Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Jozef Kiseľák

Autoreferát dizertačnej práce

(Half-linear differential equations of the third order)

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
9.1.9 Aplikovaná matematika

Miesto a dátum: ....

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia
na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky; Katedra Matematickej analýzy a Numerickej matematiky

Predkladateľ: **Mgr. Jozef Kiseľák**
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK
Mlynská dolina
84248 Bratislava 4

Školiteľ: **doc. RNDr. Jaroslav Jaroš, CSc.**

Oponenti: ....
....
....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....

9.1.9 Aplikovaná matematika

na ....

Predseda odborovej komisie:
....
....
....

Obsah

Úvod

Nelineárne diferenciálne rovnice sa v dnešnej dobe objavujú v rôznych aplikáciách fyziky, chémie, ekonómii, matematickej biológii, medicínskom inžinierstve a v iných oblastiach vedy a techniky. Zásadným problémom nelinárnych úloh je, že vo všeobecnosti nie je možné kombináciou dvoch známych riešení získať nové riešenie (tzv. princíp superpozície). My sme sa zamerali na špecifickú triedu rovníc, o ktorých vieme, že spĺňajú aspoň jednu z vlastností linearity. Presnejšie, základnou vlastnosťou študovanej rovnice bola homogenita priestoru riešení[1]. Vychádzali sme z predpokladu, že táto vlastnosť zachováva niektoré vlastnosti riešení z teórie lineárnych diferenciálnych rovníc. Práca je rozdelená na niekoľko častí. Po stručnom historickom úvode sú spomenuté dva motivačné príklady a zavedené základné pojmy. Kapitoly 2 a 4 predstavujú nevyhnutné časti techického charachteru, o ktoré sme sa intenzívne opierali v hlavnej časti práce. Hlavnú časť práce tvoria tri kapitoly (3,5,6). Posledná kapitola uvádza zaujímavé postrehy a nové súvislosti vzťahujúce sa na kapitolu 6.

Študovali sme teda kvalitatívne vlastnosti riešení pololineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu. Takouto rovnicou rozumieme rovnicu

$$\left(\frac{1}{r_2(t)}\,\phi_{\alpha_2}\left[\left(\frac{1}{r_1(t)}\,\phi_{\alpha_1}[y']\right)'\right]\right)' \pm q(t)\,\phi_\beta[y] = 0, \tag{$E_\pm$}$$

kde $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$ a

$$\phi_\alpha[x] := |x|^{\alpha-1}\,x = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x,\ \alpha > 0,$$

známa aj ako "znamienková mocninová funkcia". Naviac sme predpokladali (ak nebolo povedané inak) že platí $\beta = \alpha_1\alpha_2$, pričom práve táto podmienka zabezpečuje spomínanú vlastnosť homogenity. Ďalej, o koeficientoch $r_1,\ r_2,\ q$ sme predpokladali, že sú spojitými funkciami na intervale $I = [a, \beta),\ a < b \le \infty$ a naviac $r_1,\ r_2$ sú kladné a q nezáporná na I.

Ciele dizertačnej práce

Cieľom dizertačnej práce bolo dosiahnuť výsledky, ktoré by prispeli k rozvoju oblasti oscilatorickej a asymptotickej teórie pre nelineárne diferenciálne rovnice. V práci sme študovali špecifický typ nelinéarnej diferenciálnej rovnice a to najmä z kvalitatívneho hľadiska. Prvou úlohou (kapitola 3) bolo získať poznatky o základných otázkach, ako sú existencia

[1] Myslíme tým vlastnosť: ak x je riešením danej DR, tak aj $cx,\ c \in \mathbb{R}$ ním je.

a jednoznačnosť riešenia počiatočnej úlohy. Základným cieľom však bolo štúdium oscilatorického a asymptotického správania sa riešení pololineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu. Vzhľadom k tomu, že takýto typ diferenciálnych rovníc (tretieho rádu) nebol v minulosti študovaný a len nedávno sa objavili niektoré práce so špeciálnejším prípadom rovnice ($E_\pm$) ([24, 54]), museli sme sa oprieť o teóriu vybudovanú pre rovnice druhého rádu tohto typu ([7]) a lineárne diferenciálne rovnice tretieho (druhého) rádu ([16, 20]). Taktiež sme sa domnievali, že zovšeobecnenie Riccatiho transformácie, by mohlo viešt k výsledkom v oblasti porovnávacích viet.

