bodu opísaný náhodne zvolenou funkciou z nejakej množiny funkcií (v práci spravidla dvojprvkovej). Takto vytvorené systémy možno zaradiť do triedy náhodných dynamických systémov. V literatúre sa možno stretnúť aj s pojmom systém iterovaných funkcií (z angl. „iterated function system”) - takéto systémy možno považovať za akúsi podmnožinu náhodných dynamických systémov.

Problematika náhodných dynamických systémov je pomerne nová - väčší rozmach literatúry v tejto oblasti možno zaznamenať v osemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia. Dynamickým systémom s náhodnými perturbáciami sa venovali napr. Ruelle v článku [21] z roku 1981, prípadne Kifer v monografii [17] z roku 1988. Ergodickej teórii náhodných transformácií je venovaná Kiferova publikácia [16] z roku 1986. Systémy iterovaných funkcií sa v tom čase študovali najmä v súvislosti s konštrukciou fraktálov - napríklad články Hutchinsona [15] a Barnsleyho et al. [6],[7]. Z novších publikácií možno spomenúť monografie Arnolda [3] z roku 1998 a Bhattacharyu a Majumdara [8] z roku 2007. Nakoľko je nám známe, štúdium náhodných dynamických systémov sa zameriava hlavne na existenciu stacionárneho rozdelenia (napr. [8],[12],[24]) a zriedkavejšie sa venuje témam týkajúcim sa chaosu - entropii je venovaná druhá kapitola monografie [16], chaosu v systémoch iterovaných funkcií sa venovali články [5] a [13] - avšak v týchto článkoch sa nebrala do úvahy pravdepodobnosť.

## Ciele a štruktúra

Dôležitou otázkou v teórii diskretných dynamických systémov je zložitosť takéhoto systému - v niektorých prípadoch sa systém môže správať v istom zmysle jednoducho (napr. každá trajektória konverguje k periodickej, špeciálne k pevnému bodu), inokedy sa systém neustáli, naopak, správa sa chaoticky (zdanlivo náhodne). Existuje viacero pojmov, ktoré zložitosť systému umožňujú charakterizovať - napr. viaceré typy chaosu, tranzitivita, topologická entropia a iné. Cieľom dizertačnej práce je študovať otázky zložitosti (resp. jednoduchosti) v náhodných dynamických systémoch, spravidla tvaru

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ g(x_n) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - p, \end{cases} \quad (1)$$

kde  $f, g$  sú spojité intervalové zobrazenia a  $p$  je číslo z intervalu  $[0, 1]$  (niekedy k takémuto systému pridávame aj malé náhodné perturbácie). Vyvstáva však prirodzená otázka - má vôbec zmysel venovať sa takýmto otázkam v náhodných dynamických systémoch, keďže sú vždy - z podstaty veci - náhodné (istým spôsobom chaotické)? Ukazuje sa, že áno, pretože v mnohých prípadoch sa môžu niektoré ich aspekty správať nenáhodne alebo aspoň - v istom zmysle - usporiadane, resp. jednoducho.

Práca má tri hlavné časti. Prvá časť je zameraná na systémy generované špeciálnou triedou zobrazení (tzv. Alleeho zobrazenia) používanými v populačnej dynamike. Jedným z cieľov v populačnej dynamike je zistiť, či populácia v dlhodobom horizonte prežije, alebo vyhynie - na to sme sa zamerali aj pri štúdiu modelu (1). Výsledky tejto časti boli publikované v [19]. V ďalších častiach sa zaoberáme otázkami chaosu v modeli (1), konkrétne distribučným chaosom (v druhej časti) a topologickou entropiou (v tretej časti). Výsledky druhej časti boli publikované v [18].

## 0 Náhodný dynamický systém - definícia

Predtým, než prejdeme k hlavným častiam, aspoň stručne formálne zadefinujeme náhodný dynamický systém (1), resp. jeho trajektóriu (vychádzame z [8] a [16]).

Označme  $\Omega$  množinu všetkých postupností funkcií  $f$  a  $g$  (t.j.  $\Omega = \{f, g\}^\infty$ ) a  $\mathcal{F}$  cylindrickú  $\sigma$ -algebru na  $\Omega$ . Označme  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  pravdepodobnostnú mieru na priestore  $(\Omega, \mathcal{F})$  definovanú konečnorozmernými pravdepodobnosťami

$$P(\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_{i_1} = \varphi_1, \dots, \omega_{i_n} = \varphi_n\}) = p^{\sum_{k=1}^n I_f(\varphi_k)} (1 - p)^{\sum_{k=1}^n I_g(\varphi_k)}, \quad (2)$$

kde  $n$  a  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$  sú prirodzené čísla,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \{f, g\}$  a

$$I_f(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \varphi = f \\ 0 & \text{ak } \varphi \neq f, \end{cases} \quad (3)$$

podobne  $I_g(\cdot)$ . Trajektóriu bodu  $x \in I$  náhodného dynamického systému (1) môžeme chápať ako náhodný proces  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  definovaný na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  predpisom

$$x_n(\omega) \equiv \omega_n(x_{n-1}(\omega)), \quad (4)$$

kde  $x_0(\omega) \equiv x$ , resp. predpisom

$$x_n(\omega) = \omega_n \circ \omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1(x). \quad (5)$$

Ak je dané  $x_n$ , potom náhodná premenná  $x_{n+1}$  zjavne nezávisí od  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$ , takže trajektória  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  je Markovov proces.

