



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Dominika Koštová

Autoreferát dizertačnej práce

**VIZUALIZÁCIA MATEMATICKÝCH POJMOV, RELÁCIÍ A VZŤAHOV
ŠKOLSKEJ MATEMATIKY**

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:

9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Miesto a dátum:

Bratislava 2014

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: **Mgr. Dominika Koštová**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: **doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., mim. prof.**
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava

Oponenti:
.....
.....
.....
.....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná o h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie v študijnom odbore 9.1.8
Teória vyučovania matematiky na
.....

Predseda odborovej komisie:

Prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, 842 48 Bratislava

OBSAH AUTOREFERÁTU

<u>ÚVOD A ROZDELENIE DIZERTAČNEJ PRÁCE</u>	<u>3</u>
<u>CIEĽ PRÁCE A VÝSKUMNÉ OTÁZKY</u>	<u>4</u>
<u>VIZUALIZÁCIA A JEJ DOTERAJŠÍ VÝSKUM</u>	<u>5</u>
<u>NÁŠ VÝSKUM</u>	<u>7</u>
<u>PREPIS Z POZOROVANIA - PROTOKOL</u>	<u>9</u>
<u>ZHRNUTIE</u>	<u>11</u>
<u>ZÁVER</u>	<u>12</u>
<u>ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁC PREDKLADATEĽA</u>	<u>14</u>
<u>ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY</u>	<u>14</u>
<u>SUMMARY</u>	<u>20</u>

ÚVOD A ROZDELENIE DIZERTAČNEJ PRÁCE

„Vizualizácia ponúka spôsob
ako vidieť neviditeľné.“
(Arcavi, 2003, str. 216)

V dizertačnej práci poskytujeme teoretické pozadie, prehľad aktuálnych vedeckých výskumov, cieľ práce i metódy, postup a výsledky výskumu otázok o vizualizácii.

Prvá kapitola, ponúka **teoretické východiská našej práce**. Vychádzame z Piagetovej vývinovej teórie. Svet školy vkladáme medzi tri Bolzano-Popperove svety, opisujeme poznávací proces a vyučovanie Hejného metódou. Ponúkame pohľad na vizualizáciu z perspektívy štátneho vzdelávacieho programu. Ďalej rozoberáme stránky vizuálno-priestorovej inteligencie, jednotlivé stupne matematickej predstavy a porovnávame modely so šablónami. Predkladáme definíciu vizualizácie, uvádzame úlohu, dôvody, výhody, ako aj problémy používania vizualizácie vo vzdelávacom procese. Opisujeme typy vizualizácií. Predstavujeme dynamický softvér GeoGebra, náš applet

Násobenie dvojčiferných čísel a v neposlednom rade ponúkame pohľad na definície pojmov, relácií a vzťahov.

Druhá kapitola, **Súčasný stav poznatkov o téme**, poskytuje prehľad dôležitých aktivít a aktuálnych publikovaných výskumov súčasných slovenských i zahraničných autorov o vizualizácií za posledných tridsať rokov. Takisto sa v tejto kapitole nachádza stručný prehľad činností spojených s programom GeoGebra.

V tretej kapitole, **Cieľ práce a metódy skúmania**, oboznamuje čitateľa s našim cieľom, výskumnými otázkami, stratégiou, charakteristikou participantov výskumu, výskumnými metódami získavania, záznamu a analýzy údajov z uskutočneného kvalitatívneho výskumu.

Štvrtú a zároveň najrozsiahlejšiu kapitolu dizertačnej práce, tvoria **výsledky výskumu**, kde sme opísali vyše tridsaťpäť situácií, ktoré sme doplnili opismi a odpoveďami na výskumné otázky.

V piatej kapitole sa nachádza **zhrnutie** najdôležitejších zistení z nášho výskumu.

CIEĽ PRÁCE A VÝSKUMNÉ OTÁZKY

Témou dizertačnej práce je *Vizualizácia matematických pojmov, relácií a vzťahov školskej matematiky*. V diele *Výskum vizualizácie v učení a vyučovaní matematiky* (Presmegová, 2006) autorka ponúka námety vhodné pre ďalší výskum. Nás inšpirovala otázka **aká je interakcia vizualizácie a didaktiky matematiky**. Naším cieľom je zistiť čo najviac o tejto interakcii. Tento cieľ možno rozviť v nasledujúcich dvoch bodoch:

- pretože je potrebné aby v našom výskume boli používané vizualizácie, je potrebné **zabezpečiť alternatívne didaktické materiály, teda vizuálne pomôcky, ktoré sa dajú použiť na hodinách matematiky**;
- a zároveň **skúmať vzájomné ovplyvňovanie vizualizácie a didaktiky matematiky** na hodinách matematiky.

Pri formulovaní týchto bodov sme nepredpokladali, že učiteľka, participantka nášho výskumu, bude natoľko podnecovať žiakov, aby si počas hodín matematiky vytvárali vizualizácie. Samotné vyučovacie hodiny boli dostatočne bohaté na vizualizácie a nebolo potrebné dodávať z našej strany umelo vložené materiály. Napriek tomu sme sa rozhodli vytvoriť alternatívny didaktický materiál, ktorý vizualizuje princíp násobenia dvojčiferných čísel. V práci sme predstavili tento applet a opísali sme dve vyučovacie hodiny, na ktorých sme tento applet použili, zamerali sme sa na to, ako žiaci vnímajú túto vizualizáciu. Navyše počas výskumu sme spolupracovali pri tvorbe niektorých materiálov na vyučovacie hodiny.

Druhému bodu sa venujú kapitoly *Výsledky výskumu a Zhrnutie*, v ktorých sme sa pomocou odpovedí na výskumné otázky snažili objasniť vzťah vizualizácie a didaktiky matematiky. Vo svojich odpovediach sa opierame o analyzované prepisy nahrávok, interview a produkty participantov.