Prehľad výsledkov

Rovnicu ($E_\pm$) môžeme prepísať pomocou tzv. kvázidervivácií obsahujúcich koeficienty r_i a funkcie ϕ_{α_i}, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{(0)}\, y(t) &= y(t) \\ \mathrm{D}^{(i)}\, y(t) &= \frac{1}{r_i(t)}\, \phi_{\alpha_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{D}^{(i-1)}\, y(t)\right] \qquad\qquad i = 1, 2, \\ \mathrm{D}^{(3)}\, y(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{D}^{(2)}\, y(t). \end{aligned}$$

V práci sme používali označenie

$$R_i(t) = r_i^{\frac{1}{\alpha_i}}(t),\ i = 1, 2,$$

ktoré sa tam často vyskytovalo. Označme $\mathcal{D}_{(r,\alpha)}(I)$ ako množinu spojitých funkcií $y(t)$ definovaných na intervale I takých, že ich kvázideriváce $\mathrm{D}^{(i)}\, y(t)$, $i = 1, 2$, existujú a sú spojité na I. Riešením rovnice ($E_\pm$) na intervale $J \subset I$ rozumieme reálnu funkciu $y \in \mathcal{D}_{(r,\alpha)}(J)$, ktorá spĺňa ($E_\pm$) pre všetky $t \in J$. V posledných rokoch sa v niektorých prácach, napr. [24, 54], autori zaoberali diferenciálnymi operátormi typu $\phi_\alpha(\cdot')''$ alebo $\phi_\alpha(\cdot'')'$, nazývanými tiež jednorozmerný p-Laplacián tretieho rádu. V našej rovnici je k nim operátor $\mathrm{D}^{(3)}$ akýmsi zovšeobecnením, zároveň šak svojím tvarom pripomína Sturmov-Liouvilleov operátor. V častiach práce 3 a 5.2 bolo vhodné pracovať s rovnicou ($E_\pm$) ako s trojrozmerným diferenciálnym systémom

$$\begin{aligned} y_0' &= R_1(t)\, \phi_{\alpha_1}^{-1}[y_1], \\ y_1' &= R_2(t)\, \phi_{\alpha_2}^{-1}[y_2], \\ y_2' &= \pm q(t)\, \phi_\beta[y_0], \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde y_0 označuje neznámu funkciu y v pôvodnej rovnici ($E_\pm$). Takýto systém pripomína dvojrozmerný problém, ktorý intenzívne študoval Mirzov[2] [36].

Zaviedli sme niekoľko dôležitých pojmov. O netriviálnom riešení y rovnice ($E_\pm$) hovoríme, že je *oscilatorické* na intervale I, ak na ňom obsahuje nekonečne veľa nulových bodov. Naopak, hovoríme, že riešenie je *neoscilatorické* na intervale I, ak na ňom nie je oscilatorické. Neoscilatorické riešenie na polo-osi $[a, \infty)$, $|a| < \infty$ môžeme chápať ako *eventuálne kladné* alebo *eventuálne záporné* ($\exists\, T \geq a$ také, že $y(t) > 0$ ($y(t) < 0$) pre $t \geq T$).

Definícia 1.4.1. *O rovnici ($E_\pm$) hovoríme, že je oscilatorická na intervale I, ak aspoň jedno netriviálne riešenie je oscilatorické na I.*

Naopak, hovoríme, že rovnica ($E_\pm$) je *neoscilatorická* na intervale I, ak každé jej netriviálne riešenie je neoscilatorické na I.

Definícia 1.4.2. *Hovoríme, že rovnica ($E_\pm$) je diskonjugovaná na intervale I, ak žiadne netriviálne riešenie nemá viac ako dva nenulové body na I (viacnásobné nulové body sú počítané so svojou násobnosťou).*

Pojem diskonjugovanosti je motivovaný úvahami pre lineárne diferenciálne rovnice, viac v monografii [9, kap. 0]. Diskonjugovanosť je síce špeciálnym prípadom neoscilatoričnosti, avšak neoscilatoričnosť nemusí implikovať eventuálnu diskonjugovanosť ($\exists\, T \geq a$, tak, že rovnica je diskonjugovaná na $[T, \infty)$), ako je ukázané v [17].

Existencia a jednoznačnosť

V prvom rade sme sa zaoberali základnými otázkami ako existencia a jednoznačnosť riešenia rovnice ($E_\pm$). Problematika pre podobné typy rovníc bola rozoberaná v [12, 6, 29], viď tiež monografiu [7]. Riešili sme teda Cauchyovu úlohu

$$\mathrm{D}^{(3)}\, y \pm q(t)\, \phi_\beta[y] = 0, \tag{$E_\pm$}$$

a

$$y(a) = A, \;\; \mathrm{D}^{(1)}\, y(a) = r_1(a)\, \phi_{\alpha_1}[B], \;\; \mathrm{D}^{(2)}\, y(a) = r_1(a)\, \phi_{\alpha_1}[C], \tag{3.2}$$

pričom sme sa čiastočne zaoberali aj prípadom $\beta \neq \alpha_1\, \alpha_2$. Z Peanovej vety vieme, že problém ($E_\pm$, 3.2) má pre ľubovoľné hodnoty A, B, C lokálne riešenie. Pri dôkaze predĺžiteľnosti

[2] Stretávame sa aj s názvom Emdenov-Fowlerov systém.

riešenia bola použitá štandardná metóda s využitím Hölderovej a Gronwalovej nerovnosti. Dostali sme tak nasledujúcu vetu.