## 1 Alleeho zobrazenia

Alleeho zobrazenie je spojité zobrazenie z  $[0, b] \rightarrow [0, b]$  ( $b < \infty$ ), ktoré spĺňa nasledovné podmienky:

1.  $f$  má tri pevné body - nulu, ktorá je priťahujúcim pevným bodom, odpudzujúci bod  $A_f$  (budeme ho nazývať aj hraničný bod) a pevný bod  $K_f$  - ten môže, ale nemusí byť priťahujúci,
2.  $f(x) < x$  pre  $x \in (0, A_f) \cup (K_f, b]$ ,
3.  $f(x) > x$  pre  $x \in (A_f, K_f)$

(pozri napr. [20]). Takéto zobrazenie sa využíva na modelovanie veľkosti populácie, ktorá ma takzvaný Alleeho efekt (napr. [2],[10]). V deterministickom modeli s Alleeho zobrazením  $f$  platí, že ak je veľkosť populácie v  $n$ -tej generácii  $x_n$ , potom v nasledujúcej generácii je veľkosť populácie

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (6)$$

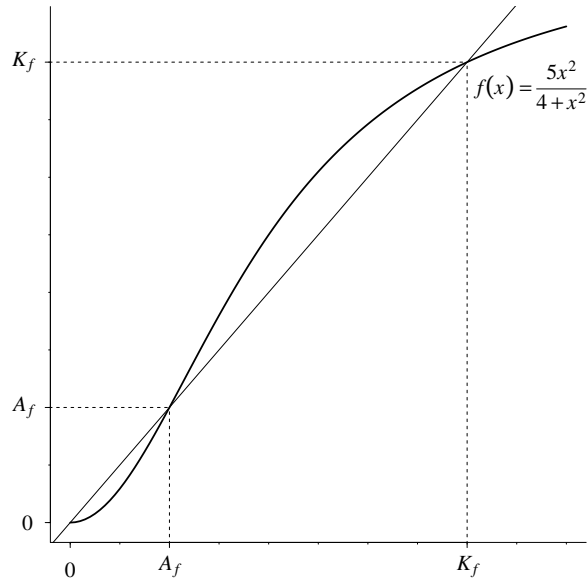
V tejto časti budeme uvažovať náhodný dynamický systém (1), kde  $f$  a  $g$  sú Alleeho zobrazenia, pričom rozoberieme prípad, keď  $f$  a  $g$  sú obe rastúce a prípad keď sú obe funkcie unimodálne.

## Rastúce Alleeho zobrazenia

Príkladom rastúceho Alleeho zobrazenia môže byť napríklad zobrazenie

$$f(x) = \frac{\rho x^2}{A + x^2}, \rho > 2\sqrt{A}, \rho > 0, A > 0 \quad (7)$$

(viď [14]). V nenáhodnom modeli (6) je správanie takéhoto systému veľmi jednoduché



Obr. 1: Príklad rýdzo rastúceho Alleeho zobrazenia.

- pokiaľ pre počiatočnú veľkosť populácie  $x_0$  platí  $x_0 > A_f$ , potom  $x_n \rightarrow K_f$ , teda populácia prežije. Naopak, ak  $x_0 < A_f$ , potom populácia vyhynie ( $x_n \rightarrow 0$ ).

Ukazuje sa, že správanie modelu (1) je v prípade rastúcich zobrazení veľmi podobné - pokiaľ je počiatočná veľkosť populácie nad nejakou hranicou, potom populácia v dlhodobom horizonte prežije a pokiaľ je pod nejakou inou hranicou, tak populácia vyhynie. Jediný rozdiel je teda v tom, že nemáme jednu hranicu, ale dve. V prípade, že je počiatočná veľkosť populácie práve medzi týmito hranicami, tak obidve situácie môžu nastať s nenulovou pravdepodobnosťou.

**Veta 1.** *Nech  $A_f < A_g < K_f < K_g$ . Potom*

(i) *ak  $x_0 \leq A_f$ , tak  $p_0 \equiv P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1$ ,*

(ii) *ak  $x_0 \geq A_g$ , tak  $p_1 \equiv P(\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in [K_f, K_g] \forall n \geq n_0) = 1$ ,*

(iii) *ak  $x_0 \in (A_f, A_g)$ , tak  $p_0 > 0, p_1 > 0$  a  $p_0 + p_1 = 1$ .*

Podobný výsledok sa dá ukázať aj v prípade, že by sme k systému (1) pridali aj (dostatočne) malé náhodné perturbácie - v takom prípade by sme mali opäť dve hranice.