Tak ako sme spomínali, nevedeli sme presne, s ktorými situáciami prideme do konfrontácie. Napriek tomu sme formulovali nasledujúce **otázky** ako základné hľadiská výskumu, na ktoré sme upriamovali svoju pozornosť. Verili sme, že na väčšinu z nich sa nám podarí nájsť odpovede.

- Aká je úloha vizualizácie vo vyučovaní matematiky?
- Prečo sa vizualizácia využíva častejšie v niektorých témach matematiky?
- Čo je charakteristické pre učivo, v ktorom sa využíva vizualizácia?
- Je možné tieto charakteristiky transformovať aj do netypických tém pre vizualizovanie?
- Ako sa prenáša vizualizácia od učiteľa k žiakom?
- Aké vizuálne reprezentácie sa dostanú do žiackej hlavy?
- Ako žiaci spracovávajú vizuálne vnemy?
- Ako žiaci zapájajú svoje vizuálne myslenie na hodinách matematiky?
- Ako žiakom pomáhajú / nepomáhajú vizuálne reprezentácie pri chápaní, pamätaní a reprodukovani učiva?
- Ako žiakom pomáhajú vizuálne reprezentácie v reálnom živote?
- Aké sú rozdiely medzi žiakmi, ktorí používajú vizualizáciu a tými, ktorí ju nepoužívajú?

Počas výskumu sme zistili, že takto formulované otázky nám neposkytujú upokojujúce odpovede. Aby sme sa dozvedeli viacej, rozhodli sme sa k nim doplniť **d'alšie otázky**:

- ❖ V ktorých témach matematiky participanti využívali vizualizácie?
- ❖ V ktorých prípadoch žiaci nepoužili vizualizácie?
- ❖ Prečo žiaci v niektorých prípadoch nevyužívali vizualizáciu?
- ❖ Aké vizuálne reprezentácie pomáhajú / nepomáhajú žiakom pri chápaní, pamätaní a reprodukovani učiva?
- ❖ Ako žiakom pomáhajú vizuálne reprezentácie z reálneho života?

VIZUALIZÁCIA A JEJ DOTERAJŠÍ VÝSKUM

Vizualizáciu v našej práci chápeme tak, ako ju charakterizoval Arcavi: „Vizualizácia je schopnosť, proces a produkt tvorenia, interpretácie, používania a reflexie obrazov, predstáv, schém v našich myšliach, na papieri alebo s použitím technologických nástrojov, s cieľom opisovať a komunikovať informácie, myslieť a rozvíjať doposiaľ neznáme myšlienky a nasledujúce pochopenia.“ (Arcavi, 2003, str. 217)

Podľa nášho názoru, vizualizácia na hodinách matematiky sa dá využiť ako dobrý nástroj pri riešení úloh. Uvedomujeme si, že vizualizácia nie je hlavným cieľom vyučovania, je však dobrou pomôckou vedúcou k zovšeobecňovaniu, ako to tvrdí aj Presmegová. Tá opisuje vo svojom výskume, ako vplýva vzťah učiteľa k vizualizáciám na výkon žiakov. Najlepšie výsledky dosiahli žiaci, ktorých učitelia sami používali, ale aj nabádali žiakov používať vizualizácie počas hodín matematiky, no zdôrazňovali, že vizualizácie nepredstavujú hlavný cieľ vyučovania, ale napomáhajú ku zovšeobecňovaniu. (Presmegová, 2006)

V roku 1999 Gray a Pittaová upozorňovali na to, že štúdium vizualizácie prináša so sebou isté problémy. Jediný spôsob, ako sa dozvedieť o vizualizáciách žiakov je sledovať opisy a vonkajšie reprezentácie, ktoré nemusia byť vždy totožné s mentálnymi obrazmi. (Presmegová, 2006)

Arcavi opísal úlohy vizuálnych reprezentácií (Arcavi, 2003). Tie ilustrujú symbolické výsledky, pomáhajú vyriešiť rozpor medzi odhadom a symbolickým riešením a odкрývajú niektoré skryté alebo zabudnuté vlastnosti symbolickej matematiky. Piggottová a Woodhamová písali, že vizualizácie sa požívajú na pochopenie problému, jeho modelovanie a navrhnutie ďalších krokov. (Piggottová – Woodhamová, 2012) Brown a Wheatley v roku 1990 uviedli, že žiaci používajú predstavivosť pri odôvodňovaní v matematike. (Presmegová, 2006) A Kadunz a Sträßer predpokladali, „že žiak využíva metafory v situáciách, ktorým až tak dobre nerozumie.“ (Kadunz - Sträßer, 2004, str. 245)

Dôvod, prečo používať vizualizácie zdôrazňoval Fulier - jednoduchý, elegantný a účinný prístup k objavovaniu. (Fulier, 2009) Paivio a Dreyfus zistili, že použitie vizualizácie je najviac ovplyvnené zadaním príkladu, vopred určeným typom riešenia a sociokultúrnym prostredím. (Presmegová, 2006)

Healyová a Hoylesová ale aj Eisenberg hovorili, že väčšina žiakov nerada zapája vizuálne myslenie na vyučovaní. (Presmegová, 2006) Na druhej strane, na základe záverov výskumov Stylianouovej z roku 2001 vyplynulo, že žiaci sú ochotní používať vizualizácie, ak sa s nimi naučia aspoň trochu pracovať. (Presmegová, 2006) Účastníci v diskusnej skupine na *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* v roku 2001 formulovali, že existuje korelácia medzi žiackou predstavivosťou a ich citovým vzťahom k matematike. (Presmegová, 2006)

Eisenberg a Dreyfus opísali tri typy problémov pri používaní vizualizácie – kultúrne, sociálne a kognitívne problémy. (Arcavi, 2003) Mourão upozorňuje na problémy pri zovšeobecňovaní „nehodných“ vlastností (Presmegová, 2006). Tall uvádza, že dôvod, prečo žiaci nedokážu použiť vizualizáciu, môže byť aj v jednoduchosti obrázkov, ku

ktorým je potrebná dávka domýšľavosti a bez nej im zväčša neporozumejú a nedokážu ich aplikovať. (Tall, 1991)