Tvrdenie 3.1.2. *Cauchyho úloha ($E_\pm$, 3.2) s $\alpha_1\,\alpha_2 \geq \beta$ má aspoň jedno riešenie definované na celom intervale $[a, \infty)$.*

V prípade $\alpha_1\,\alpha_2 < \beta$ počiatočný poblém ($E_\pm$, 3.2) nemusí mať vo všeobecnosti globálne riešenie. Uviedli sme nasledujúci jednoduchý protipríklad.

Príklad 3.1.2. *Cauchyho úloha s nekonštantnými koeficientami.*

$$\begin{aligned}&\Big((x'')^2 \operatorname{sgn} x''\Big)' = 2(\mathrm{e}^{5\,t} + 10\,\mathrm{e}^{4\,t} + 20\,\mathrm{e}^{3\,t} + 8\,\mathrm{e}^{2\,t})\,x^7,\\ &x(0) = 1,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 3.\end{aligned}$$

Platí $\beta = 7 > 2 = \alpha_1\,\alpha_2$ a daný problém má riešenie $x(t) = \dfrac{1}{2-\mathrm{e}^t}$, ktoré je explodujúce v $t = \ln 2$.

Dokázať jednoznačnosť bola technicky náročná úloha. Vzhľadom na to, že nie pre všetky konštanty $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta$ je splnená Lipschitzovská spojitosť pravej strany systému (1.3), museli sme sa zaoberať všetkými prípadmi, pri ktorých nastáva problém. Picardova veta nám zaručila lokálnu jednoznačnosť riešenia problému ($E_\pm$, 3.2)

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ B \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}$ ak $\beta < 1,\ \alpha_1 \leq 1,\ \alpha_2 \leq 1$,

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ak $\beta \geq 1,\ \alpha_1 \leq 1,\ \alpha_2 > 1$,

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ C \in \mathbb{R}$ ak $\beta \geq 1,\ \alpha_1 > 1,\ \alpha_2 \leq 1$,

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ak $\beta > 1,\ \alpha_1 > 1,\ \alpha_2 > 1$,

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ B \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ak $\beta < 1,\ \alpha_1 \leq 1,\ \alpha_2 > 1$ a

pre ľubovoľné $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ C \in \mathbb{R}$ ak $\beta < 1,\ \alpha_1 > 1,\ \alpha_2 \leq 1$.

Zvyšné prípady boli vyriešené pomocou siedmich lém v časti 3.2. Bola teda dokázaná nasledujća veta o jednoznačnosti.

Veta 3.2.8. *Predpokladajme, že $\beta = \alpha_1\alpha_2$ a $q(a) \neq 0$. Pre dané hondoty $a \in I$ a $A, B, C \in \mathbb{R}$ má úloha ($E_\pm$, 3.2) jednoznačné riešenie v pravom okolí bodu a.*

Pre prípad $\alpha_1\,\alpha_2 > \beta$ je možné opäť nájsť príklad, kedy veta neplatí (dokonca existuje kontinuum riešení).

Príklad 3.2.1. *Uvažujme Cauchyho úlohu*

$$((x')^3)'' = k\,|x|^{2-\frac{4}{b}}\,x,$$
$$x(0) = 0,\; x'(0) = 0,\; x''(0) = 0,$$

kde $k = 3b^3(b-1)$ *a* $b > \frac{4}{3}$. *Zrejme platí* $\alpha_1\,\alpha_2 = 3 > \beta = 3 - \frac{4}{b}$. *Ale problém má nekonečne veľa riešení, keďže*

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le c, \\ (t-c)^b, & t \ge c \end{cases}$$

je riešením pre každé nezáporné c.

Musíme zdôrazniť fakt, že v prípade $\alpha_1\,\alpha_2 < \beta$ spojitosť koeficientov r_1, r_2, q ešte pravdepodobne nezaručuje jednoznačnosť riešenia. Naznačujú to práce ako [12] a [29], kde autori pre prípad kvázilineárnej rovnice druhého rádu predpokladajú vlastnosti ako ohraničená variácia, respektíve spojitá diferencovateľnosť. Vzhľadom na to, že to nebolo cieľom práce, ponechávame to ako otvorený problém.

Porovnávacie vety

V kapitole 5 sme sa zaoberali tzv. porovnávacími vetami, opierali sme sa najmä o práce [10, 11, 51]. Najprv sme študovali rovnicu

$$(\phi_{\alpha_1}[y'])'' + q(t)\,\phi_{\alpha_1}[y] = 0, \tag{5.1}$$

čo je špeciálny prípad rovnice $(E_\pm)$ s $\alpha_2 = 1, r_1 \equiv 1, r_2 \equiv 1$. Pomocou tzv. zovšeobecnenej Riccatiho transformácie $z = \phi_{\alpha_1}\left[\frac{y'}{y}\right]$, viď kapitolu 2, dostaneme rovnomennú rovnicu druhého rádu

$$z'' + (2\alpha_1 + 1)\,|z|^{\frac{1}{\alpha_1}-1} z\,z' + \alpha_1^2\,|z|^{\frac{2}{\alpha_1}} z + q(t) = 0.$$