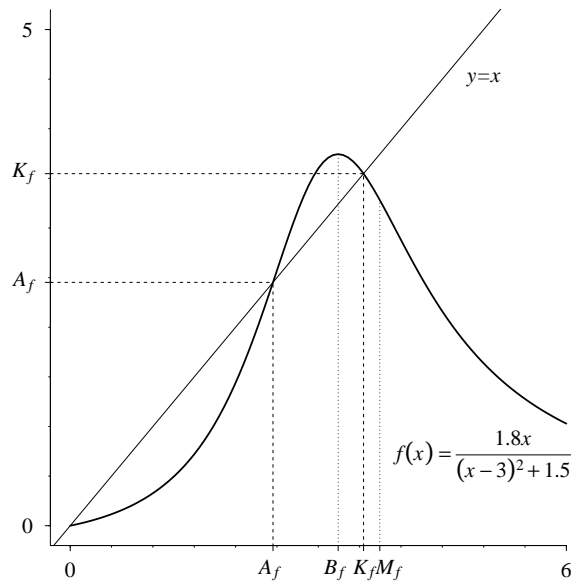
Analogické výsledky platia aj pre situáciu  $A_f < A_g < K_g < K_f$  alebo pre prípady, kedy  $A_f = A_g$ , resp.  $K_f = K_g$ . Ak platí  $A_f < K_f < A_g < K_g$  (alebo  $A_g < K_g < A_f < K_f$ ), dá sa ľahko ukázať, že v modeli (1)  $x_n \rightarrow 0$  s pravdepodobnosťou 1.

## Unimodálne Alleeho zobrazenia

V tejto časti predpokladáme, že existuje také  $B_f \in (A_f, K_f)$ , že funkcia  $f$  je rastúca na  $(0, B_f)$  a klesajúca na  $(B_f, b)$ . Maximum funkcie  $f$  budeme označovať  $M_f = f(B_f)$ . Príkladom takéhoto Alleeho zobrazenia je funkcia

$$f(x) = \frac{Gbx}{(x-T)^2 + b}, b, T > 0, G > 1 \quad (8)$$

(viď [4]). Podobne budeme uvažovať unimodálnu funkciu  $g$ , ktorá nadobúda maximum



Obr. 2: Príklad unimodálneho Alleeho zobrazenia.

$M_g$  v bode  $B_g$ . V deterministickom modeli (6) opäť platí, že ak  $x_0 < A_f$ , potom  $x_n \rightarrow 0$ . Avšak ak  $x_0 > A_f$ , potom sa správanie modelu môže líšiť v závislosti od zobrazenia  $f$  - systém môže konvergovať k bodu 0, k bodu  $K_f$  alebo k nejakému periodickému bodu, ale môže dôjsť aj ku chaotickému správaniu. Z hľadiska prežitia-vyhynutia je pre prežitie populácie postačujúce, aby platilo  $f(M_f) > A_f$  - v takomto prípade systém nikdy neklesne pod hraničný bod  $A_f$ . Nasledujúce dve vety hovoria, že v modeli (1) sa

takéto správanie môže výrazne zmeniť - za určitých podmienok totiž dôjde k vyhynutiu populácie s pravdepodobnosťou 1.

**Veta 2.** Nech  $A_f < A_g$  a nech  $f$  je diferencovateľná, pričom  $|f'(x)| < 1$  pre každé  $x \in (B_f, M_f)$ . Ak existujú také funkcie  $h_1, \dots, h_m \in \{f, g\}$ , pre ktoré platí  $h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$ , potom

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1 \quad (9)$$

pre ľubovoľné  $x_0$ .

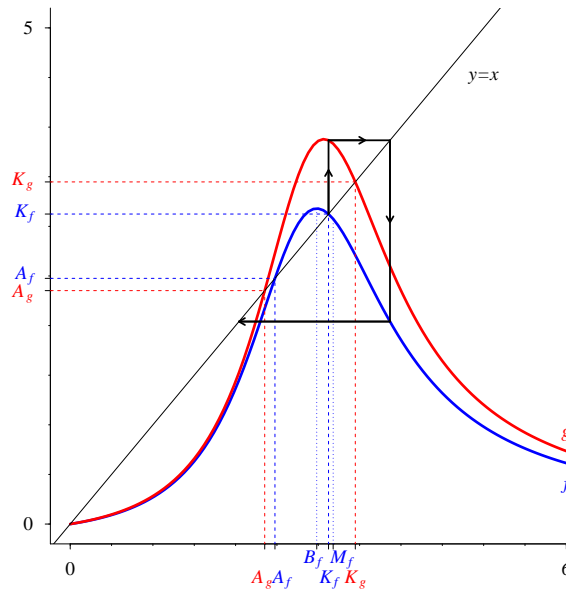
**Veta 3.** Nech  $A_g < A_f$  a nech  $f$  je diferencovateľná, pričom  $|f'(x)| < 1$  pre každé  $x \in (B_f, M_f)$ . Nech existujú také funkcie  $h_1, \dots, h_m \in \{f, g\}$ , že platí  $h_1 \circ \dots \circ h_m(K_f) < A_f$ . Ak navyše platí  $f(g(A_f)) \neq A_f$ , potom

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right) = 1 \quad (10)$$

pre ľubovoľné  $x_0$ .

