



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**Anna Kompišová**

Autoreferát dizertačnej práce

**Toky, cyklové pokrytia a farbenia signovaných grafov**

na získanie akademického titulu *philosophiae doctor*

v odbore doktorandského štúdia:

9.2.1. informatika

Bratislava, 15.5.2020

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

**Predkladateľ:** Anna Kompišová  
Katedra informatiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

**Školiteľ:** doc. RNDr. Edita Máčajová, PhD.  
Katedra informatiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

Študijný odbor: 9.2.1. informatika, Študijný program: informatika

**Predseda odborovej komisie**  
prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.  
Katedra informatiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

# Úvod

Signovaný graf  $(G, \sigma)$  je graf  $G$ , ktorého každá hrana má funkciu  $\sigma$  priradené pozitívne alebo negatívne znamienko. Koncept signovaného grafu sa ukazuje byť veľmi užitočný a objavuje sa v rôznych vedných odboroch. Medzi prvými ho začali používať psychológovia. Heider [17] používal signované trojuholníky vo svojej teórii rovnováhy (balance theory). Neskôr jeho teóriu rozšíril Harary [16] na všetky signované grafy. V teórii grafov sú signované grafy zaujímavé okrem iného aj preto, lebo sú prirodzeným rozšírením nesignovaných grafov.

V dizertačnej práci sa venujeme predovšetkým tokom na signovaných grafoch. Toky na grafoch predstavujú významnú oblasť výskumu v teórii grafov. V praxi sa s tokmi často stretávame, napr. toky dát v počítačových sieťach, preprava na cestách, vodovodné systémy a mnoho ďalších. Tok je vždy spojený s nejakou orientáciou hrán. V signovaných grafoch hrany orientujeme tak, že každú hranu rozdelíme na dve polhrany, ktoré orientujeme samostatne. Orientácia  $O$  polhrán však musí zodpovedať znamienkam jednotlivých hrán. Ak má hrana pozitívne znamienko, obe polhrany musia byť orientované rovnakým smerom a ak má hrana negatívne znamienko, tak musia byť jej polhrany orientované opačnými smermi. Ďalšou zložkou toku je toková funkcia  $f$ , ktorá priradí každej hrane tokovú hodnotu z nejakej abelovskej grupy. Táto funkcia musí pre každý vrchol  $v$  spĺňať, že súčet tokových hodnôt na vchádzajúcich hranách do  $v$  je rovnaký ako súčet hodnôt na vychádzajúcich hranách do  $v$ . Hovoríme, že tok  $(O, f)$  je nikde-nulový  $k$ -tok na signovanom grafe  $(G, \sigma)$  ak pre každú hranu  $e \in E(G)$  platí  $f(e) \in \mathbb{Z}$  a  $1 \leq |f(e)| < k$ .

Nikde-nulové toky na nesignovaných grafoch zaviedol Tutte [44] ako duálny koncept k vrcholovému farbeniu grafov vnorených do orientovateľnej plochy. Podobný koncept získame, ak namiesto orientovateľnej plochy použijeme neorientovateľnú. Nikde-nulové toky na signovaných grafoch sú duálny koncept k lokálnym napätiam na grafoch vnorených do neorientovateľnej plochy [8].

Pred viac ako šesťdesiatimi rokmi Tutte [44] vyslovil nasledovnú hypotézu, ktorá spolu s ďalšími hypotézami doteraz podnecuje výskum v tejto oblasti.

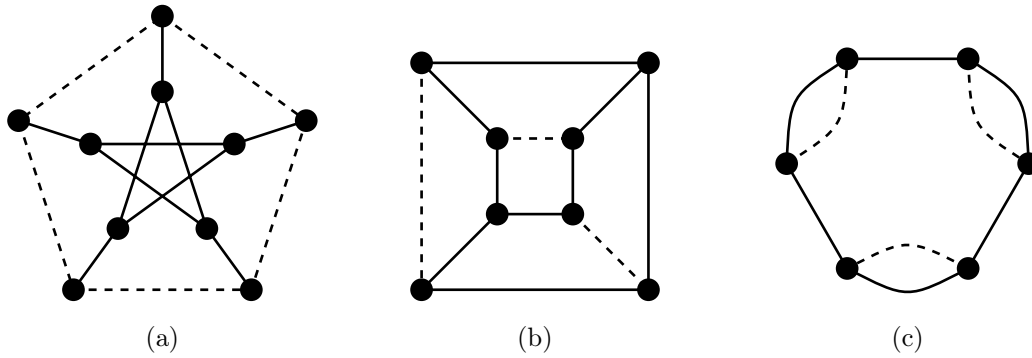
**Hypotéza 1.** *Každý bezmostový graf má nikde-nulový 5-tok.*

Aktuálne najlepšia aproximácia tejto hypotézy je Seymourova 6-toková veta [39], ktorá hovorí, že každý bezmostový graf má nikde-nulový 6-tok.

Podobný efekt ako Tutteova 5-toková hypotéza v oblasti nesignovaných grafov mala Bouchetova [8] 6-toková hypotéza v oblasti signovaných grafov.

**Hypotéza 2.** *Každý tokovateľný signovaný graf má nikde-nulový 6-tok.*

Aktuálne najlepší výsledok blízky Bouchetovej hypotéze priniesli DeVos a spol. [10], ktorí dokázali že každý tokovateľný signovaný graf má nikde-nulový 11-tok. Vieme, že Bouchetova hypotéza sa už nedá vylepšiť, nakoľko je známych nekonečne veľa príkladov grafov s tokovým číslom práve 6 [8, 29, 38] (Obrázok 1). Existuje niekoľko tried grafov, pre ktoré bola potvrdená platnosť Bouchetovej 6-tokovej hypotézy: Eulerovské grafy [32], kompletne a kompletne bipartitné grafy [30], sériovo-paralelné grafy [23], Kotzigove grafy [38] a hranovo 8-súvislé grafy [46].



Obr. 1: Signované grafy s tokovým číslom 6. Negatívne hrany sú čiarkované.

Prvá časť práce je venovaná vzťahu medzi tokým a cirkulárnym tokovým číslom signovaných grafov. Hovoríme, že tok  $(O, f)$  je cirkulárny  $r$ -tok na signovanom grafe  $(G, \sigma)$ , ak pre každú hranu  $e \in E(G)$  platí  $f(e) \in \mathbb{R}$  a  $1 \leq |f(e)| \leq (r - 1)$ . Zjavne každý nikde-nulový  $k$ -tok je aj cirkulárny  $k$ -tok. Tokové číslo  $\Phi(G, \sigma)$  signovaného grafu  $(G, \sigma)$  je najmenšie také  $k$ , že existuje nikde-nulový  $k$ -tok na  $(G, \sigma)$ . Podobne cirkulárne tokové číslo  $\Phi_c(G, \sigma)$  signovaného grafu  $(G, \sigma)$  je infimum z reálnych čísel  $r$  také, že existuje cirkulárny  $r$ -tok. Ak signovaný graf  $(G, \sigma)$  nie je tokovateľný, potom  $\Phi(G, \sigma) = \Phi_c(G, \sigma) = \infty$ .