Ako sme ukázali v kapitole 4, Eulerova rovnica má pre kritické hodnoty γ vždy riešenie tvaru t^λ, kde $\lambda \in (1,2)$. Naviac pre ľubovoľné $\alpha_1 \ge 1$ platí, že $\lambda^{\alpha_1} \in (1,2)$. Tieto úvahy nás priviedli k substitúcii $w = 2 - t^{\alpha_1} z$, ktorá nám v takomto prípade zaručí, že $w \in (0,1)$. Dostaneme tak rovnicu

$$t^2\,w'' + (2\,\alpha_1 + 1)\,t\,|2-w|^{\frac{1}{\alpha_1}-1}(2-w)\,w' - 2\,\alpha_1\,t\,w' = \alpha_1^2\,|2-w|^{\frac{2}{\alpha_1}}(2-w) +$$
$$(\alpha_1^2 + \alpha_1)(2-w) - \alpha_1\,(2\,\alpha_1+1)\,|2-w|^{\frac{1}{\alpha_1}+1} + t^{\alpha_1+2}\,q(t).$$

Pomocou prechodu k integrálnej rovnici

$$t^2 w = a^2 w(a) + g(a)(t-a) + \frac{C}{2}(t-a)^2 + \frac{D}{2}\left(t^2 - a^2\right) + \int_a^t [(t-s)\, H(w) + G(w,s)]\, \mathrm{d}s + Q(t), \tag{5.5}$$

kde

$$\begin{aligned} g(a) &= a^2 w'(a) - 2\,(\alpha_1 + 1)\, a\, w(a) - \omega\, a\, |2 - w(a)|^{\frac{1}{\alpha_1}+1} \\ H(w) &= -\sigma\, |2 - w|^{\frac{1}{\alpha_1}+1} + \alpha_1^2\, |2 - w|^{\frac{2}{\alpha_1}} (2 - w) - (\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)\, w \\ &\quad + 2\alpha_1(\alpha_1 + 1) - C, \\ G(w,s) &= (4 + 2\,\alpha_1)\, s\, (2 - w) + \omega\, s\, |2 - w|^{\frac{1}{\alpha_1}+1} - D, \\ Q(t) &= \int_a^t (t-s)\, s^{\alpha_1+2}\, q(s)\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

a metódy postupných aproximácií sme rovnicu (5.5) porovnávali s podobnou integrálnou rovnicou asociovanou s

$$(\phi_{\alpha_1}[y'])'' + q_1(t)\, \phi_{\alpha_1}[y] = 0, \tag{5.11}$$

kde $q_1 \in C(I)$. Označme

$$\omega = \frac{\alpha_1(2\,\alpha_1 + 1)}{\alpha_1 + 1}, \quad \sigma = \omega + \alpha_1(2\alpha_1 + 1), \quad C = -\sigma\, 2^{\frac{1}{\alpha_1}+1} + \alpha_1^2\, 2^{\frac{2}{\alpha_1}+1}$$

a

$$D = \omega\, 2^{\frac{1}{\alpha_1}+1}, \; g(a) = a^2 w'(a) - 2\,(\alpha_1 + 1)\, a\, w(a) - \omega\, a\, |2 - w(a)|^{\frac{1}{\alpha_1}+1}.$$

Ďalej nech $Q(t) = \int_a^t (t-s)\, s^{\alpha_1+2}\, q(s)\, \mathrm{d}s$ a $Q_1(t) = \int_a^t (t-s)\, s^{\alpha_1+2}\, q_1(s)\, \mathrm{d}s$ a v rieši príslušnú integrálnu rovnicu k (5.11). Potom dokázané tvrdenie znie:

Tvrdenie 5.1.3. *Nech $w(t)$ je riešenie (5.5) také. že $0 < w(t) < 1$ na I. Predpokladajme, že*

$$g(a)(t-a) + \frac{C}{2}(t-a)^2 + \frac{D}{2}\left(t^2 - a^2\right) + Q_1(t) \geq 0, \quad t \geq a.$$

Naviac, nech

$$Q_1(t) \leq Q(t), \quad t \geq a.$$

Potom postupnosť $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na kompaktných podintervaloch I k riešeniu v integrálnej rovnice asociovanej s (5.1) *a platí $0 < v \leq w$ na I.*

V ďalšom už predpokladáme, že sú splené podmienky

$$\int_a^{\infty} R_i(t)\, \mathrm{d}t = \infty, \; i = 1, 2. \tag{6.3}$$

a rovnicu $(E_\pm)$ s takýto obmedzením prepíšeme skrátene ako

$$\mathrm{D}^{(3)}\, y(t) \pm\; q(t)\, \phi_\beta[y(t)] = 0. \qquad (\tilde{E}_\pm)$$

Neskôr sme sa zamerali na porovnávacie kritérium typu Hille-Wintner. Rovnicu $(\tilde{E}_-)$ sme porovnávali s rovnicou

$$\tilde{\mathrm{D}}^{(3)}\, y(t) - \tilde{q}(t)\, \phi_\beta[y(t)] = 0, \qquad (\hat{E}_-)$$

kde operátor $\tilde{\mathrm{D}}^{(3)}$ obsahuje funkcie $\tilde{r}_i,\ i = 1,2$ namiesto $r_i,\ i = 1,2$. V práci bolo dokázané tvrdenie, ktorého dôsledok zaručuje existenciu riešenia v triede $\mathcal{N}_1$ (viac o neoscilatorických riešeniach v nasledujúcej časti).