Abdullah, Zakaria a Halim vo svojom experimente so žiakmi základnej školy zistili, že vizuálne reprezentácie sú vhodným nástrojom pre porozumenie zadaniu a úspešné riešenie slovných úloh z matematiky, pretože žiakom odkrývajú rôzne prepojenia. (Abdullah - Zakaria – Halim, 2012) Arcavi a jeho spolupracovníci v rokoch 2001 - 2003 publikovali, že softvér umožňuje vizualizáciu procesov, ktoré môžu objasniť riešenie matematického problému. (Presmegová, 2006)

NÁŠ VÝSKUM

Viac ako kvantitatívne ohodnotenie určitých javov, nás zaujímalo, ako a prečo tieto javy fungujú, s čím súvisia a čo ich ovplyvňuje. Preto sme si vybrali **kvalitatívny výskum**. Pre kvalitatívny výskum je typická potreba porozumenia javom, prirodzené prostredie, malá skupina skúmaných osôb a induktívny prístup, od jednotlivých údajov k vytvoreniu teórie. Okrem vyššie opísaného záujmu, ďalším dôvodom, pre ktorý sme sa rozhodli pre túto alternatívu výskumu, bolo, že doposiaľ sme nepoznali odpovede na naše otázky a teda nemohli sme sa o ne pri našom výskume oprieť.

Uskutočnili sme **výskum s uzavretou vzorkou**. Zvolili sme si ho kvôli tomu, že sme vedeli, že po analýze prvotných údajov už nebudeme mať dostatok časových možností opakovane preskúmať všetky naše závery alebo ich konfrontovať s nejakou novou vzorkou.

Najskôr sme si vybrali skúmané osoby, **participantov** nášho výskumu, ktorými boli učiteľka matematiky a žiaci nižšieho sekundárneho vzdelávania (druhého stupňa základnej školy).

Žiaci, participantí výskumu, navštevujú základnú školu pre intelektuálne nadané deti. Pred vstupom do prvého ročníka, žiaci prešli intelligenčnými testami. Títo žiaci sú živí, zvedaví a aktívni. Učia sa počúvať sa a pripravovať sa na vyučovanie sami. Žiaci boli rôznorodí, niektorí z početnejších rodín (tri a viac detí), iní naopak jedináčikovia. Niektorí žiaci boli z úplných rodín, iní z neúplných rodín (rodičia boli rozvedení, prípadne chýbala prítomnosť jedného z rodičov). Žiakov bolo spolu **dvadsaťtri**, z toho bolo **sedem dievčat** a **šestnásť chlapcov**. Jedna žiacka, kvôli zdravotným problémom nemohla navštevovať školu počas prvých dvoch mesiacov nášho výskumu. Neskôr sa však bezproblémovo zapojila do vyučovania. Všetci žiaci uspeli v celoslovenskom *Testovaní 5* z matematiky (NÚCEM, 2013) nadpriemerne. Žiaci aj keď boli oboznámení s tým, že hodiny matematiky sú nahrávané, veľmi rýchlo zabudli na tento fakt a správali sa prirodzene. Na hrávanie a pozorovanie boli zvyknutí, pretože na ich hodinách sa v minulosti zúčastnili študenti učiteľstva, iní učelia a aj rodičia. Učiteľka

matematiky spomenula, že aj sama niekoľkokrát nahrávala hodiny matematiky na súkromné výskumné účely.

Učiteľka z nášho výskumu vyučuje približne dvadsať rokov matematiku a iné predmety. Sama bola vyučovaná Hejného metódou, ktorej princípy uplatňovala aj počas nami pozorovaných hodín matematiky. Jedna z podmienok, ktoré sme si stanovili bola, že učiteľka matematiky nezastávala záporný postoj k vizualizácií. Týchto žiakov učila v treťom a štvrtom ročníku ako asistentka inej pani učiteľky. Zároveň žiakov sprevádza pri tvorbe triednych projektov a na vystúpeniach, zúčastňuje sa na ich triednych výletoch a školách v prírode.

Riaditeľka školy, v ktorej sa uskutočnil náš výskum, bola vopred informovaná a súhlasila s uskutočnením výskumu.

Našou hlavnou výskumnou metódou bolo **neštruktúrované pozorovanie**, ktorého základom je neposudzovať realitu cez vopred stanovené schémy, ale otvorenosť novým a neočakávaným situáciám. Takto sme odhalili nové nepredpokladané procesy, vzťahy a získali podrobný opis skúmaných situácií. Do niektorých situácií počas vyučovania sme sa aktívne zapojili, no vo viacerých situácií sme zaujali pasívny postoj. Zaujímalo nás prirodzené prostredie, bez nášho výrazného zásahu. Preto náš stupeň participácie charakterizujeme ako **čiasťočne aktívny**.

Naše pozorovanie sme doplnili o **pološtruktúrované interview**, teda bežné rozhovory s participantmi na tému výskumu. Tieto rozhovory sme uskutočňovali cez prestávky alebo voľné hodiny počas obdobia nášho pozorovania. Zopár krátkych interview sme spravili s niekoľko mesačným odstupom.

Poslednou zložkou nášho skúmania boli **produkty participantov** ako napríklad zošity, písomky a domáce úlohy. Tie sú vhodným doplnkom k triangulácii, teda k spresneniu a kontrole, našich údajov.

Pozorovanie a rozhovory so skúmanými osobami sme uskutočňovali v priebehu mesiacov september 2013 až január 2014 a ešte počas jednej návštevy v máji 2014. Počas tohto obdobia sme zhromaždili množstvo audionahrávok z vyučovacích hodín, rozhovorov i práce skúmaných osôb. Zaznamenávali sme všetky informácie, ktoré sme dokázali naraz obsiahnuť, čo najpodrobnejšie a najvernejšie. Využívali sme pritom audiozáznam, ktorý sme obohatili neverbálnymi prejavmi participantov a našimi poznámkami.