Z definícií ľahko vidno, že  $\Phi_c(G, \sigma) \leq \Phi(G, \sigma)$ . Raspaud a Zhu [36] vyslovili hypotézu, že vzťah medzi týmito dvomi číslami je rovnaký ako pri nesignovaných grafoch, konkrétne  $\Phi(G, \sigma) = \lceil \Phi_c(G, \sigma) \rceil$  a teda  $\Phi(G, \sigma) - \Phi_c(G, \sigma) < 1$ . Túto hypotézu sa podarilo vyvrátiť Schubertovi a Steffenovi [38] a neskôr Máčajová a Steffen [34] našli inú triedu grafov s ešte väčším rozdielom medzi tokovým číslom a cirkulárnym tokovým číslom. Všetky protipríklady na Raspaudovu a Zhuovu hypotézu uvedené v [38] a [34] majú jeden centrálny vrchol, ktorý je incidentný iba s mostami. Čím väčší stupeň má centrálny vrchol, tým väčší rozdiel je medzi tokovým a cirkulárnym tokovým číslom. Z toho dôvodu zostávala hypotéza stále otvorená pre kubické grafy, špeciálne pre kubické bezmostové grafy.

Kubické grafy sú zaujímavá a intenzívne skúmaná trieda grafov hlavne preto, že väčšina hypotéz v tejto oblasti, vrátane Tutteovej aj Bouchetovej hypotézy sa dá zredukovať na kubické grafy. Aj my sme sa v našej práci venovali predovšetkým kubickým grafom. Konkrétne v prvej časti práce sme pre kubické signované grafy do hĺbky preskúmali aký môže byť rozdiel medzi tokovým číslom a cirkulárnym tokovým číslom v závislosti od tokového čísla. Určili sme všetky dosiahnuteľné dvojice tokového čísla a cirkulárneho čísla a ukázali, že každá z týchto dvojíc je dosiahnuteľná v triede bezmostových kubických grafov (Veta 6). Špeciálne pre dvojicu  $\Phi(G, \sigma) = 5$  a  $\Phi_c(G, \sigma) = 4$ , ktorá ako jediná odporovala Raspaudovej a Zhuovej hypotéze, sme našli aj nekonečnú triedu hranovo 3-súvislých kubických grafov s týmito parametrami.

Pri formálnom dokazovaní, že nami nájdená trieda hranovo 3-súvislých grafov má požadované vlastnosti sme našli zaujímavú podmienku na neexistenciu nikde-nulového 4-toku. Tú sme využili aj na nájdenie kubických signovaných grafov s väčšou cyklickou súvislosťou, ktoré sú tokovateľné ale nemajú nikde-nulový 4-tok. Jaeger a Swart [19] vyslovili hypotézu, že každý bezmostový kubický nesignovaný graf s cyklickou súvislosťou aspoň 7 má nikde-nulový 4-tok. Nám sa vďaka

nášmu výsledku podarilo nájsť dva signované grafy s cyklickou súvislosťou 7 a tokovým číslom aspoň 5. Tým sme ukázali, že Jaegerova a Swartova hypotéza, sa nedá rozšíriť na signované grafy.

V ďalšej časti práce sme definovali triedu tokovateľných signovaných grafov  $\mathcal{M}$ , ktorá obsahuje všetky nám známe signované grafy, ktoré majú tokové číslo aspoň 6. Ukázali sme, že všetky grafy v triede  $\mathcal{M}$  majú tokové číslo aj cirkulárne tokové číslo rovné 6.

Veta 6 a výsledky o triede  $\mathcal{M}$  boli publikované v [25].

Nasledujúca časť práce je venovaná čiastočným výsledkom pre triedu planárnych hranovo 3-súvislých bipartitných kubických grafov. Táto trieda sa dá vygenerovať z kocky pomocou dvoch jednoduchých operácií. Naším cieľom bolo potvrdiť platnosť Bouchetovej hypotézy pre túto triedu. Bohužiaľ sa nám to podarilo len pre jej podtriedu vygenerovanú z kocky pomocou jedného pravidla. Pre druhé pravidlo uvádzame naše pozorovania.

Okrem tokov na signovaných grafoch sme skúmali aj krátke cyklové pokrytia na nesignovaných grafoch. Cyklus je pre nás v tomto prípade graf (nie nutne súvislý), ktorý má všetky stupne párne. Dĺžka cyklu je počet jeho hrán. Cyklové pokrytie grafu  $G$  je množina cyklov  $P$  taká, že každá hrana je v aspoň jednom cykle v  $P$ . Dĺžka cyklového pokrytia je súčet dĺžok jeho cyklov. Ľahko vidno, že cyklové pokrytie má každý bezmostový graf.

Špeciálnu rolu má cyklové pokrytie grafu  $G$  s najkratšou dĺžkou, ktorého dĺžku označujeme  $scc(G)$ . Cieľom problému najkratšieho cyklového pokrytia je určiť hodnotu  $scc(G)$  pre daný graf  $G$ . Označme  $m = |E(G)|$ . Hypotéza o najkratšom cyklovom pokrytí (Shortest cycle cover conjecture) [4, 35] hovorí, že  $scc(G) \leq 1,4m$  a je tesná pre nekonečne veľa grafov. Aktuálne najlepšie všeobecné horné ohraničenie čísla  $scc(G)$  je  $scc(G) \leq 5m/3$ . Toto ohraničenie publikovali nezávisle Alon a Tarsi [4] a Bermond, Jackson a Jaeger [7] pred viac ako 35 rokmi.

Keďže vo všeobecnom prípade nebol urobený výrazný pokrok, pozornosť sa sústredila na špeciálne triedy grafov. Medzi najviac všeobecné triedy patrí trieda grafov s minimálnym stupňom tri. Doteraz najlepší výsledok pre túto triedu dokázal Fan [13]. Fan ukázal, že  $scc(G) < 1,6257m$ , ak  $G$  môže obsahovať slučky a  $scc(G) < 1,6148m$ , ak  $G$  neobsahuje slučky. Výsledky pre grafy so slučkami sa dajú jednoducho pretransformovať na výsledky pre grafy s malým počtom vrcholov stupňa dva. Stačí pridať slučky týmto vrcholom. Označme  $n_2$  počet vrcholov stupňa dva. Takýmto spôsobom Fan [13] dokázal, že ak  $n_2 \leq m/30$ , tak  $scc(G) < 1,6467m$ . Ak však vieme iba  $n_2 \leq m/10$ , tak všeobecné horné ohraničenie je lepšie ako Fanovo. Posledná časť práce je venovaná nášmu odhadu

$$scc(G) < 1,6148m + 0,0741n_2,$$

ktorý je vylepšením Fanovho odhadu. Náš odhad dáva lepšie výsledky ako všeobecný odhad vždy, ak  $n_2 \leq 0,7m$ .

## 1 Užitočné pomocné tvrdenia

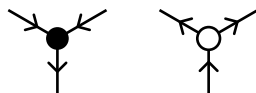
V rámci dokazovania hlavných tvrdení sme dokázali niekoľko zaujímavých pomocných konceptov a tvrdení, ktoré nám umožnili špeciálny pohľad na problém.