Vetu 3 možno ilustrovať na nasledovnom príklade.

**Príklad 4.** Nech  $f(x) = \frac{1.155x}{(x-2.8)^2+1.05}$  a  $g(x) = \frac{1.3}{(x-2.9)^2+1}$  (pozri Obr. 3). V tomto prí-



Obr. 3: Príklad funkcií spĺňajúcich podmienky Vety 3.

pade  $A_f \approx 2.476$ ,  $K_f \approx 3.124$ ,  $A_g \approx 2.352$  a  $K_g \approx 3.448$  (a teda  $A_g < A_f$ ). Ďalej  $f(g(A_f)) \approx 2.986 \neq A_f$  a  $f(g(K_f)) \approx 2.041 < A_f$ . Navyše  $f$  je konkávna na  $(B_f, M_f)$



a  $f'(M_f) \approx -0.989 > -1$ , teda  $|f'(x)| < 1$  pre každé  $x \in (B_f, M_f)$  - tým sú splnené všetky podmienky Vety 3 a teda  $x_n \rightarrow 0$  s pravdepodobnosťou 1 pre ľubovoľné  $x_0$ .

Na tomto príklade je zaujímavé to, že ak vezmeme  $x_0$  z intervalu  $(A_f, M_f)$ , tak pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  platí  $f^n(x_0) \in [A_f, M_f]$  a  $g^n(x_0) \in [A_g, M_g]$ . To znamená, že pri oboch deterministických modeloch populácia prežije, avšak ak skombinujeme tieto dva modely, potom populácia s pravdepodobnosťou 1 vyhynie.

Analogické výsledky platia aj pre model s malými náhodnými perturbáciami.

## 2 Distribučný chaos

Uvažujme uzavretý interval  $I$  a spojité zobrazenia  $f, g : I \rightarrow I$ . Pripomeňme, že v deterministickom dynamickom systéme

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (11)$$

je pojem distribučného chaosu zadaný pomocou funkcie

$$F_{xy}^{(n)}(t) = \frac{1}{n} \#\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : |x_i - y_i| < t\}, \quad (12)$$

kde  $x_0 \equiv x$  a  $y_0 \equiv y$  [23]. Túto funkciu môžeme interpretovať ako pravdepodobnosť toho, že pre (rovnomerne) náhodne zvolené  $J$  z množiny  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  je vzdialenosť medzi bodmi  $x_J$  a  $y_J$  menšia ako  $t$ . Systém je potom distribučne chaotický, ak existujú také  $x, y \in I$  a také reálne čísla  $a < b$ , že táto pravdepodobnosť sa neustáli pre žiadne  $t \in (a, b)$ , teda keď platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t) < \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t) \quad (13)$$

pre každé  $t \in (a, b)$ . Funkciu  $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}$  (resp.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}$ ) nazývame dolná (resp. horná) distribučná funkcia a označujeme ju  $F_{xy}$  (resp.  $F_{xy}^*$ ).

Špecifikom distribučného chaosu je, že ho (na rozdiel od mnohých iných typov chaosu) vieme kvantifikovať - pomocou takzvanej miery chaosu  $\mu$  definovanej predpisom

$$\mu(f) = \sup_{x, y \in I} \frac{1}{|I|} \int_0^\infty (F_{xy}^*(t) - F_{xy}(t)) dt. \quad (14)$$

Platí, že  $\mu(f) \in [0, 1]$  a  $\mu(f) = 0$  práve vtedy, keď systém nie je distribučne chaotický.

Pomocou pravdepodobnostnej interpretácie môžeme v náhodnom dynamickom systéme (1) analogicky definovať funkciu  $F_{xy}^{(n)}$  ako

$$F_{xy}^{(n)}(t) = P(|x_J - y_J| < t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(|x_i - y_i| < t) \quad (15)$$

( $J$  je opäť náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na množine  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ).  
Dolnú a hornú distribučnú funkciu možno potom definovať rovnako ako v deterministic-  
kom prípade, podobne aj mieru chaosu - v tomto prípade ju budeme označovať  $\mu(f, g)$ .  
Ak je táto miera kladná, budeme hovoriť, že systém (1) je distribučne chaotický.

## Nulová miera chaosu

Vo všeobecnosti môže byť veľmi zložitú presne vypočítať mieru  $\mu(f, g)$ , avšak v niekto-  
rých (aj relatívne všeobecných) prípadoch sa dá ukázať, že táto miera je nulová.

**Tvrdenie 5.** Ak pre každé reálne číslo  $t$  a každé  $x, y \in I$  limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{xy}^{(n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|x_0 - y_0| < t) + \dots + P(|x_{n-1} - y_{n-1}| < t)}{n} \quad (16)$$

existuje, potom  $\mu(f, g) = 0$ .

**Tvrdenie 6.** Ak pre každé reálne číslo  $t$  a každé  $x, y \in I$  limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - y_n| < t) \quad (17)$$

existuje, potom  $\mu(f, g) = 0$ .