Zúčastnili sme sa na **päťdesiatich dvoch vyučovacích hodinách**, niekoľkých osobných alebo skupinových rozhovoroch so žiakmi i na viacerých rozhovoroch s učiteľkou matematiky. Boli sme sa pozrieť na dve divadelné vystúpenia participantov. Prezreli sme žiacke písomky, diktáty, ktoré písali počas nášho výskumu a počas hodín sme

sledovali ich vizualizácie v zošitoch. Všetky tieto produkty sme si vyfotografovali.

Z pozorovaní a interview sme vytvorili **protokoly** (prepisy zvukových záznamov), v ktorých sme zachovali identitu žiakov tým, že sme každému žiakovi priradili fiktívne meno. Pre lepšiu orientáciu sme mená vybrali tak, aby sa žiadne dve nezačínali na to isté písmeno abecedy. Pohlavie participantov sme zachovali.

Po skončení prác v teréne sme si všetky záznamy usporiadali, aby sme sa v nich následne vedeli dobre orientovať. Nato sme prešli všetky záznamy, opakovane sme si čítali všetky situácie, snažili sme sa dobre porozumieť výpovediam a produktom participantov. Opäť sme si prehrávali nahrávky, aby sme si lepšie uvedomili pocity a momentálne rozpoloženie participantov. Po niekoľkých prečítaniach sme postupne v textoch odhalili a pomenovali významové kategórie. Tým sa v našich záznamoch oddelili jednotlivé **segmenty**, ktoré sa objavujú aj v dizertačnej práci. Jednotlivé segmenty významových kategórií sme zozbierali dokopy. Následne sme v týchto kategóriách hľadali segmenty, ktoré sa dotýkali našich výskumných otázok. Segmenty sme opísali a usporiadali. Potom sme formulovali **odpovede** na každú otázku postupne. Vždy s ďalšími výskumnými otázkami sme museli predchádzajúce segmenty a výskumné otázky niekoľko krát preskúpiť, aby naše závery boli plynulé a prepojené. Keď sme boli spokojní s organizáciou otázok a segmentov, dodali sme zhrnutie k našim opisom.

PREPIS Z POZOROVANIA - PROTOKOL

V tejto časti uvedieme prepis časti jednej hodiny matematiky, kedy žiaci rozprávali o svojich vytvorených vizualizáciách v geometrii. V tomto protokole si môžeme všimnúť, čo všetko sa dostalo do žiackych hláv, ako využívali vizualizácie z reálneho života, i ako sa učiteľka snažila pomôcť žiakom predstaviť si celú rovinu.

Protokol (4. 11. 2013):

1	U	A teraz sa každý pozerá na tabuľu a predstaví si v hlave, že by tá tabuľa sa zrazu začala zväčšovať, akože Arabelin prsteň, hej? Zväčšuje sa na tú stranu, na tú, na tú, aj na tú. A ideš, zväčšuj, zväčšuj, v hlave... Zdvihne ruku ten, komu sa podarilo si predstaviť, že tá tabuľa fakt sa ťahala ďalej. Komu sa to podarilo ale aj vidieť akoby v hlave, hej?... Komu sa tá tabuľa dokázala zväčšiť aj pod	ukazuje ako sa tabuľa zväčšuje doprava, doľava, hore aj dole, osemnásť žiaci to videli
---	---	---	---

		našu podlahu aj nad náš strop? Hore ruka? Komu odišla tá tabuľa týmto smerom až za ten mrakodrap?	stále sa hlásia všetci osemnásti
2	Marcel	Ja som si predstavil, že namiesto planéty je zemeguľa... Či naopak, namiesto našej planéty je tabuľa.	
3	Urban	Ja som si predstavil polovicu vesmíru.	
4	Filip	Ja som si predstavil, že tá tabuľa je taká veľká, že prekrojila celý vesmír.	
5	Cyril	On mi to zobral už...	chcel povedať to, čo Filip
6	Oto	Ja som si vlastne predstavil, že ako sa to zväčšovalo a potom som pred sebou v mysli videl iba také zelené... Že vôbec nič som nevidel okolo.	
7	Viktor	Že ja som si to predstavoval tak, že to ide úplne do vesmíru, ale keď to narazí do slnka, tak to zhorí.	
8	Urban	Ja som si to predstavoval také veľké, že som videl, ako mi to vychádza takto.	ukazuje, ako mu tabuľa vychádza von z uší
9	Tamara	Ja som si ju najprv predstavila takto na stene, ale neviem prečo som si musela predstaviť, že vyteká z okna a potom som sa rozhodla, že aby mi nevytekala z okna, som si ju predstavila na nebo. A tam úplne, že zväčšená a tam toto nakreslené.	ukázala na obrázok na tabuli
10	Richard	Ja som vlastne nemal až takú veľkú. Ale ja, ako som si predstavil tú tabuľu a som mal trošku väčšiu, ako sa tak zväčšovalo, normálne, normálne to stenu prerazilo a vlastne ako keby išlo takto úplne dole, na zem, a hore, tak do neba, asi pokiaľ vidí normálny človek a do šírky asi tak od tej zelenej budovy tam niekde.	ukázal na budovu
11	Jana	Ja som to tak, že ako sa začala zväčšovať, tak jak Richard, že prerazila stenu. Potom som mala ako keby taký obrázok, že prekrojila celú školu, potom, že celú zemeguľu a to	

		je všetko.	
12	Karol	Ja som si to predstavoval tak, že ako keby bola zemeguľa a presne v polovici zemegule bola tabuľa. Rozkrojila ju.	

ZHRNUTIE

Na základe našich pozorovaní sa nám javí, že interakcia medzi vizualizáciou a didaktikou matematiky je veľká. Myslíme si, že vizualizácia je podstatnou časťou vyučovania matematiky. Vizualizácia je pomôckou, o ktorú sa opierajú aj samotní žiaci. Tí ju využívajú v rôznych situáciách, pri vysvetľovaní, odôvodňovaní a vyvracaní pojmov, relácií a vzťahov, pri hľadaní analógie a modelov jednotlivých poznatkov.