Prvým z nich je koncept indukovaného farbenia signovaného grafu. Nech  $(O, f)$  je pozitívny cirkulárny  $r$ -tok na kubickom signovanom grafe  $(G, \sigma)$ . Vrcholy grafu sa dajú rozdeliť do dvoch

skupín:

1. vrcholy s dvoma vchádzajúcimi a jednou vychádzajúcou incidentnou hranou a
2. vrcholy s dvoma vychádzajúcimi a jednou vchádzajúcou incidentnou hranou.

Ofarbíme vrcholy podľa tohto rozdelenia. Vrcholy prvého typu sú čierne a vrcholy druhého typu sú biele (Obrázok 2). Takéto farbenie nazývame *r-indukované farbenie*.



Obr. 2: Farbenie vrcholov vzhľadom na pozitívny tok.

Tento typ farbenia nám umožňuje získať dolnú hranicu cirkulárneho tokového čísla. Nech  $(G, \sigma)$  je kubický signovaný graf, ktorý má *r*-indukované farbenie. Cesta  $L$  v grafe  $G$  sa nazýva *vynucujúca  $\ell$ -cesta* ak  $L$  je ekvivalentná jednofarebnej pozitívnej ceste dĺžky  $\ell$ , kde *dĺžka cesty* je počet jej hrán. Vynucujúca cesta nemusí byť indukovaná cesta.

**Lema 3.** *Ak kubický signovaný graf  $(G, \sigma)$  má *r*-indukované farbenie s vynucujúcou  $\ell$ -cestou, tak  $r \geq \ell + 3$ .*

Ďalším zaujímavým konceptom je špeciálny parameter pre grafy, ktoré majú 2-faktor skladajúci sa iba z balansovaných párných kružníc. Tento parameter je definovaný ako súčin dvoch parametrov  $\alpha_F(G, \sigma) \in \{-1, 1\}$  a  $\beta_F(G, \sigma) \in \{-1, 1\}$ , kde  $F$  je 2-faktor skladajúci sa iba z balansovaných kružníc párnej dĺžky grafu  $(G, \sigma)$ . Ich formálnu definíciu nájdete v dizertačnej práci.

Dôležitou vlastnosťou parametra  $\alpha_F(G, \sigma)\beta_F(G, \sigma)$  je, že každým prepnutím vo vrchole sa zmení jeho znamienko. Prepnutie vo vrchole  $v$  je operácia, ktorá zmení znamienka všetkých incidentných hrán vrchola  $v$  na opačné. Ak signovaný graf  $(G, \sigma)$  vieme získať zo signovaného grafu  $(G, \varsigma)$  sériou prepnutí vo vrchole, potom  $(G, \sigma)$  a  $(G, \varsigma)$  sú ekvivalentné a majú okrem iného aj rovnaké tokové a cirkulárne tokové číslo.

Máčajová a Škoviera [31] dokázali že kubický signovaný graf  $(G, \sigma)$  má nikde-nulový 4-tok právetedy, ak je ekvivalentný grafu  $(G, \varsigma)$ , ktorý má 2-faktor  $F$  taký, všetky hrany v  $G - F$  sú negatívne a každý komponent  $F$  je tzv. polovične nepárny. Z toho vyplýva, že sk  $F$  sa skladá iba z párných kružníc, potom  $\alpha_F(G, \varsigma)\beta_F(G, \varsigma) = 1$ . Preto, ak máme graf, ktorého každý 2-faktor sa skladá iba z párných kružníc a je buď nebalansovaný alebo má po prepnutí všetkých nefaktorových hrán zlý parameter, potom nemôže mať nikde-nulový 4-tok. To formálne hovorí nasledovná veta.

**Veta 4.** *Nech  $(G, \sigma)$  je kubický signovaný graf, pre ktorý platí, že každý 2-faktor sa skladá iba z párných kružníc. Nech  $E^+(G - F)$  je počet pozitívnych hrán grafu  $(G, \sigma)$ , ktoré ležia v  $(G - F)$ . Ak pre každý antibalansovaný 2-faktor  $F$  platí:*

$$\alpha_F(G, \sigma)\beta_F(G, \sigma) = (-1)^{|E^+(G-F)|+1},$$

*potom graf  $(G, \sigma)$  nemá nikde-nulový 4-tok.*

Z tejto vety triviálne vyplýva nasledovné tvrdenie.

**Veta 5.** *Nech  $(G, \sigma)$  je tokovateľný signovaný kubický graf s jednou pozitívnou hranou, ktorého každý 2-faktor sa skladá z kružníc párnej dĺžky. Potom tokové číslo grafu  $(G, \sigma)$  je aspoň 5.*

## 2 Grafy s tokovým číslom najviac 5

Hlavným výsledkom prvej časti práce je nasledovná veta.

**Veta 6.** *Nech  $(G, \sigma)$  je tokovateľný signovaný kubický graf. Potom platí:*

(a)  $\Phi(G, \sigma) = 3$  práve vtedy, keď  $\Phi_c(G, \sigma) = 3$ .

(b) Ak  $\Phi(G, \sigma) = 4$ , tak  $\Phi_c(G, \sigma) = 4$ .

(c) Ak  $\Phi(G, \sigma) = 5$ , tak  $\Phi_c(G, \sigma) \in [4, 5]$ .

Navyše existuje nekonečná trieda grafov pre každú kombináciu tokového a cirkulárneho tokového čísla, ktorú pripúšťa predchádzajúca časť tejto vety.

Prvá časť vety hovorí, aké sú prípustné dvojice tokového a cirkulárneho tokového čísla pre tokovateľné kubické grafy. Zaujímavá je hlavne dvojica  $\Phi(G, \sigma) = 5$  a  $\Phi_c(G, \sigma) = 4$ , pretože grafy s týmito parametrami vyvracajú Raspaudovu a Zhuovu hypotézu aj pre kubické grafy. Pri dokazovaní druhej časti sme venovali pozornosť primárne tejto dvojici, lebo ostatné prípady sa dajú pokryť aj nesignovanými grafmi [33, 28].

Pomocou počítačového testovania sa nám podarilo nájsť niekoľko grafov s  $\Phi(G, \sigma) = 5$  a  $\Phi_c(G, \sigma) = 4$ . Všetky môžete vidieť na Obrázku 3.

V dôkaze Vety 6 sme našli nekonečnú triedu bezmostových kubických signovaných grafov s požadovanými parametrami, do ktorej patria grafy na Obrázku 3a a Obrázku 3d. Formálnu definíciu tejto triedy môžete nájsť v dizertačnej práci. Na Obrázku 4 je symbolicky znázornený  $n$ -tý člen tejto triedy, graf  $(H_n, \sigma_n)$ .