**Tvrdenie 7.** Ak sú funkcie  $f$  a  $g$  kontraktívne, potom  $\mu(f, g) = 0$ .

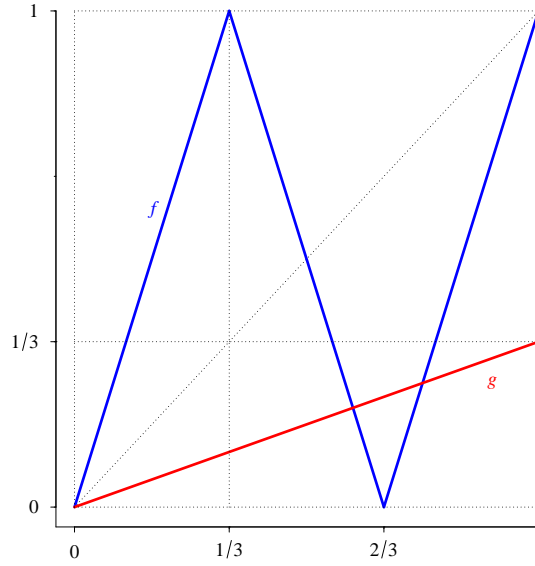
**Veta 8.** Nech  $f$  je Lipschitzovsky spojitá (t.j. existuje také  $M < \infty$ , že  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$  pre každé  $x, y \in I$ ) a nech  $g$  je kontraktívna (t.j. existuje také  $c < 1$ , že  $|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|$  pre každé  $x, y \in I$ ). Ďalej predpokladajme, že  $cM \geq 1$ . Označme  $r$  najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré  $c^r M \leq 1$ . Ak je pravdepodobnosť  $p$  (toho, že zvolíme funkciu  $f$ ) menšia ako  $\frac{1}{1+r}$ , potom  $\mu(f, g) = 0$ .

**Veta 9.** Nech  $f$  je Lipschitzovsky spojitá, nech  $g$  je kontraktívna (s takými istými kon-  
štantami  $M$  a  $c$  ako vo Vete 8) a nech  $cM \leq 1$ . Označme  $r$  najväčšie prirodzené číslo,  
pre ktoré  $cM^r \leq 1$ . Ak je pravdepodobnosť  $p$  menšia ako  $\frac{r}{1+r}$ , potom  $\mu(f, g) = 0$ .

**Veta 10.** Nech pre ľubovoľné  $x \in I$  platí, že trajektória  $x_n$  konverguje ku konečnej  
množine  $A \equiv \{a_1, \dots, a_m\}$  v takom zmysle, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n \in A) = 1 \quad (18)$$

Potom  $\mu(f, g) = 0$ .



Obr. 4: Funkcie  $f$  a  $g$  z Príkladu 11.

## Príklady chaotických systémov

Zatiaľ sa nám nepodarilo nájsť všeobecnejšie postačujúce podmienky na to, aby bol náhodný dynamický systém distribučne chaotický, avšak v niektorých chaotických systémoch sa nám podarilo presne vypočítať ich mieru chaosu.

**Príklad 11.** Uvažujme funkcie  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , kde

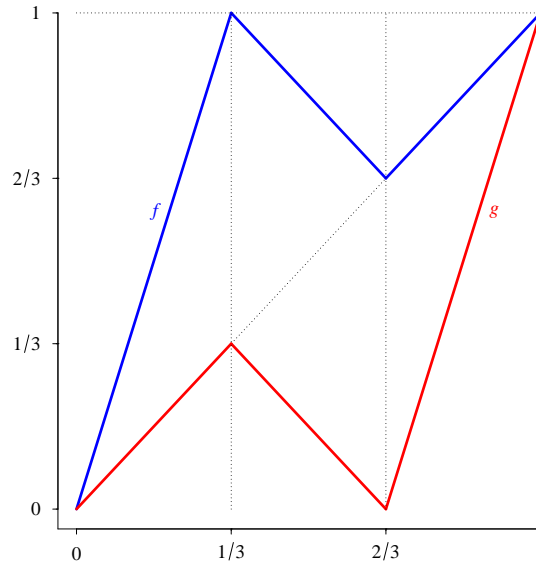
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -3x + 2 & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 3x - 2 & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (19)$$

a  $g(x) = \frac{1}{3}x$ . Miera chaosu systému generovaného týmito funkciami je

$$\mu(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p < \frac{1}{2}, \\ \frac{6p-3}{4p-1} & \text{ak } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (20)$$

**Príklad 12.** Nech  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sú dané predpismi

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -x + \frac{4}{3} & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ x & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (21)$$



Obr. 5: Funkcie  $f$  a  $g$  z Príkladu 12.

$a$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ -x + \frac{3}{2} & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 3x - 2 & \text{ak } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \quad (22)$$

Potom  $\mu(f, g) = 1$  pre ľubovoľné  $p \in (0, 1)$  a  $\mu(f, g) = 0$  pre  $p \in \{0, 1\}$ .

Zaujímavé na Príklade 12 je to, že obe funkcie  $f$  a  $g$  majú veľmi jednoduché správanie - ak by sme zobrali iba jednu z týchto funkcií, tak by každá trajektória konvergovala k pevnému bodu. Keď ich však skombinujeme, dostaneme chaotický systém.