Častokrát na hodinách matematiky žiaci využívajú svoje praktické skúsenosti, alebo príklady z reálneho života v iných situáciách. Používajú tiež rôzne spôsoby vizualizácie - slovami, obrázkami, gestami, modelmi. V našom výskume sa ukázalo, že žiaci nemajú problém použiť vizualizácie v rôznych učivách a v rôznych kontextoch. Boli však situácie, kedy pre žiakov nebolo prirodzené použiť vizualizáciu. Myslíme si, že to závisí od tvorivosti participantov, ich reálnych, ale aj školských skúseností. Takisto dôvodom môže byť aj to, že pre žiakov nie je nutné použiť vizualizáciu ako to býva v prípadoch, keď sa im úloha zdá samozrejma.

Žiaci dokážu pochopiť predkladanú vizualizáciu, ak majú na to dostatok času. Zistili sme, že na lepšie pochopenie a osvojenie vizualizácií žiakom pomáha interakcia so svojimi spolužiakmi v diskusii. Vzhľadom na to, že žiaci sú rôzni, každý žiak si vizualizáciu dokáže osvojiť na inej úrovni, v inej miere a do inej hĺbky.

V niektorých prípadoch si žiaci vytvárajú vizualizácie sami, no v iných používajú vizualizácie, ktoré prebrali od niekoho iného. V mnohých prípadoch sú to rodičia, spolužiaci, učiteľka, ale aj učebnica. Dôvod, prečo práve tie vizuálne reprezentácie žiaci prevzali od iných a prečo nie ostatné, sa nám z nášho pozorovania nepodarilo zistiť. Myslíme si, že by to bola vhodná téma pre ďalší výskum.

Ďalej, na základe nášho výskumu, sme zistili, že učiteľka používa vizualizáciu, keď chce žiakom nepriamo ukázať chybu, keď im pomáha lepšie pochopiť učivo a vytvoriť si vlastnú vizualizáciu. Z toho dôvodu sa vizualizácia vyskytuje častejšie v takom učive, ktoré je pre žiakov náročné a nezrozumiteľné. Vtedy sa vizualizácia využíva ako pomôcka k lepšiemu porozumeniu. Vizualizácia sa môže využiť aj vtedy, ako to

bolo aj v našom výskume, ak učiteľka chce zistiť, do akej miery žiaci rozumejú učivu.

Na základe nášho výskumu, si dovoľíme tvrdiť, že pre žiakov je vizualizácia vhodný spôsob, ako lepšie porozumieť učivu, aj keď v niektorých prípadoch vizualizácie nie sú dostatočne presné, správne použité, alebo dobre pochopené. Využívanie modelov, analógií, obrázkov, reálnych situácií, či fantazijných príkladov v spoločnej diskusii obohacuje každého zainteresovaného žiaka. Vizualizácia v niektorých prípadoch pomáha abstrahovať od konkrétnej situácie a umožňuje zovšeobecňovať poznatky, inokedy vizualizácia preberá úlohu dôkazu a vysvetlenia. Každá z týchto úloh vizualizácie je, podľa nášho názoru, dôležitou súčasťou didaktiky školskej matematiky.

ZÁVER

V dizertačnej práci sme priblížili vizualizáciu v školskej matematike. V prvej kapitole sme načrtli poznávací proces a psychický vývoj človeka v prvých rokoch života. Opísali sme, ako súvisí svet školy s Bolzanovými-Popperovými svetmi. Dozvedeli sme sa viac o poznávacom procese a vyučovaní Hejného metódou, ktorou vyučovala učiteľka, participantka nášho výskumu. Poukázali sme na to, že téma vizualizácie sa nachádza aj v štátnom vzdelávacom programe, ako aj na to, že vizuálno-priestorové myslenie je jedna z intelektuálnych schopností. Predstavili sme definície vizualizácie aj matematických pojmov, relácií a vzťahov, s ktorými sa stotožňujeme v našej práci. Rozobrali sme rôzne aspekty vizualizácie, ako je jej úloha, výhody a problémy. Uviedli sme dôvody, pre ktoré sa oplatí používať vizualizáciu. Predstavili sme dynamický softvér GeoGebra, pomocou ktorého sme vytvorili alternatívny didaktický materiál – applet *Násobenie dvojčiferných čísel*. Tento applet vizualizuje princíp násobenia dvojčiferných čísel.

V druhej kapitole sme poukázali na prácu pedagógov a doktorandov z Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre i študentov, ktorí sa zaoberajú otázkou vizualizácie vo vyučovaní matematiky. Zo svetového merítka sa o vizualizácii dozvedáme z konferencie medzinárodnej skupiny pre psychológiu matematického vzdelávania od roku 1985, keď sa na tejto konferencii objavili prvé príspevky na tému vizualizácie. Od toho času sa vizualizácia stala témou mnohých výskumov, publikácií a záverečných prác. V krátkosti sme opísali aktivity spojené s tvorbou didaktických materiálov pomocou programu GeoGebra doma a na internete.

Tieto dve kapitoly nám pomohli stanoviť cieľ výskumu. Tým bolo zistiť čo najviac o interakcii vizualizácie a didaktiky matematiky. Rozvili sme ho do dvoch bodov. Ako prvú sme pociťovali potrebu zabezpečiť

vizuálne pomôcky na vyučovací proces, pretože sme nepredpokladali, že pozorované vyučovacie hodiny matematiky budú obsahovať toľko prirodzených a bezprostredných vizualizácií. Napriek tomu sme prispeli aj my jednou vizualizáciou, vyššie spomenutým appletom na násobenie dvojciferných čísel. Druhým bodom nášho cieľa bolo skúmanie vzájomného ovplyvňovania vizualizácie a didaktiky matematiky. Tento bod sme sa snažili naplniť pomocou kvalitatívneho výskumu.