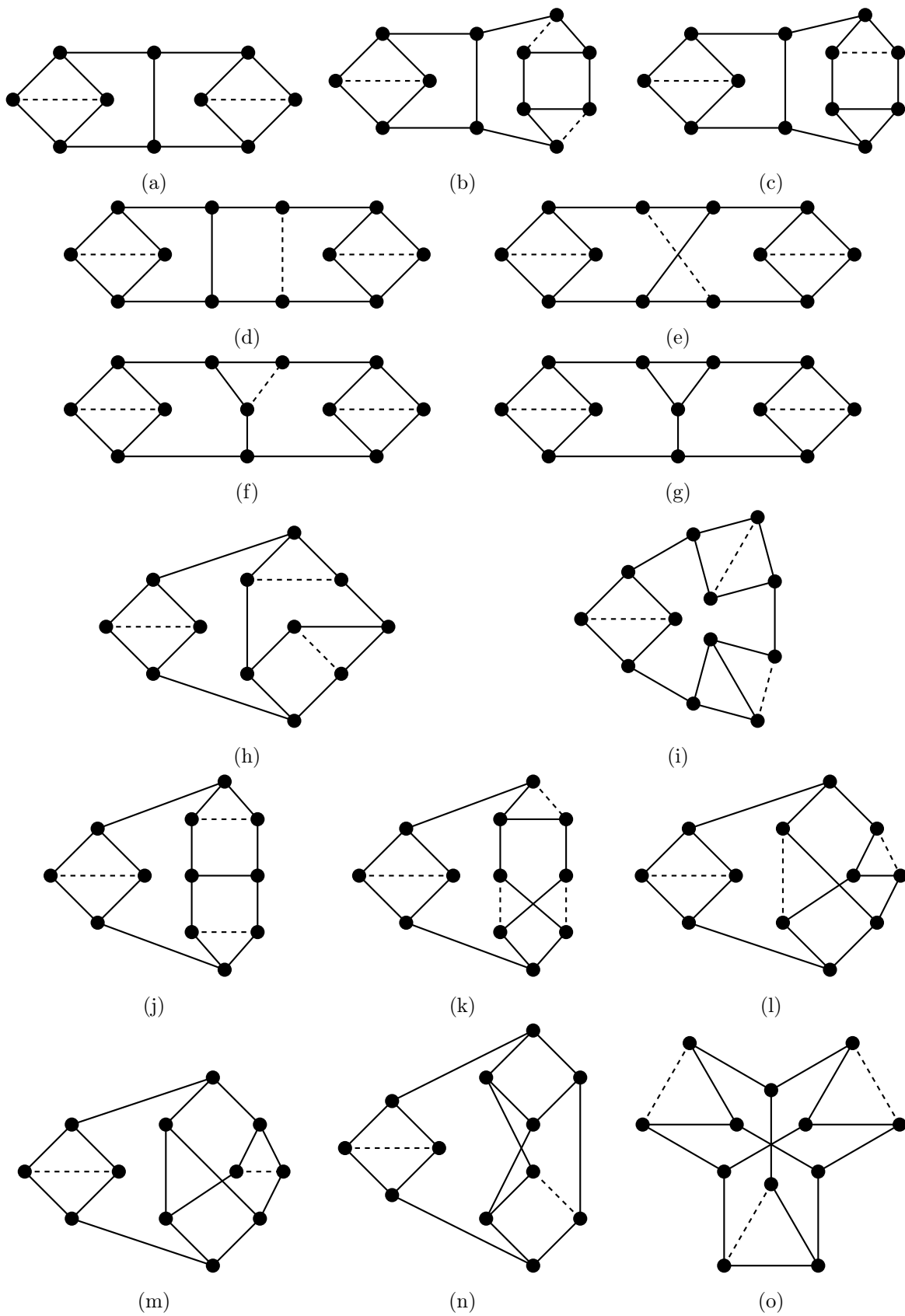
Dôkaz, že grafy  $(H_n, \sigma_n)$  pre  $n \geq 1$  spĺňajú podmienku  $\Phi(H_n, \sigma_n) = 5$  a  $\Phi_c(H_n, \sigma_n) = 4$ , sme robili matematickou indukciou, pričom v báze indukcie sme použili  $r$ -indukované farbenie.

Podarilo sa nám taktiež definovať nekonečnú triedu  $\{(G_k, \sigma_k), k > 1, k \text{ je nepárne}\}$  hranovo 3-súvislých kubických signovaných grafov s  $\Phi(G_k, \sigma_k) = 5$  a  $\Phi_c(G_k, \sigma_k) = 4$ , ktorej najmenší člen je graf ekvivalentný grafu na Obrázku 3o.

Graf  $(G_k, \sigma_k)$  pre nepárne  $k > 1$  je definovaný nasledovne:

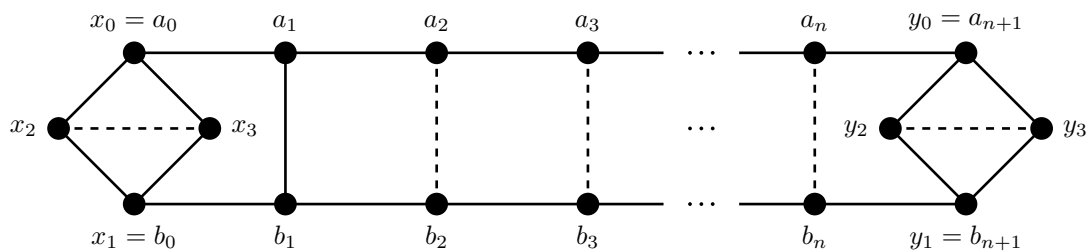
- $V(G_k) = \{u_i, v_i, w_i, z_i \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$
- $E(G_k) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}, z_i u_i, z_i v_i, z_i w_i \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ , kde  $i+1$  počítame modulo  $k$

- $\sigma_k(e) = \begin{cases} +1 & e = z_0 v_0 \\ -1 & \text{inak.} \end{cases}$



Obr. 3

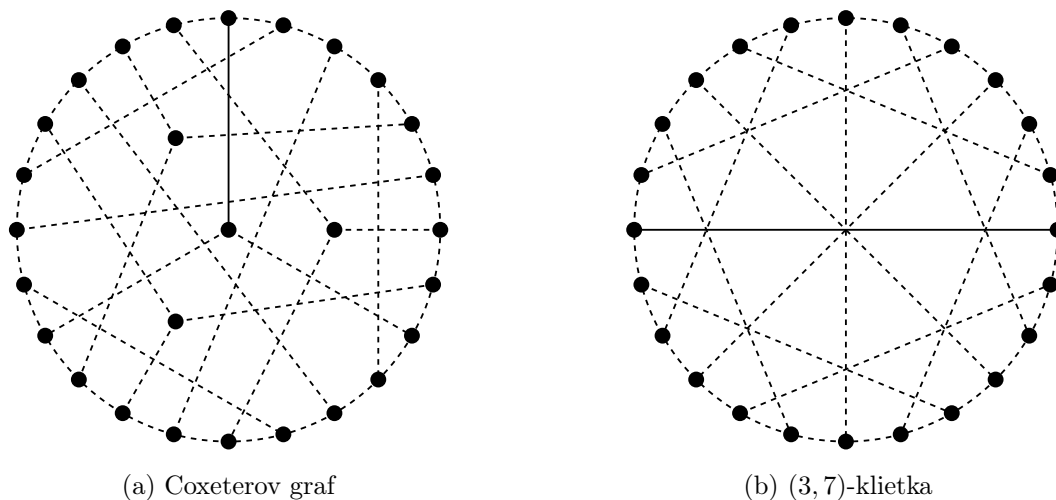




Obr. 4: Graf  $(H_n, \sigma_n)$ .