Tvrdenie 5.2.3. *Predpokladajme, že riešenie y rovnice* $(\tilde{E}_-)$ *patrí do triedy* $\mathcal{N}_1$. *Nech* $q,\ \tilde{q} \in C(I)$ *spĺňajú*

$$q(t) \geq 0,\ \tilde{q}(t) \geq 0 \quad for \quad t \geq a,$$

a pre $r_i,\ \tilde{r}_i,\ i = 1,2$ *nech platia nerovnosti*

$$r_1(t) \geq \tilde{r}_1(t),\ r_2(t) \leq \tilde{r}_2(t),\ \ t \geq a.$$

Ďalej predpokladajme, že

$$Q(t),\ \tilde{Q}(t) \quad existuj\ a \quad Q(t) \leq \tilde{Q}(t)$$

pre dostatočne veľké t. Potom $(\hat{E}_-)$ *má neoscilatorické riešenie na* $J = [t_0, \infty)$ *pre nejaké* $t_0 \geq a$, *ktoré patrí do triedy* $\mathcal{N}_1$.

Uviedli sme nasledujúcu aplikáciu ako dôsledok vety 5.2.3. Zoberme do úvahy redukovanú rovnicu (E_-)

$$\left(\phi_{\alpha_2}\left[(\phi_{\alpha_1}[y'])'\right]\right)' = q_1(t)\, \phi_\beta y.$$

Veta 5.2.3 nám dáva podmienku existencie riešenia v triede $\mathcal{N}_1$. Konkrétnejšie, q_1 musí spĺňať

$$t^{\alpha_2(\alpha_1+1)} \int_t^\infty q_1(s)\ \mathrm{d}s \leq -\frac{E(\alpha_1, \alpha_2)_-}{\alpha_2(\alpha_1 + 1)}, \quad t \geq t_0.$$

Množina neoscilatorických riešení

V kapitole 6 sme sa zamerali na štruktúru množiny neoscilatorických riešení rovnice $(\tilde{E}_\pm)$. Ťažisko hlavnej idey spočívalo na prepoklade, že štruktúra neoscilatorických riešení rovnice $(\tilde{E}_\pm)$ a jej autonómnej časti sú asymptoticky ekvivalentné. Principiálny systém asociovanej autonómnej rovnice tvoria

$$K_0(t) = 1, \quad K_1(t) = \int_a^t R_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad K_2(t) = \int_a^t R_1(\tau)\left[\int_a^\tau R_2(z)\,\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{\alpha_1}} \mathrm{d}\tau.$$

V prípade, že $r_i(t) = 1,\ i = 1, 2$ a $a = 0$ máme

$$K_0(t) = 1,\ K_1(t) = t,\ K_2(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1}\, t^{\frac{1}{\alpha_1}+1}.$$

Vďaka podmienkam (6.3) a tvaru rovnice $(\tilde{E}_\pm)$ platí nasledujúce tvrdenie, ktoré je prirodzeným rozšírením známej Kiguradzeho lemy, [26].

Lema 6.1.3. *Nech platia podmienky* (6.3). *Ak $y \in \mathcal{D}_{(\boldsymbol{r},\alpha)}$ je neoscilatorické riešenie rovnice $(\tilde{E}_\pm)$, potom existuje dostatočne veľké T také že:*

pre $(\tilde{E}_+)$ buď

$$y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) < 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(3)}y(t) < 0,$$

alebo

$$y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(3)}y(t) < 0,$$

a pre $(\tilde{E}_-)$ buď

$$y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) < 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(3)}y(t) > 0,$$

alebo

$$y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0, \quad y(t)\,\mathrm{D}^{(3)}y(t) > 0,$$

pre $t \in (T, \infty)$.