Výskum sme uskutočnili so žiakmi piateho ročníka nižšieho sekundárneho vzdelávania a ich učiteľkou matematiky na súkromnej základnej škole pre nadané deti. Počas piatich mesiacov sme sa snažili zistiť čo najviac o tejto problematike. Nosným pilierom sa nám stali výskumné otázky, ktoré sme si stanovili pred pobytom v teréne. Môžeme ich rozdeliť do troch skupín – otázky zaoberajúce sa učivom, otázky zaoberajúce sa vyučovacím procesom a otázky zaoberajúce sa žiackym myslením. Ako výskumné metódy sme si zvolili dlhodobé neštruktúrované pozorovanie, pološtruktúrované rozhovory s participantmi výskumu a skúmanie ich produktov. Tým bol náš stupeň participácie čiastočne aktívny. Vzhľadom na to, že po vytvorení prvých záverov sme už nemali možnosť overiť dané výsledky ešte raz, alebo s inou výskumnou vzorkou, išlo o výskum s uzavretou vzorkou. Počas výskumu sme si údaje zaznamenávali a archivovali, aby boli pripravené na následnú analýzu. Tá pozostávala s opakovaného čítania všetkých zápiskov, prepisov, protokolov a produktov participantov a hľadania dôležitých významových kategórií. Pomocou nich sa nám podarilo siahodlhé výskumné materiály rozdeliť na jednotlivé segmenty, ktoré sme sa snažili detailnejšie charakterizovať a usporiadať podľa výskumných otázok. Následne sme formulovali odpovede na výskumné otázky, ktoré sme vhodným spôsobom zoradili. Tak sa nám podarilo čiastočne priblížiť vzťah medzi vizualizáciou a didaktikou matematiky.

Z nášho výskumu vyplynulo, že vizualizácia je podstatnou časťou vyučovania matematiky. Vizualizáciu využíva učiteľka počas hodín matematiky, opierajú sa o ňu žiaci. Vizualizácia sa dá použiť v každej téme, je vhodné ju využívať najmä v ťažkých učivách. Dá sa uplatniť pri vysvetľovaní, dokazovaní alebo vyvracaní neúplných a nesprávnych úsudkov a interpretácií pojmov, relácií a vzťahov v školskej matematike. Môže pomôcť pri vytváraní analógie a modelov. Zohráva úlohu aj v poznávacom procese, kedy pomáha v prechode z jednej fázy do druhej. Vizualizácie je možné interpretovať slovami, gestami i obrázkami. Žiaci si dokážu vytvoriť vizualizácie sami na základe svojich skúseností, vedomostí a s použitím fantázie, ale dokážu aj prebrať vizualizácie od druhých. Dokážu porozumieť predloženej vizualizácii a vedia ju aj vysvetliť, ak majú dostatok času. Vo vyučovacom procese je veľmi

nápomocná interakcia žiakov. Vďaka nej si žiaci dokážu vytvoriť správnu vizualizáciu.

Na niektoré z našich otázok sa nám nepodarilo nájsť postačujúce odpovede, preto si myslíme, že by bolo vhodné skúmať tieto otázky znovu a počas dlhšieho obdobia. Zároveň považujeme za dôležité opätovne preskúmať aj naše závery, či sa potvrdia aj v iných podmienkach, v iných situáciách a s inými participantmi.

Veríme, že naša práca pomohla čitateľom vytvoriť si lepší obraz o vizualizácii matematických pojmov, relácií a vzťahov školskej matematiky, uvedomiť si kľúčový význam a dôležitosť vizualizácie v školskej matematike a lepšie pochopiť jej priamy vzťah a súvis s didaktikou matematiky.

ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁC PREDKLADATEĽA

Koštová, Dominika: *Kubická funkcia a jej graf.* In: Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'2012, Vol. 21. Bratislava : Slovenská technická univerzita, 2012. S. 57-60. ISBN 978-80-227-3798-2

Koštová Dominika: *Vizualizácia matematických pojmov, relácií a vzťahov v školskej matematike.* Písomná časť dizertačnej skúšky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava 2013.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

ABDULLAH, N. - ZAKARIA, E. - HALIM, L. 2012. *The Effect of a Thinking Strategy Approach through Visual Representation on Achievement and Conceptual Understanding in Solving Mathematical Word Problems.* In Asian Social Science, 2012, vol. 8, no. 16, str. 31-37. ISSN 1911-2025

AHMADA, A. – TARMIZIA, R.A. – NAWAWIA, M. 2010. *Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca.* In Procedia – Social and Behavioral Sciences. [online]. 2010, vol. 8. str. 356-361. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810021555>

ARCAVI, A. 2003. *The role of visual representations in the learning of mathematics.* In Educational Studies in Mathematics. [online]. Springer, 2003, vol. 52. str. 215-241. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1024312321077?LI=true#page-1>

- BATES, M. J. 2011. *Úvod do metateorií, teorií a modelů. ProInflow* [online]. 2011. [cit. 20.02.2013]. Dostupné na internete: <http://pro.inflow.cz/uvod-do-metateorii-teorii-modelu>. ISSN 1804-2406.
- BUKOR, J. a kol. 2012. *GeoGebra v praxi*. Komárno: Univerzita J. Selyeho v Komárne Ekonomická fakulta, 2012. 157 strán. ISBN 978-80-8122-067-8
- DAVIDOVÁ, M.M. – TOMAZOVÁ, V.S. 2012. *The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity*. In Educational studies in mathematics. [online] 2012, vol. 80. str. 413-431. [cit. 21.2.2013] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9358-/fulltext.html>
- DRÁBEKOVÁ, J. – RUMANOVÁ, L. 2008a. *Funkcia obrázkov v základoch vyššej matematiky a geometrie*. In: Zborník príspevkov z 5. žilinskej didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou (DIDZA): „Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách“. Žilina: FPV ŽU, 2008. [CD-rom]. s.1-5. ISBN 978-80-8070-863-4
- FULIER, J. 2008. *Vizualizácia v matematike: Realistické versus pedagogické znázornenie grafu funkcie*. In *Učme aplikovať matematiku*. 2008, str. 19-26.
- FULIER, J. 2009. *Aspekty humanizácie, motivácie a vizualizácie v matematickom vzdelávaní: krása matematiky, matematika krásy*. In XXVII International Colloquium. Brno: 2009.
- FULIER, J. 2011. *O niektorých aspektoch vizualizácie v matematickom vzdelávaní*. In *Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek*. Žilina: EDIS, 2011. str 17-32. ISBN 9788055403939
- FURCOŇOVÁ, K. 2013. *Vizualizácia a modelovanie pri riešení slovných úloh z matematiky: písomná práca k dizertačnej skúške*. Košice: Prírodovedecká fakulta, UPJŠ, 2013.
- GAL, H. – LINCHEVSKI, L. 2010. *To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception*. In Educational Studies in Mathematics. [online]. Springer, 2010, vol 74. str. 163-183. [cit 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9232-y>
- GARDNER, H. 1999. *Dimenze myšlení. Teorie rozmanitých inteligencí*. 1. české vyd., z anglického orig. preložila Votavová, E. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3
- GeoGebra. [online]. [21.4.2014] Dostupné na internete: <https://www.geogebra.org/cms/>