Dôkaz, že grafy  $(G_k, \sigma_k)$  majú požadované vlastnosti je pomerne jednoduchý, stačí nájsť nikde-nulový 5-tok, cirkulárny 4-tok a ukázať, že nemá nikde-nulový 4-tok. Na to poslúži výsledok Abreua a spol. [2, 3], ktorí ukázali, že každý graf  $(G_k, \sigma_k)$  je 2-faktor hamiltonovský, t.j. každý 2-faktor je hamiltonovská kružnica. Neexistencia nikde-nulového 4-toku preto priamo vyplýva z Vety 5.

S využitím Vety 5 sa nám podarilo nájsť aj dva signované kubické grafy s cyklickou súvislosťou 7 a tokovým číslom aspoň 5 (Obrázok 5). To znamená, že Jaegerova a Swartova hypotéza sa nedá rozšíriť na signované grafy.



(a) Coxeterov graf

(b)  $(3, 7)$ -klietka

Obr. 5

### 3 Grafy s tokovým číslom 6

Ďalšia časť práce je venovaná grafom s tokovým číslom 6. Je známych pomerne málo takých signovaných grafov. V tejto časti sme definovali triedu  $\mathcal{M}$  signovaných grafov, o ktorej veríme, že obsahuje všetky signované grafy s tokovým číslom aspoň 6.

Označme  $P^\sigma$  Petersenov graf s jedným negatívnym 5-cyklom. Ďalej označme  $Q^\sigma$  kocku na ôsmich vrcholoch s práve tromi negatívnymi hranami, ktoré tvoria párovanie, pričom v každej dimenzii je práve jedna negatívna hrana. Nakoniec označme  $N_{2k+1}^\sigma$ ,  $k \geq 1$ , signovaný graf, ktorý získame z pozitívneho cyklu dĺžky  $4k + 2$  pridaním negatívnej paralelnej hrany ku každej druhej

hrane cyklu. Grafy  $N_{2k+1}^\sigma$  nazývame *náhrdelníky*.

Je známe, že grafy  $P^\sigma, Q^\sigma$  a  $N_{2k+1}^\sigma$ , kde  $k > 1$ , sú tokovateľné, ale nemajú nikde-nulový 5-tok. Tieto grafy nazývame *základné grafy*. Každý z týchto grafov vieme rozšíriť do nekonečnej rodiny grafov pomocou dvoch typov rozšírení: vrcholové a hranové rozšírenie.

Nech  $(G, \sigma)$  a  $(H, 1)$  sú signované grafy, pričom  $(H, 1)$  je bezmostový pozitívny graf. Nech  $u \in V(G)$  a  $v \in V(H)$  sú vrcholy stupňa  $k$ , ktoré nie sú incidentné so slučkou. Nech  $u_1, u_2, \dots, u_k$  a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sú druhé koncové vrcholy hrán incidentných s vrcholmi  $u$ , respektíve  $v$ . Signovaný graf, ktorý vznikne spojením grafov  $(G, \sigma)$  a  $(H, 1)$  tak, že sa odstránia vrcholy  $u$  a  $v$  a pridajú sa hrany  $u_i v_i$  so znamienkom  $\sigma(uu_i)$ , kde  $1 \leq i \leq k$ , sa volá *vrcholové rozšírenie* grafu  $(G, \sigma)$ .

Hranové rozšírenie je definované nasledovne. Subdividujeme hranu  $e$  signovaného grafu  $(G, \sigma)$  novým vrcholom na dve pozitívne hrany, ak  $e$  je pozitívna, a na jednu pozitívnu a jednu negatívnu, ak je negatívna. Vrcholové rozšírenie grafu  $(G, \sigma)$ , v ktorom bol použitý nový vrchol stupňa dva sa volá *hranové rozšírenie*.

**Definícia 7.** *Signovaný graf  $(G, \sigma_G)$  nazývame triviálnym rozšírením signovaného grafu  $(H, \sigma_H)$  ak  $(H, \sigma_H)$  môže byť pretransformovaný na graf  $(G, \sigma_G)$  použitím série vrcholových alebo hranových rozšírení.*

Nech  $\mathcal{M}$  je množina signovaných grafov, ktorá pozostáva zo základných grafov, všetkých ich triviálnych rozšírení a všetkých k nim ekvivalentných grafov. Môžete si všimnúť, že množina  $\mathcal{M}$  obsahuje aj nekubické grafy, nakoľko základné grafy môžu byť rozšírené pomocou nekubických grafov. Pre jednoduché kubické signované grafy na najviac 18 vrcholoch sme pomocou počítača potvrdili, že každý taký graf s tokovým číslom aspoň 6 patrí do množiny  $\mathcal{M}$ .

Ukázali sme nasledovnú vetu.

**Veta 8.** *Nech  $(G, \sigma)$  je tokovateľný signovaný graf z množiny  $\mathcal{M}$ . Potom*

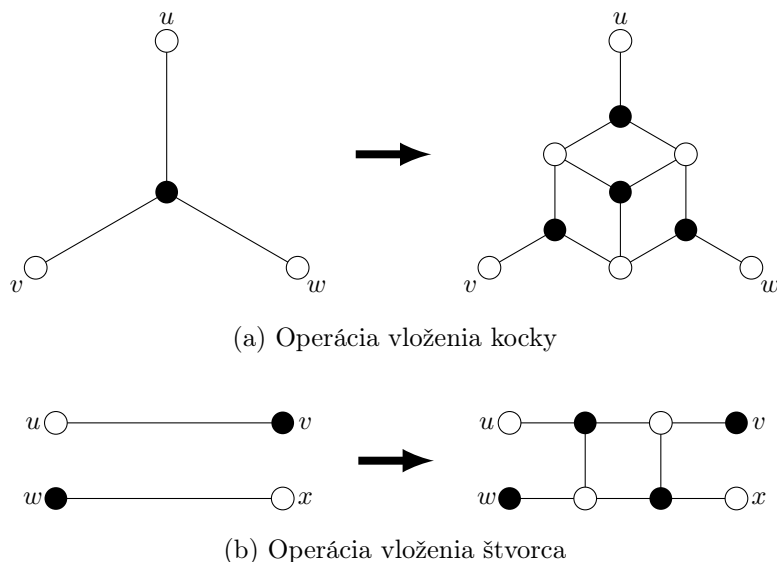
$$\Phi(G, \sigma) = \Phi_c(G, \sigma) = 6.$$

Túto vetu sme dokazovali matematickou indukciou vzhľadom na počet použitých triviálnych rozšírení. Zaujímavá časť bola báza indukcie, v ktorej sme okrem iného dokazovali, že cirkulárne číslo základných grafov je aspoň 6. Pri Petersenovom grafe sme ukázali, že platí dualita medzi tokmi a vrcholovými farbeniami jeho nesignovaného duálneho grafu. Táto dualita platí všeobecne pre nesignované grafy, t.j. grafy vnoriteľné do orientovateľnej plochy, ale nie pre signované grafy. Na dôkaz, že kocka  $Q^\sigma$  má cirkulárne tokové číslo 6 sme použili indukované farbenia. Konkrétne sme ukázali, že všetky jej možné  $r$ -indukované farbenia obsahujú vynucujúce 3-cesty. Pre náhrdelníky sme ukázali, že ak niektorý z nich má cirkulárny  $r$ -tok, kde  $r < 6$ , tak tokové hodnoty na hranách, ktoré nemajú paralelnú hranu, sa musia striedať hodnoty z dvoch disjunktných intervalov. Keďže náhrdelníky majú nepárne veľa takých hrán, nutne musia existovať dve vedľajšie jednoduché hrany, ktoré majú tokovú hodnotu z toho istého intervalu, čo je spor.