## Nestabilita

V Príklade 12 môžeme vidieť, že ak sa na  $\mu(f, g)$  pozeráme ako na funkciu pravdepodobnosti, tak je táto funkcia nespojitá. Nasledujúce vety hovoria o tom, že  $\mu$  je nespojitá aj ako funkcia definovaná na priestore dvojíc spojitých funkcií  $C(I, I) \times C(I, I)$ .

**Veta 13.** *Nech  $f, g : I \rightarrow I$  sú spojité a nech  $p$  je z intervalu  $(0, 1)$ . Potom pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  existujú také spojité funkcie  $f^*$  a  $g^*$ , že  $d(f, f^*) < \varepsilon$ ,  $d(g, g^*) < \varepsilon$  a  $\mu(f^*, g^*) = 0$ . Miera  $d$  je daná predpisom*

$$d(f, f^*) \equiv \sup_{x \in I} |f(x) - f^*(x)|. \quad (23)$$

**Veta 14.** *Nech  $f, g : I \rightarrow I$  sú ľubovoľné spojité funkcie. Potom pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  existujú také spojité funkcie  $f^*, g^* : I \rightarrow I$ , že platí  $d(f, f^*) < \varepsilon$ ,  $d(g, g^*) < \varepsilon$  a náhodný dynamický systém generovaný funkciami  $f^*$  a  $g^*$  je chaotický.*

Z týchto viet vyplýva, že každý systém sa dá ľubovoľne malou zmenou zmeniť na nechaotický systém (Veta 13) a inou ľubovoľne malou zmenou zmeniť na systém chaotický (Veta 14). Zaujímavé je, že zatiaľ čo analógia Vety 14 platí aj v prípade nenáhodného dynamického systému (prechod od ľubovoľného systému k chaotickému), analógia Vety 13 v nenáhodných systémoch neplatí. Ak máme totiž spojité zobrazenie  $f$  na uzavretom intervale  $I$ , ktoré je distribučne chaotické, potom existuje také  $\varepsilon > 0$ , že pre každé spojité zobrazenie  $f^*$  platí

$$d(f, f^*) < \varepsilon \Rightarrow f^* \text{ je distribučne chaotické} \Leftrightarrow \mu(f^*) > 0. \quad (24)$$

To vyplýva z ekvivalencie distribučného chaosu a kladnej topologickej entropie na uzavretom intervale (viď [23]) a z toho, že topologická entropia je polospojité zdola (napr. [9]).

Na základe týchto výsledkov vieme ľahko skonštruovať náhodný dynamický systém generovaný distribučne chaotickými funkciami  $f^*$  a  $g^*$ , ktorý nie je distribučne chaotický. Možno postupovať nasledovným spôsobom:

1. zvolíme ľubovoľné distribučne chaotické funkcie  $f$  a  $g$ ,
2. pre  $f$  a  $g$  nájdeme také  $\varepsilon^*$ , aby pre obidve funkcie platila implikácia v (24),
3. pre  $\varepsilon^*$  podľa Vety 13 skonštruujeme funkcie  $f^*$  a  $g^*$  tak, že systém generovaný týmito funkciami nebude distribučne chaotický.

Zároveň ale platí, že  $d(f, f^*) < \varepsilon^*$  a  $d(g, g^*) < \varepsilon^*$ , takže podľa implikácie v (24) musia byť funkcie  $f^*$  a  $g^*$  distribučne chaotické. V tomto prípade nám teda náhodnosť dokáže akosi ‘odstrániť’ chaos (na rozdiel od Príkladu 12, kde nám naopak nechaotické funkcie  $f$  a  $g$  vygenerovali chaotický náhodný dynamický systém).

### 3 Topologická entropia

Uvažujme kompaktný metrický priestor  $(X, d)$  a nejaké jeho pokrytie  $\mathcal{A}$ . Označme

$$H(\mathcal{A}) \equiv \min\{\log |\mathcal{B}|, \text{ kde } \mathcal{B} \text{ je podpokrytie } \mathcal{A}\}$$

(vďaka kompaktnosti musí byť toto číslo menšie ako  $\infty$ ). Pripomeňme, že v nenáhodných dynamických systémoch, je topologická entropia definovaná ako

$$h(f) = \sup_{\mathcal{A} \text{ - pokrytie } X} h(f, \mathcal{A}), \quad (25)$$

(viď [1]), kde

- $h(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})),$
- $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\},$
- ak  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  a  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$  ( $I, J$  sú ľubovoľné indexové množiny), potom  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j\}_{(i,j) \in I \times J}.$

Pre náhodný dynamický systém (1) možno definovať topologickú entropiu nasledovne (postup preberáme z [16]). Uvažujme nejaké pevné  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$  (pripomeňme, že prvky  $\Omega$  sú postupnosti funkcií  $f$  a  $g$ ). Pre ľubovoľné pokrytie  $\mathcal{A}$  uvažujme pokrytie

$$\mathcal{A}^{\omega, n} = \mathcal{A} \vee \omega_1^{-1}(\mathcal{A}) \vee (\omega_2 \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee (\omega_{n-1} \circ \dots \circ \omega_1)^{-1}(\mathcal{A}). \quad (26)$$