Pre množinu všetkých neoscilatorických riešení $\mathcal{N}$ rovnice $(\tilde{E}_\pm)$ existuje nasledujúci rozklad pre rovnicu $(\tilde{E}_+)$, resp. rovnicu $(\tilde{E}_-)$,

$$\mathcal{N}_0 = \left\{x \in \mathcal{N},\ \exists\, T_x : y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) < 0,\ y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0 \ \text{ for }\ t \geq T_x\right\}^{3},$$

$$\mathcal{N}_2 = \left\{x \in \mathcal{N},\ \exists\, T_x : y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0,\ y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0 \ \text{ for }\ t \geq T_x\right\},$$

resp.

$$\mathcal{N}_1 = \left\{x \in \mathcal{N},\ \exists\, T_x : y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0,\ y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) < 0 \ \text{ for }\ t \geq T_x\right\},$$

$$\mathcal{N}_3 = \left\{x \in \mathcal{N},\ \exists\, T_x : y(t)\,\mathrm{D}^{(1)}y(t) > 0,\ y(t)\,\mathrm{D}^{(2)}y(t) > 0 \ \text{ for }\ t \geq T_x\right\}.$$

Je nutné poznamenať, že každé riešenie s asymptotickým rastom z triedy $\mathcal{N}_k$ môže byť charakterizované práve jednou z nasledujúcich podmienok

[3] Riešenia z triedy $\mathcal{N}_0$ sa nazývajú Kneserove riešenia.

Max) $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{K_k(t)}$ $(k = 0, 1, 2)$ existuje, je nenulová a konečná

Int) $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{K_k(t)} = 0$ a $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{K_{k-1}(t)} = \pm\infty$

Min) $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{K_{k-1}(t)}$ $(k = 1, 2, 3)$ existuje, je nenulová a konečná

Zaviedli sme nasledujúce označenie: $\mathcal{N}_k[\max]$, $\mathcal{N}_k[\text{int}]$, $\mathcal{N}_k[\min]$. V triedach $\mathcal{N}_0$ a $\mathcal{N}_3$ o minimálnych resp. maximálnych riešeniach nebolo prípustné uvažovat'. Nakoniec sme sa zaoberali integrálnou reprezentáciou takýchto riešení. Kvôli lepšej prehl'adnosti bolo vhodné zaviest' nasledujúce integrálne operátory. V tejto časti sme mohli bez ujmy na všeobecnosti predpokladat' o riešení, že je eventuálne kladné. Nech $r_{12} = (r_1, r_2)$, $r_{21} = (r_2, r_1)$, $\alpha_{12} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $r_{21} = (\alpha_2, \alpha_1)$, potom sme zaviedli:

$$
\begin{aligned}
S_0(t, s; y) &= \int_s^t y(z)\,\mathrm{d}z \\
S_1(t, s; r_2, \alpha_2; y) &= \int_s^t R_2(z)\, S_0(t, z; y)^{\frac{1}{\alpha_2}}\,\mathrm{d}z, \\
S_2(t, s; r_{21}, \alpha_{21}; y) &= \int_s^t R_1(z)\, S_1(t, z; r_2, \alpha_2; y)^{\frac{1}{\alpha_1}}\,\mathrm{d}z, \\
S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; y) &= \int_a^\infty R_2(z)\, S_0(\infty, z; y)^{\frac{1}{\alpha_2}}\,\mathrm{d}z, \\
S_2(\infty, a; r_{21}, \alpha_{21}; y) &= \int_a^\infty R_1(z)\, S_1(\infty, z, r_2, \alpha_2; y)^{\frac{1}{\alpha_1}}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

V práci sme ukázali platnost' viet o existencii riešení rovnice $(\tilde{E}_\pm)$ v jednotliých triedach. Nasledujúca veta nám hovorí o tom kedy sú množiny riešení s minimálnym rastom prázdne.

Tvrdenie 6.2.1. *Označme $g_y(\cdot) = q(\cdot)\, y(\cdot)^\beta$. Nutnou a postačujúcou podmienkou existencie riešenia z triedy $\mathcal{N}_2[\min]$ pre rovnicu $(\tilde{E}_+)$ je*

$$S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_1}) < \infty.$$

Ďalej, rovnica $(\tilde{E}_-)$ má riešenie v triede $\mathcal{N}_1[\min]$, resp. v triede $\mathcal{N}_3[\min]$ práve vtedy a len vtedy, ak

$$S_2(\infty, a; r_{21}, \alpha_{21}; g_{K_0}) < \infty,$$

resp.

$$S_0(\infty, a; g_{K_2}) < \infty.$$

Na otázku, kedy sú prázdne triedy riešení s maximálnym rastom, nám odpovedá tvrdenie 6.2.2. Je zaujímavé, že rovnaké integrálne podmienky rozhodujú o existencii rôznych riešeniach rovníc $(\tilde{E}_+)$ a $(\tilde{E}_-)$.

Tvrdenie 6.2.2. *Označme* $g_y(\cdot) = q(\cdot)\,y(\cdot)^\beta$. *Nutnou a postačujúcou podmienkou existencie riešenia z triedy* $\mathcal{N}_1[\max]$ *pre rovnicu* $(\tilde{E}_-)$ *je*

$$S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_1}) < \infty.$$

Ďalej, rovnica $(\tilde{E}_+)$ *má riešenie v triede* $\mathcal{N}_0[\max]$*, resp. v triede* $\mathcal{N}_2[\max]$ *práve vtedy a len vtedy, ak*

$$S_2(\infty, a; r_{21}, \alpha_{21}; g_{K_0}) < \infty,$$

resp.

$$S_0(\infty, a; g_{K_2}) < \infty.$$

Najviac problematické boli odpovede na otázky existencie riešení v triedach $\mathcal{N}_k[\mathrm{int}]$. Pokúsili sme sa dať na ne aspoň čiastočnú odpoveď.