## 4 Planárne grafy

Jedným z našich cieľov bolo aj potvrdenie Bouchetovej hypotézy pre kubické planárne bipartitné hranovo 3-súvislé grafy. Túto triedu budeme pre naše účely volať Batageljove grafy, pretože

Batagelj [5] dokázal, že každý graf z tejto triedy sa dá vygenerovať z kocky pomocou dvoch jednoduchých operácií. Prvú operáciu zobrazenú na Obrázku 6a nazývame *vloženie kocky* a druhú operáciu znázornenú na Obrázku 6b nazývame *vloženie štvorca*. Vloženie štvorca vyžaduje, aby existovalo také vnorenie, že dve transformované hrany sú na hranici jednej oblasti.



Obr. 6

Náš cieľ sa nám podarilo naplniť len čiastočne. Keďže pracujeme so signovanými grafmi, tak sme museli uvažovať rôzne signatúry pre vkladané časti. Indukčný krok sa nám nepodarilo dokázať pre prípad operácie vkladania štvorca. Označme podtriedu Batageljových signovaných grafov, ktoré vznikli z kocky sériou operácií vloženie kocky ako  $\mathcal{B}$ .

Dokázali sme nasledovnú vetu.

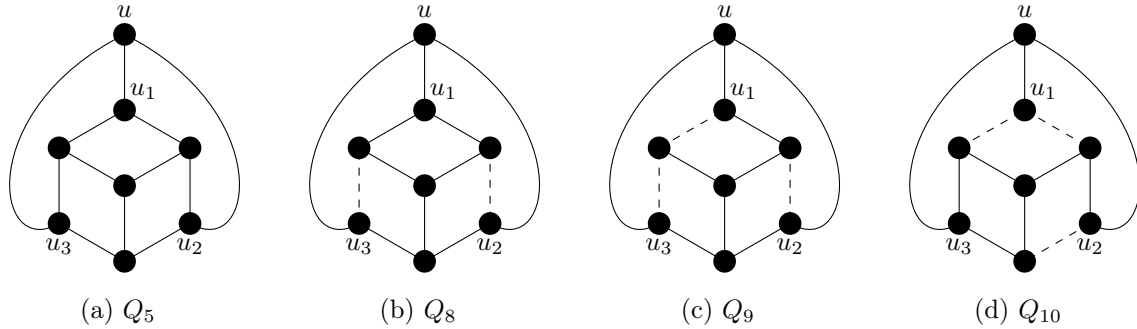
**Veta 9.** Každý tokovateľný signovaný graf  $(G, \sigma) \in \mathcal{B}$  má nikde-nulový 6-tok.

V dôkaze bol zaujímavý hlavne indukčný krok. Formálne sme definovali operáciu vloženie kocky nasledovne. Nech  $(G, \sigma)$  a  $(G', \sigma')$  sú 3-súvislé kubické grafy. Nech  $w, w_1, w_2, w_3 \in V(G)$ , pričom  $w_1, w_2$  a  $w_3$  sú susedné vrcholy  $w$  a nech  $u, u_1, u_2, u_3 \in V(G')$ , pričom  $u_1, u_2$  a  $u_3$  sú susedné vrcholy  $u$ . Graf  $(G'', \sigma'')$  je *vrcholové spojenie grafov*  $(G, \sigma)$  a  $(G', \sigma')$  vo vrcholoch  $w$  a  $u$  ak:

$$\begin{aligned}
 V(G'') &= (V(G) - \{w\}) \cup (V(G') - \{u\}) \\
 E(G'') &= (E(G) - \{w_1w, w_2w, w_3w\}) \cup (E(G') - \{u_1u, u_2u, u_3u\}) \cup \{w_1u_1, w_2u_2, w_3u_3\} \\
 \sigma''(e) &= \begin{cases} \sigma(e) & e \in E(G) \\ \sigma'(e) & e \in E(G') \\ \sigma(w_iw) \cdot \sigma'(u_iu) & e = w_iu_i, i \in \{1, 2, 3\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Označme tento fakt  $(G'', \sigma'') = (G, \sigma) \boxtimes_{w,u} (G', \sigma')$ . Operácia vloženie kocky je vrcholové spojenie nejakého grafu  $(G_0, \sigma_0)$  a signovanej kocky  $(Q, \sigma)$ .

V dôkaze sme ukázali, že stačí uvažovať, že  $(G_1, \sigma_1) = (G_0, \sigma_0) \boxtimes_{w,u} (Q, \sigma)$ , kde  $(Q, \sigma)$  je jedna zo štyroch signovaných kociek na Obrázku 7.



Obr. 7

Graf  $(G_0, \sigma_0)$  spĺňa indukčný predpoklad, preto môže byť netokovateľný, alebo má tokové číslo najviac 6. V nasledujúcej tabuľke je zhrnutie horných ohraničení  $\Phi(G_1, \sigma_1)$  pre všetky prípady indukčného kroku, pričom prvé štyri stĺpce hovoria o prípadoch, keď graf  $(G_0, \sigma_0)$  a posledný stĺpec hovorí o prípade, keď  $(G_0, \sigma_0)$  je tokovateľný. Ak je netokovateľný, tak sa dá prepnúť tak, že má práve jednu negatívnu hranu. Konkrétne prvé tri stĺpce pokrývajú prípady, keď je negatívna hrana incidentná s vrcholom  $w$ , do ktorého vkladáme kocku. Štvrtý stĺpec pokrýva prípad, keď negatívna hrana nie je incidentná s vrcholom  $w$ .

| Typ $Q$  | $\Phi(G_0, \sigma_0) = \infty$ , $uv$ je jediná negatívna hrana |             |             |                      | $\Phi(G_0, \sigma_0) \leq 6$ |
|----------|---|-------------|-------------|----------------------|------------------------------|
|          | $uv = ww_1$   | $uv = ww_2$ | $uv = ww_3$ | $u \neq w, v \neq w$ |                              |
| $Q_5$    | $\infty$  | $\infty$    | $\infty$    | $\infty$             | 6                            |
| $Q_8$    | $\infty$  | 4           | 4           | 5                    | 6                            |
| $Q_9$    | 4   | 4           | 6           | 5                    | 6                            |
| $Q_{10}$ | $\infty$  | 4           | $\infty$    | 5                    | 6                            |

Tabuľka 1: Horný odhad  $\Phi(G_1, \sigma_1)$  pre všetky prípady.

Pre operáciu vkladania štvorca sme zistili, že by bolo nutné výrazne modifikovať indukčný predpoklad, nakoľko nie každý nikde-nulový 6-tok na grafe  $(G_0, \sigma_0)$  vieme jednoducho rozšíriť na nikde-nulový 6-tok na grafe  $(G_1, \sigma_1)$ , ktorý vznikne z  $(G_0, \sigma_0)$  vložením štvorca. Pre žiadne zo skúšaných rozšírení predpokladu sa nám nepodarilo dokázať indukčný krok.