Platí, že limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^{\omega, n}) \quad (27)$$

existuje a je rovnaká pre skoro všetky  $\omega \in \Omega$ , budeme ju označovať  $h(f, g; \mathcal{A})$ . Topologická entropia  $h(f, g)$  systému (1) je potom definovaná ako

$$h(f, g) = \sup_{\mathcal{A} \text{ - pokrytie } I} h(f, g; \mathcal{A}). \quad (28)$$

My sme sa zamerali na intervalové zobrazenia  $f, g : I \rightarrow I$  a ukázali niektoré výsledky, ktoré sú analogické výsledkom v nenáhodných dynamických systémoch.

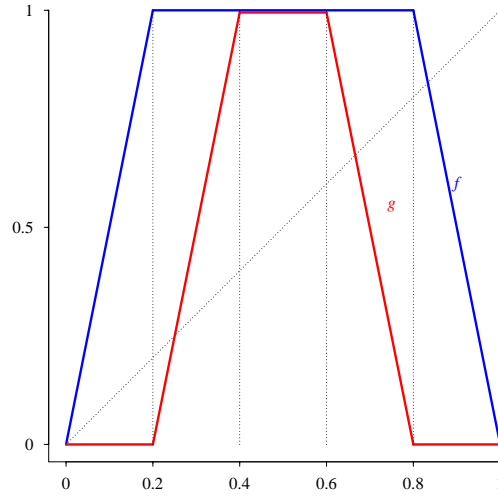
**Veta 15.** *Nech  $f$  a  $g$  majú rovnakú striktnú  $p$ -podkovu (t.j. existujú po dvoch disjunktné, uzavreté intervaly  $J_1, J_2, \dots, J_p \subseteq I$ , že  $J_1 \cup \dots \cup J_p \subseteq f(J_i)$  pre každé  $i = 1, 2, \dots, p$  a rovnako  $J_1 \cup \dots \cup J_p \subseteq g(J_i)$  pre každé  $i = 1, 2, \dots, p$ ). Potom  $h(f, g) \geq \log p$ .*

**Veta 16.** *Ak sú funkcie  $f$  a  $g$  monotónne na  $I$ . Potom  $h(f, g) = 0$ .*

**Veta 17.** *Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú Lipschitzovsky spojité, t.j. existujú čísla  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  také, že pre ľubovoľné  $x, y \in I$  platí*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \lambda_1 |x - y|, \\ |g(x) - g(y)| &\leq \lambda_2 |x - y|. \end{aligned}$$

*Označme  $\lambda \equiv \max(\lambda_1, \lambda_2)$ . Potom  $h(f, g) \leq \log \lambda$ .*



Obr. 6: Funkcie  $f$  a  $g$  z Príkladu 18.

V deterministických systémoch je kladná topologická entropia ekvivalentná s distribučným chaosom (viď napr. [22]). Nasledujúci príklad ilustruje, že v náhodných dynamických systémoch táto ekvivalencia neplatí.

**Príklad 18.** Uvažujme funkcie  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definované predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ 1 & \text{ak } x \in (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}), \\ -5x + 5 & \text{ak } x \in (\frac{4}{5}, 1], \end{cases} \quad (29)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ 5x - 1 & \text{ak } x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}], \\ 1 & \text{ak } x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), \\ -5x + 4 & \text{ak } x \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}], \\ 0 & \text{ak } x \in (\frac{4}{5}, 1]. \end{cases} \quad (30)$$

$J_1 = [0, \frac{2}{5}]$  a  $J_2 = [\frac{3}{5}, 1]$  je zjavne spoločná striktná podkova, čiže topologická entropia systému (1) je aspoň  $\log 2$ . Zároveň ale zjavne  $x_n(\omega) \rightarrow 0$  skoro iste pre ľubovoľné  $x$ , takže miera chaosu je podľa Vety 10 nulová. Kladná topologická entropia teda neimplikuje distribučný chaos. Opačnú implikáciu sa nám zatiaľ nepodarilo dokázať ani vyvrátiť.

## Summary

In the thesis, we study random dynamical systems generated by continuous interval maps. The thesis has three main parts. The first part deals with random dynamical systems generated by two Allee maps. These maps are used in population dynamics. It is shown that the behavior of the random dynamical systems is very similar to the behavior of the deterministic system if we use strictly increasing Allee maps. However, in the case of unimodal Allee maps, the behavior can dramatically change. The second part deals with distributional chaos and its measure in random dynamical systems. We give some sufficient conditions for a zero measure of chaos and examples of chaotic systems. We demonstrate that the chaoticity of the functions that generate a system does not, in general, affect the chaoticity of the system, i.e. a chaotic system can arise from two nonchaotic functions and vice versa. Finally, we show that distributional chaos for random dynamical system is, in some sense, unstable. In the last part, we study the topological entropy. We show some conditions for upper and lower bounds for the topological entropy and we deal with the relationship between the topological entropy and distributional chaos.