Tvrdenie 6.2.4. *Označme* $g_y(\cdot) = q(\cdot)\,y(\cdot)^\beta$. *Nutnou podmienkou existencie riešenia z triedy* $\mathcal{N}_1[\mathrm{int}]$ *pre rovnicu* $(\tilde{E}_-)$ *je*

$$S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_0}) < \infty \quad a \quad S_2(\infty, a; r_{21}, \alpha_{21}; g_{K_1}) = \infty.$$

Naviac, nutnou podmienkou existencie riešenia z triedy $\mathcal{N}_2[\mathrm{int}]$ *pre rovnicu* $(\tilde{E}_+)$ *je*

$$S_0(\infty, a; g_{K_1}) < \infty \quad a \quad S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_2}) = \infty.$$

Zaujímavým faktom je, že nutná podmienka sa nezhoduje s postačujúcou, tak ako v lineárnom prípade (kedy nutná podmienka vyzerá tak ako postačujúca). Spôsobujú to exponenty α_1 a α_2, ktoré komplikujú plantosť integrálnych nerovností. Uvedieme teda vetu o postačujúcich podmienkach.

Tvrdenie 6.2.5. *Označme* $g_y(\cdot) = q(\cdot)\,y(\cdot)^\beta$. *Postačujúcou podmienkou existencie riešenia z triedy* $\mathcal{N}_1[\mathrm{int}]$ *pre rovnicu* $(\tilde{E}_-)$ *je*

$$S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_1}) < \infty \quad a \quad S_2(\infty, a; r_{21}, \alpha_{21}; g_{K_0}) = \infty.$$

Naviac, postačujúcou podmienkou existencie riešenia z triedy $\mathcal{N}_2[\mathrm{int}]$ *pre rovnicu* $(\tilde{E}_+)$ *je*

$$S_0(\infty, a; g_{K_2}) < \infty \quad a \quad S_1(\infty, a; r_2, \alpha_2; g_{K_1}) = \infty.$$

Dôsledok 6.2.3. *Ak $r_1(t) = r_2(t) = 1$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, tak sa podmienky existencie riešení v jednotlivých triedach redukujú na:*

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_1$[min] alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_0$[max] $\Leftrightarrow$

$$\int_a^\infty \int_z^\infty \int_s^\infty q(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_a^\infty (t-a)^2\, q(t) < \infty;$$

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_1$[max], alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_2$[min] $\Leftrightarrow$

$$\int_a^\infty q(t)\,(t-a)^{\beta+1}\,\mathrm{d}t < \infty;$$

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_3$[min], alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_2$[max] $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2^\beta}\int_a^\infty q(t)\,(t-a)^{2\beta}\,\mathrm{d}t < \infty;$$

tieto výsledky sa zhodujú s prácou [25].

Naviac, ak $r_1(t) = r_2(t) = r(t)$ má primitívnu funkciu $\tilde{r}$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, viď lemma (A.1.1), potom sa podmienky existencie riešení v jednotlivých triedach redukujú na:

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_1$[min], alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_0$[max] $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty (\tilde{r}(t)-\tilde{r}(a))^2\, q(t) < \infty;$$

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_1$[max], alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_2$[min] $\Leftrightarrow$

$$\int_a^\infty q(t)\,(\tilde{r}(t)-\tilde{r}(a))^{\beta+1}\,\mathrm{d}t < \infty;$$

Riešenie y rovnice ($\tilde{E}_-$) patrí do $\mathcal{N}_3$[min], alebo riešenie y rovnice ($\tilde{E}_+$) patrí do $\mathcal{N}_2$[max] $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2^\beta}\int_a^\infty q(t)\,(\tilde{r}(t)-\tilde{r}(a))^{2\beta}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Pomocou tejto teórie sme dokázali nasledujúcu vetu a jej dôsledok.

Veta 6.2.7. *Nech $\alpha_1\alpha_2 \geq 1 > \beta$ a podmienky* (6.3) *sú splnené. Potom rovnica ($\tilde{E}_+$) má neoscilatorické riešenie vtedy a len vtedy, ak platí, že $S_0(\infty, a; g_{K_2}) < \infty$.*

Veta 6.2.8. *Predpokladajme, že* $\alpha_1\alpha_2 \geq 1 > \beta$ *a podmienky* (6.3) *sú splnené. Potom rovnica* $(\tilde{E}_+)$ *je oscilatorická vtedy a len vtedy, ak platí, že* $S_0(\infty, a; g_{K_2}) = \infty$.