- GeoGebraTube. [online]. [25.4.2014] Dostupné na internete: www.geogebraTube.org
- GÜÇLER, B. - PARK, J. – MCCRORY, R. 2009. *Affordances of Visual Representations: The Case of Fraction Multiplication*. In Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. [online]. 2009, vol. 5, str. 1116 - 1124. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://www.pmena.org/2009/proceedings/TEACHER%20EDUCATION%20-PRESERVICE/tepRR367071.pdf>
- H-mat. [online]. [cit. 10.5.2014] Dostupné na internete: <http://www.h-mat.cz/>
- HANULA, M. 1978. *Šablóna – prekážka tvorivosti*. In *Matematické obzory*. Bratislava: Alfa, 1978, zväzok 12. str. 57-61.
- HEJNÝ, M. 1990. *Aj geometria naučila človeka myslieť*. 2. upravené vyd. Bratislava: SPN, 1990. 189 s. ISBN 80-08-00542-4
- HEJNÝ, V. – HEJNÝ, M. 1978. *Prečo je matematika taká ťažká?* In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. [online]. Praha: Academia, nakladateľství ČSAV, 1978, roč. XXIII, č. 23. str. 85-93. [cit. 21.1.2013] Dostupné na internete: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/139655/PokrokyMFA_23-1978-2_5.pdf
- HEJNÝ, M. – KUŘINA, F. 2001. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. 1. vyd. Praha: Portál, 2001. 192 s. ISBN 80-7178-581-4
- HSIEH, Y-CH. J. 2003. *The Cross-Cultural Study on the Effect of the Use of Student-Generated Visualization as a Study Strategy for Middle School Science Concept Learning: dizertačná práca*. Michigan: National Taiwan University. 2003.
- HUBEŇÁKOVÁ, V. 2012. *Schopnosti potrebné k riešeniu slovných úloh z matematiky*: diplomová práca. Košice: Prírodovedecká fakulta, UPJŠ, 2012.
- KADUNZ, G. – STRÄßER, R. 2004. *Image - Metaphor - Diagram: Visualisation in Learning Mathematics*. In Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2004, vol. 4, str. 241-248
- KARADAG, Z. – MCDOUGALL, D. 2009. *Visual Explorative Approaches to Learning Mathematics*. In Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. [online]. 2009, vol. 5, str. 1630 - 1636. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete:

<http://www.pmena.org/2009/proceedings/workinggroup90649replacement.pdf>

KENNEYOVÁ, R. – AN, T. – KIM, S. H. – YI, J. S. – UHAN, N. 2013. *Addressing the Reversal Error with a Visualization Tool*. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: http://www.pmena.org/2013/files/PMENA2013_Conference_Program.pdf

Khan Academy. [online]. [21.2.2013] Dostupné na internete: <https://www.khanacademy.org/>

KOSPENTARIS, G. – SPYROU, P. – LAPPAS, D. 2011. *Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks*. In *Educational Studies in Mathematics*. [online]. Springer, 2011, vol 77. str. 105-127 [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9303-8>

KOMENSKÝ, J. A. 1991. *Veľká didaktika*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1991. 271 s. ISBN 80-08-01022-3

KAČALA, J. – PISÁRČIKOVÁ, M. – POVAŽAJ, M. 2003. *Krátky slovník slovenského jazyka*. 4. dopl. a upr. vyd. Bratislava: Veda, 2003. 985 s. ISBN 80-224-0750-X

KUŘINA, F. 2009. *Matematika a porozumění světu. Setkání s matematikou po základní škole*. 1. vyd. Praha: Academia, 2009. 331 s. ISBN 978-80-200-1743-7

MESAROŠ, M. 2012. *Forms of visualisation as a solving approach in teaching mathematics*. In *Zborník z 13th International scientific conference of PhD. students and young scientists and pedagogues*. [online]. Nitra: Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa, 2012. str. 318-325. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://conferences.ukf.sk/index.php/phdconf/phdconf2012/paper/view/960>

MIŤKOVÁ, E. 2009. *Rozvoj algebraického myslenia u žiakov základných a stredných škôl*: dizertačná práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK, 2009

NARDIOVÁ, E. 2014. *Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education*. In *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground*. [online]. New York, Springer. 2014, str. 193-220. [cit. 26.4.2014] Dostupné na internete: http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-007-7473-5_12