## Literatúra

- [1] Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.: Topological Entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* 114(2) (1965), pp. 309–319.
- [2] Allee W.C.: Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes, *J. Exp. Zool.* 61 (1932), pp. 185–207.
- [3] Arnold L.: *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [4] Asmussen M. A.: Density-dependent selection II. The Allee effect, *Am. Nat.* 114 (1979), pp. 796–809.
- [5] Bahabadi A. Z.: On chaos for iterated function systems, *Asian-Eur. J. Math.* 11 (2018), pp. 1850054.
- [6] Barnsley M. F., Demko S.: Iterated function systems and the global construction of fractals, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 399 (1985), pp. 243–275.
- [7] Barnsley M. F., Elton J. H., Hardin D. P.: Recurrent Iterated Function Systems, *Constr. Approx.* 5 (1989), pp. 3–31.
- [8] Bhattacharya R., Majumdar M.: *Random Dynamical Systems: Theory and Application*, Cambridge University Press (2007).
- [9] L.S. Block and W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1513, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [10] Boukal D.S., Berec L.: Single-species models of the Allee effect: extinction boundaries, sex ratios and mate encounters, *J. theor. Biol.* 218 (2002), pp. 375–394.
- [11] Braverman E.: Random perturbation of difference equations with Allee effect: switch of stability properties, *Future Directions in Difference Equations* (2011), pp. 51–60.
- [12] Diaconis P., Freedman D.: Iterated Random Functions, *SIAM Rev.* 41(1) (1999), pp. 45–76.
- [13] Ghane F. H., Rezaali E., Saleh M., Sarizadeh A.: Sensitivity of iterated function systems, *J. Math. Anal. Appl.* 496(2) (2019) pp 493–503.

- [14] Hoppensteadt F. C.: *Mathematical Methods of Population Biology*, Cambridge University Press (1982).
- [15] Hutchinson J. E.: Fractals and self similarity *Indiana Univ. Math. J.* (1981), pp. 713–747.
- [16] Kifer Y.: *Ergodic Theory of Random Transformation*, Birkhäuser, Boston (1986).
- [17] Kifer Y.: *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (1988).
- [18] Kováč J., Janková K.: Distributional chaos in random dynamical systems, *J. Difference Equ. Appl.* (2019), v tlači, dostupné online na <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1581182>.
- [19] Kováč J., Janková K.: Random Dynamical Dystems Generated by Two Allee Maps, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 27(8) (2017) pp. 1750117.
- [20] Luís R., Elaydi S., Oliveira H.: Non-autonomous periodic systems with Allee effects, *J. Difference Equ. Appl.* 16(10) (2010), pp. 1179-1196.
- [21] Ruelle, D.: Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definition of Attractors, *Commun. Math. Phys.* 82 (1981), pp. 137-151.
- [22] Ruelle S.: *Chaos on the interval*, American Mathematical Society (2017).
- [23] Schweizer B., Smítal J.: Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval, *Trans. Amer. Math. Soc.* 344(2) (1994) pp. 737–754.
- [24] Stenflo Ö.: A survey of average contractive iterated function systems, *J. Difference Equ. Appl.* 18(8) (2012) pp. 1355–1380.
- [25] Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison Wesley (1994).

## Zoznam publikácií

1. Kováč J., Janková K.: Random Dynamical Dystems Generated by Two Allee Maps, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 27(8) (2017) pp. 1750117.
2. Kováč J., Janková K.: Distributional chaos in random dynamical systems, *J. Difference Equ. Appl.* (2019), v tlači, dostupné online na <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1581182>.
3. Kováč J.: Náhodné dynamické systémy generované dvomi Alleeho zobrazeniami (abstrakt), *Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2017: Zborník príspevkov*.
4. Kováč J.: Distribučný chaos v náhodných dynamických systémoch (abstrakt), *Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2018: Zborník príspevkov*.

## Účasť na konferenciách

- CSWDS 2016 - Czech-Slovak Workshop on Discrete Dynamical Systems, Karlova Studánka, Česko, 2016. Prednáška
- VCDS 2017 - 7th Visegrad Conference on Dynamical Systems, Opava, Česko, 2017. Prednáška
- CSWDS 2018 - Czech-Slovak Workshop on Discrete Dynamical Systems, Banská Bystrica, 2018. Prednáška

## Granty

- Diskrétné a spojité pravdepodobnostné modely a ich aplikácie (spoluriešiteľ)  
Grant VEGA 2/0047/15  
Hlavný riešiteľ: Prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.
- Náhodné dynamické systémy generované zobrazeniami intervalu do seba (hlavný riešiteľ)  
Grant UK/344/2016
- Chaos v náhodných dynamických systémoch (hlavný riešiteľ)  
Grant UK/236/2017

- Chaos v náhodných dynamických systémoch II (hlavný riešiteľ)  
Grant UK/151/2018
- Nové štatistické metódy pre špeciálne triedy rozdelení pravdepodobnosti a ich aplikácie (spoluriešiteľ)  
Grant VEGA 2/0054/18  
Hlavný riešiteľ: Prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.