## 5 Krátke cyklové pokrytia nesignovaných grafov

Posledná časť práce je venovaná čo najtesnejšiemu odhadu dĺžky najkratšieho cyklového pokrytia nesignovaných grafov. Hlavným výsledkom tejto časti je nasledovná veta.

**Veta 10.** *Nech  $G$  je bezmostový graf s  $m$  hranami a  $n_2$  vrcholmi stupňa dva. Potom*

$$scc(G) < 1,6148m + 0,0741n_2.$$

Namiesto jej priameho dokazovania sme dokazovali nasledovnú vetu, z platnosti ktorej priamo vyplýva platnosť Vety 10. Stačí každému vrcholu stupňa dva pridať slučku, čím získame bezmostový graf s minimálnym stupňom tri.

**Veta 11.** *Nech  $G$  je bezmostový graf s minimálnym stupňom aspoň tri, ktorý obsahuje  $m$  neslučkových hrán a  $s$  slučiek. Potom*

$$scc(G) < 218/135 \cdot m + 29/27 \cdot s.$$

V dôkaze tejto vety sme vytvorili dve cyklové pokrytia rovnakým spôsobom, ako to urobil Fan vo svojom článku [13]. Tieto dve cyklové pokrytia vychádzajú zo špeciálne zvoleného párneho faktoru  $F$  grafu  $G$ . Na rozdiel od Fana sme párnny faktor  $F$  vyberali náhodne z distribúcie definovanej pomocou Edmondsovho polytopu perfektných párování [11]. To nám umožnilo správať sa k dĺžkam cyklových pokrytí ako k náhodným premenným. Vypočítaním ich očakávanej hodnoty sme našli horný odhad pre dĺžku najkratšieho cyklového pokrytia, lebo určite musí existovať konkrétny párnny faktor  $F$ , z ktorého vzíde cyklové pokrytie najviac takej dĺžky ako je vypočítaná očakávaná hodnota. Takto získané odhady sme následne spojili tak, ako to urobil Fan, čím sme získali odhad z Vety 11.

Náš odhad je lepší ako všeobecný odhad  $scc(G) < 5m/3$  za predpokladu, že  $n_2 \leq 0,7m$ , čo platí vždy, ak  $n_2 \leq 0.7777|V(G)|$ . To je výrazný posun oproti Fanovmu odhadu, ktorý bol už za predpokladu  $n_2 \leq m/10$  horší ako všeobecný odhad.

## Summary

Let  $\Phi(G, \sigma)$  and  $\Phi_c(G, \sigma)$  denote the flow number and the circular flow number of a flow-admissible signed graph  $(G, \sigma)$ , respectively. It is known that  $\Phi(G) = \lceil \Phi_c(G) \rceil$  for every unsigned graph  $G$ . Based on this fact Raspaud and Zhu in 2011 conjectured that  $\Phi(G, \sigma) - \Phi_c(G, \sigma) < 1$  holds also for every flow-admissible signed graph  $(G, \sigma)$ . This conjecture was disproved by Schubert and Steffen using graphs with bridges and vertices of large degree. In this thesis we focus on cubic graphs, since they play a crucial role in many open problems in graph theory. For cubic graphs we show that  $\Phi(G, \sigma) = 3$  if and only if  $\Phi_c(G, \sigma) = 3$  and if  $\Phi(G, \sigma) \in \{4, 5\}$ , then  $4 \leq \Phi_c(G, \sigma) \leq \Phi(G, \sigma)$ . We also prove that all pairs of flow number and circular flow number that fulfill these conditions can be achieved in the family of bridgeless cubic graphs. Moreover, we show infinite family of 3-edge-connected signed cubic graphs with flow number 5 and circular flow number 4. Thereby the conjecture of Raspaud and Zhu is disproved even for 3-edge-connected cubic signed graphs. We also show two cubic signed graphs with cyclic connectivity 7 and the flow number at least 5. Furthermore, we prove that all currently known flow-admissible signed graphs without nowhere-zero 5-flow have flow number and circular flow number 6.

We show partial results for family of the 3-edge-connected bipartite planar cubic signed graphs. This family can be generated from the cube using two operations. We show that every flow-admissible signed graph generated from cube by repeatedly using one operation have nowhere-zero 6-flow. For the second operation we give our observation.

Let  $G$  be unsigned bridgeless multigraph with  $m$  edges and  $n_2$  vertices of degree two and let  $scc(G)$  be the length of the shortest cycle cover of  $G$ . It is known that if  $scc(G) < 1.4m$  in bridgeless graphs with  $n_2 \leq m/10$ , then the Cycle double cover conjecture holds. Fan proved that if  $n_2 = 0$ , then  $scc(G) < 1.6258m$  and moreover if  $G$  is loopless, then  $scc(G) < 1.6148m$ . We show that  $scc(G) < 1.6148m + 0.0741n_2$ . Therefore  $scc(G) < 1.6148m$  even, when  $G$  contains loops and if  $n_2 < m/10$ , then  $scc(G) < 1.6223m$ .

## Publikácie

- A. Kompišová, E. Máčajová: *Flow number and circular flow number of signed cubic graphs*, Acta Math. Univ. Comenian. 88 (2019), 877–883.
- A. Kompišová: *Flows and circular flows on signed cubic graphs* (Extended Abstract), Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2019: Zborník príspevkov.

## Účasť na konferenciách

- Česko-slovenská konferencia Grafy 2016, Chľaba, 2016. Prednáška
- C&C 2016, Workshop Cycles and Colourings, Nový Smokovec, 2016. Prednáška
- C&C 2017, Workshop Cycles and Colourings, Nový Smokovec, 2017. Prednáška
- C&C 2018, Workshop Cycles and Colourings, Nový Smokovec, 2018. Prednáška
- Česko-slovenská konferencia Grafy 2019, Čingov, 2019. Prednáška
- EuroComb 2019, European conference on combinatorics, graph theory and applications, Bratislava, 2019. Prednáška

## Literatúra

- [1] House of Graphs. <https://hog.griv.in.org/>. 2019.
- [2] M. Abreu, R. E. L. Aldred, M. Funk, M. Jackson: *Graphs and digraphs with all 2-factors isomorphic*, J. Combin. Theory Ser. B 92 (2004), 395–404.
- [3] M. Abreu, R. E. L. Aldred, M. Funk, M. Jackson: *Corrigendum to "Graphs and digraphs with all 2-factors isomorphic" [J. Combin. Theory Ser. B 92 (2) (2004) 395-404]*, J. Combin. Theory Ser. B 99 (2009), 271–273.
- [4] N. Alon, M. Tarsi: *Covering multigraphs by simple circuits*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 6 (1985), 345–350.
- [5] V. Batagelj: *Inductive definition of two restricted classes of triangulations*, Disc. Math. 52 (1984), 113–121.