- NÚCEM, 2013. *Testovanie 5*. [online]. Bratislava: NÚCEM, 2013. [cit. 10.5.2014] Dostupné na internete: http://www.nucem.sk/sk/testovanie_5
- PAPERT, S. 1999. Papert on Piaget. [online]. 1999. [cit. 9.5.2014] Dostupné na internete: <http://www.papert.org/articles/Papertonpiaget.html>
- PHILLIPSOVÁ, L. - NORRIS, S. - MACNAB, J. 2010. *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*. Springer. New York, 2010. 105 s. ISBN 978-90-481-8815-4
- PIAGET, J. 1999. *Psychologie intelligence*. 2. české vyd. z francúzskeho orig. preložil Jiránek, F. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-309-9
- PIAGET, J. – INHELDEROVÁ, B. 2001. *Psychologie dítěte*. 3. české vyd. z francúzskeho orig. preložila Vyskočilová, E. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-608-X
- PIGGOTTOVÁ, J. – WOODHAMOVÁ, L. 2012. *Thinking Through, and By, Visualising*. [online]. 2012. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://nrch.maths.org/6447>
- PRESMEGOVÁ, N. 2006. *Research on visualization in learning and teaching mathematics. Emergence from psychology*. [online]. 2006. 41 strán. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>
- PRESMEGOVÁ, N. 2014. *Contemplating Visualization as an Epistemological Learning Tool in Mathematics*. In ZDM. [online]. 2014, vol. 46, Issue 1, str. 151-157. [cit. 26.4.2014] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0561-z>
- ROGERS, C.R – FREIBERG, H.J. 1998. *Sloboda učiť sa*. z anglického orig. preložil Valkovič, I. Modra: Persona, 1998. ISBN 80-967980-0-6
- RYU, HA. – CHONG, YO. – SON, SH. 2007. *Mathematically Gifted Students' Spatial Visualization Ability of Solid Figures*. In Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. [online]. 2007, part 4, str. 137-144. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://www.emis.de/proceedings/PME31/4/136.pdf>
- SCHEITEROVÁ, K. – GERJETS, P. – SCHUHOVÁ, J. 2010. *The acquisition of problem-solving skills in mathematics: How animations can aid understanding of structural problem features and solution procedures*. In Instructional Science. [online] Springer, 2010, vol 38.

- str. 487-502. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11251-009-9114-9>
- Slovenský GeoGebra inštitút. [online]. [25.4.2014] Dostupné na internete: <https://www.geogebra.org/cms/>
- ŠEDIVÝ, O. a kol. 2010. *Konstruktivizmus vo vyučovaní matematiky a budovanie geometrických predstáv*. Zborník vedeckých prác pracovníkov a doktorandov Katedry matematiky FPV UKF. Nitra: Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa, 2010. ISBN 978-80-8094-723-1
- ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV, 2010. *Štátny vzdelávací program, Matematika – príloha ISCED 2*. [online]. Bratislava: ŠPÚ, 2010. [cit. 10.5.2014] Dostupné na internete: www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf
- TALL, D. 1991. *Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus*. In *Visualization in Mathematics*. Mathematical Association of America. [online] 1991, notes no. 19. 21 strán. [cit. 25.4.2013] Dostupné na internete: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigour-maa.pdf>
- VELICHOVÁ, D. 2009. *Interactive Maths with GeoGebra*. In *Proceeding of the conference Virtual University*. [online] [CD-rom] Bratislava: FEI STU, 2009. 6 strán. ISBN 978-80-89316-11-3 [cit. 25.4.2014] Dostupné na: http://virtuni.eas.sk/rocnik/2009/pdf/paper_76.pdf
- VELICHOVÁ, D. 2010a. *Creating Cognitive Connections in Maths with GeoGebra*. In *XXVIII International Colloquium on the Management of Educational Process*. [CD-rom] Brno: University of Defence, 2010. 7 strán. ISBN 978-80-7231-722-6
- VELICHOVÁ, D. 2010b. *GeoGebra Tool for Building Conceptual Understanding*. In *Mathematics, GeoGebra – The new language for the Third Millennium*. Braila, 2010, vol.1, no. 1. str. 107-116. ISSN 2068-3227
- VELICHOVÁ, D. 2011. *Interactive Maths with GeoGebra*. In *iJET – International Journal of Emerging Technologies in Learning*. [online]. 2011, vol 6. str. 31-35. ISSN 1863-0383 [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://online-journals.org/i-jet/article/view/1620>
- VESELSKÝ, M. 2004. *Pedagogická psychológia 1 : Teória a prax*. Bratislava: Univerzita Komenského, 2004. 192 s. ISBN 80-223-1844-2

- WHITELEY, W. 2004. *Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program*. [online]. 2004. [cit. 12.2.2013] Dostupné na internete: <http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Visualization.pdf>
- WIKIPÉDIA a. Slobodná encyklopédia. *Teorie modelů*. [online]. 2012. [cit. 10.5.2014]. Dostupné na internete: http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorie_model%C5%AF&oldid=8800451
- WIKIPÉDIA b. Slobodná encyklopédia. *Teorie modelů*. [online]. 2010. [cit. 10.5.2014]. Dostupné na internete: <http://sk.wikipedia.org/wiki/Rel%C3%A1cia>
- YILDIZ, B. – TÜZÜN, H. 2011. *Effects of using three-dimensional virtual environments and concrete manipulatives on spatial ability*. Abstrakt. In Hacettepe University The Journal Of Education. [online]. 2011, issue 41. str. 498-508 [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/english/abstracts/41/pdf/BAHADIR%20YILDIZ.pdf>
- ZODIK, I. – ZASLAVSKY, O. 2007. *Is a Visual Example in Geometry Always Helpful?* In Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. [online]. 2007, part 4, str. 265-272. [cit. 25.4.2014] Dostupné na internete: <http://www.emis.de/proceedings/PME31/4/264.pdf>

SUMMARY

The first part is devoted to theoretical issues and current state of the problem in Slovakia and abroad. In the next section we describe five months qualitative research carried out in the fifth grade of lower secondary education in math lessons. The object of our research was the interaction visualization and mathematics education. In this work we present a description of situations during lessons, interviews after lessons and pupils products. We have proposed visualizing and observed pupils how they deal with presented visualizations. From our research, we found that visualization is an appropriate part of the teaching of mathematics in each thematic unit, because it serves as a tool to understanding, generalization, justification, but also finding correct or incorrect concepts, relations and connections. Visualization can also be used in the verification of knowledge when it is appropriate confront acquired curriculum at specific examples which pupils themselves invent. Therefore, we think that the relationship between visualization and mathematics education is powerful.