- [6] M. Beck, T. Zaslavsky: *The number of nowhere-zero flows on graphs with cycles*, J. Combin. Theory Ser. B 96 (2006) 901–918.
- [7] J. C. Bermond, B. Jackson, F. Jaeger: *Shortest coverings of graphs with cycles*, J. Combin. Theory Ser. B 35 (1983), 297–308.
- [8] A. Bouchet: *Nowhere-Zero Integral Flows on Bidirected Graph*, J. Combin. Theory Ser. B 34 (1983), 279–292.
- [9] B. Candráková, R. Lukotka: *Short Cycle Covers on Cubic Graphs by Choosing a 2-Factor*, SIAM J. Discrete Math. 30 (2016), 2086–2106.
- [10] M. DeVos, J. Li, Y. Ju, R. Luo, C.-Q. Zhang, Z. Zhang: *Flows on flow-admissible signed graphs*, (2019) [arXiv:1908.10853v2\[math\]](https://arxiv.org/abs/1908.10853v2) .  
34th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2017). Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2017.
- [11] J. Edmonds: *Maximum matching and a polyhedron with  $(0, 1)$  vertices*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect B. 69 B (1965), 125–130.
- [12] J. Edmonds, E. L. Johnson. "Matching: A well-solved class of integer linear programs". In: *Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat., Calgary, Alta., 1969)*. Gordon and Breach, New York, 1970, pp. 89–92.
- [13] G. Fan: *Integer 4-flows and cycle covers*, Combinatorica 37 (2017), 1097–1112.
- [14] G. Fan, A. Raspaud: *Fulkerson's Conjecture and Circuit Covers*, J. Combin. Theory Ser. B 61 (1994), 133–138.
- [15] H. Fleischer: *Eulerian Graphs and Related Topics*, Part 1, Elsevier, 1990.
- [16] F. Harary: *On the notion of balance of signed graph*, Michigan Math. J. 2 (1983–1954), 143–146.
- [17] F. Heider: *Attitudes and cognitive organization*, Journal of Psychology 21 (1946), 107–112.
- [18] F. Jaeger: *Flows and generalized coloring theorems in graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 26 (1979), 205–216.
- [19] F. Jaeger, T. Swart. "Conjecture 1". In: *Combinatorics 7*. Ed. by M. Deza, I. G. Rosenberg. Ann. Discrete Math., Vol. 9, Problem Session, North-Holland, Amsterdam, 1980, pp. 305.
- [20] U. Jamsby, A. Raspaud, M. Tarsi: *Short cycle covers for regular matroids with a nowhere zero 5-flow*, J. Combin. Theory Ser. B 42 (1987), 354–357.
- [21] U. Jamsby, M. Tarsi: *Short cycle covers and the cycle double cover conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B 56 (1992), 197–204.

- [22] T. Kaiser, D. Král', B. Lidický, P. Nejedlý, R. Šámal: *Short Cycle Covers of Cubic Graphs and Graphs with Minimum Degree Three*, SIAM J. Discrete Math. 24 (2010), 330–355.
- [23] T. Kaiser, E. Rollová: *Nowhere-zero flows in signed series-parallel graphs*, SIAM J. Discrete Math. 30 (2016), 1248–1258.
- [24] M. Kochol: *Reduction of the 5-Flow Conjecture to cyclically 6-edge-connected snarks*, J. Combin. Theory Ser. B 90 (2004), 139–145.
- [25] A. Kompišová, E. Máčajová: *Flow number and circular flow number of signed cubic graphs*, Acta Math. Univ. Comenian. 88 (2019), 877–883.
- [26] Y. Lu, R. Luo, C.-Q. Zhang: *Multiple weak 2-linkage and its applications on integer flows of signed graphs*, Eur. J. Combin. 69 (2018), 36–48.
- [27] R. Lukořka: *Short cycle covers of cubic graphs and intersecting 5-circuits*, (2019) arxiv:1901.10718
- [28] R. Lukořka, M. Škoviera: *Snarks with given real flow numbers*, J. Graph Theory 68 (2010), 189–201.
- [29] E. Máčajová: *Osobná komunikácia*, 2012.
- [30] E. Máčajová, E. Rollová: *Nowhere-zero flows in signed complete and complete bipartite graphs*, J. Graph Theory 78 (2015) 108–130.
- [31] E. Máčajová, M. Škoviera: *Remarks on nowhere-zero flows in signed cubic graphs*, Disc. Math. 338 (2015), 809–815.
- [32] E. Máčajová, M. Škoviera: *Nowhere-zero flows on signed eulerian graphs*, SIAM J. Discrete Math. 31 (2017), 1937–1952.
- [33] E. Máčajová, A. Raspaud: *On the strong circular 5-flow conjecture*, J. Graph Theory 52 (2006), 307–316.
- [34] E. Máčajová, E. Steffen: *The difference between the circular and the integer flow number of bidirected graphs*, Disc. Math. 338 (2015) 866–867.
- [35] A. Raspaud: *Flots et couvertures par des cycles dans les graphes et les matroïdes*, Thèse de 3 ème cycle, Université de Grenoble, 1985.
- [36] A. Raspaud, X. Zhu: *Circular flow on signed graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 101 (2011), 464–479.
- [37] E. Rollová, M. Schubert, E. Steffen: *Signed graphs with two negative edges*, Electron. J. Combin 25 (2018), p2.40.
- [38] M. Schubert, E. Steffen: *Nowhere-zero flows on signed regular graphs*, European J. Combin., Selected Papers of EuroComb'13 48 (2015), 34–47.



- [39] P. D. Seymour: *Nowhere-zero 6-flows*, J. Comb. Theory Ser. B 30 (1981) 130–135.
- [40] P. D. Seymour. "Sums of circuits". In *Graph Theory and Related Topics*. Ed. by J.A. Bondy, U. S. R. Murty. Academic Press, New York, 1979, pp. 201–213.
- [41] E. Steffen: *Tutte's 5-flow conjecture for highly cyclically connected cubic graphs*, Disc. Math. 310 (2010) 385–389.
- [42] E. Steffen, G. Mazzuocolo: *Nowhere-zero 5-flows*, Electron. Notes Discrete Math. 49 (2015), 51–55.
- [43] G. Szekeres: *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. 8 (1973), 367–387.
- [44] W. T. Tutte: *A contribution to the theory of chromatic polynomials*, Canad. J. Math 6 (1954) 80–91.
- [45] W. T. Tutte: *On the imbedding of linear graphs in surfaces*, Proc. Lond. Math. Soc. s1-51 (1949) 474–483.
- [46] Y. Wu, D. Ye, W. Zang, C.-Q. Zhang: *Nowhere-zero 3-flows in signed graphs*, SIAM J. Discrete Math. 28 (2014), 1628–1637.
- [47] R. Xu, C.-Q. Zhang: *On flows in bidirected graphs*, Disc. Math. 299 (2005), 335–343.
- [48] F. Yang, S. Zhou: *Nowhere-zero 9-flows in 3-edge-connected signed graphs*, (2015), [arXiv:1508.04620 \[math\]](https://arxiv.org/abs/1508.04620).
- [49] T. Zaslavsky: *Signed graph coloring*, Disc. Math. 39 (1982), 215–228.
- [50] T. Zaslavsky: *Orientation of signed graphs*, Eur. J. Combin. 12 (1991), 361–375.
- [51] O. Zýka: *Nowhere-zero 30-flow on bidirected graphs*, Thesis, Charles University, Praha, KAM-DIMATIA Series 87-26, 1987.