V poslednej kapitole sme pre rovnicu $(E_\pm)$ zaviedli špeciálne funkcie pripomínajúce klasický Wronskián a poukázali sme na prepojenie na množinu neoscilatorických riešení $\mathcal{N}$ rovnice $(\tilde{E}_\pm)$.

Záver

V prvom rade považujeme za potrebné zdôrazniť, že pololinerné rovnice tvoria akúsi hranicu, medzi rovnicami ktoré nemajú jednoznačné riešenie a rovnice, ktorých riešenia explodujú (sú nepredĺžiteľné na nekonečnom intervale $[a, \infty)$). Konkrétne máme na mysli to, že pre kladné konštanty spĺňajúce $\alpha_1\alpha_2 = \beta$ existuje vždy jediné globálne riešenie počiatočnej úlohy ($E_\pm$, 3.2), avšak v prípade nerovnosti môže zlyhať ako jednoznačnosť ($\alpha_1\alpha_2 > \beta$), tak predĺžiteľnošt ($\alpha_1\alpha_2 < \beta$). V teórii porovnávacích viet sme dosiahli dva čiastočné výsledky. Pre redukovaný problém 5.1 ($\alpha_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$) bola dokázaná integrálna porovnávacia veta, pričom sme sa museli obmedziť na prípad $\alpha_1 \geq 1$, kedže v technike použitej pri dôkaze sa konvexita funkcie ϕ_{α_1}, $\alpha_1 \geq 1$ zdá byť rozhudujúca. Taktiež je dobré poukázať na domnienku v poznámke 4.0.2, ktorej platnosť bude implikovať netriviálny dôsledok. Druhá veta bola dokázaná pre rovnicu $(\tilde{E}_-)$ a hovorí o tom, kedy má riešenia so špecifickým rastom $(\mathcal{N}_1)$. Teória z kapitoly 6 nám poukazuje na fakt, že za urcitých predpokladov, štrtuktúra množiny riešení rovnice $(\tilde{E}_\pm)$ je asymptoticky ekvivalentná so štruktúrou množiny riešení asociovanej autonómnej rovnice. Je potrebné zdôrazniť, že, tak ako sme očakávali, najväčší problém bol pri otázke existencie riešenia $(\tilde{E}_\pm)$ v triedach typu $\mathcal{N}[\mathrm{int}]$, kde sú potrebné až dve podmienky. Rozdiel oproti lineárnym diferenciálnym rovniciam je aj fakt, že nutná a postačujúca podmienka sa líšia. To spôsobujú exponenty α_1, α_2, ktoré obsahuje operátor $\mathrm{D}^{(3)}$.

Účasť na konferenciách

- Young Researchers in Mathematics 2011, 14th-16th April 2011 at the University of Warwick (talk)
- Early Summer School of Quantitative Finance 2010 (i.a., Øksendal - Malliavin Calculus and Applications to Finance), 7th - 9th June 2010, Praha
- Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2008, (CDDEA), Strečno, Slovak Republic, June 23 - 27, 2008
- International Conference on Applied Natural Sciences, Trnava, Slovakia, November 7-9, 2007 (talk)
- Statistiktage 07, 18. September 2007 - 20. September 2007 Linz, Austria (poster)

Abstract

We study in the thesis a half-linear differential equations, i.e. a type of equations which have the following important property: if function x solves it, then so cx, $c \in \mathbb{R}$ does as well. This property is quaranteed by a signed power function. Problem is studied from a qualitative point of view, mainly in term of oscillatory theory. Work contains also chapert dealing with existence and uniqueness problem for given equation. It appears that this type of equation is some kind of borderline between equations, solution of which are not unique and those which possess non-continuable solutions (blow-up). Further we present two results of comparison theory - integral comparison theorem and Hille-Wintner theorem. By the first of them we consider a special case of studied equation. Main chapter deals with structure of the set of nonoscillatory solutions (Kiguradze classes) and conditions, which ensure existence of solutions falling into a specific class. In the end of that chapter several consequences and examples are mentioned. Thesis points out of fact that this type of differential equations has some similar properties to linear differential equations of the third-order.

Key words: half-linear differential equation, comparison theorem, Riccati transformation, quasi-derivative, nonoscillatory solution

Použitá literatúra

[1] Agarwal, R. P., Grace, S. R., and O'Regan, D. *Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. [cited at p. 2]

[2] Agarwal, R. P., and Manojlović, J. V. Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of fourth order nonlinear difference equations. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. 16*, 2 (2009), 155–174. [cited at p. 42]

[3] Birkhoff, G. D. On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. *Ann. of Math. 12* (1911), 103–123. [cited at p. 1, 30]

[4] Cariñena, J. F., G. P., and Rañada, M. F. A geometric approach to higher-order Riccati chain: Darboux polynomials and constants of the motion. *Journal of Physics: Conf. Ser. 175*, 1 (2009). [cited at p. 12]

[5] Cecchi, M., Došlá, Z., and Marini, M. An equivalence theorem on properties A, B for third order differential equations. *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. 173* (1997), 373–389. [cited at p. 39]

[6] Coffman, C. V., and Ullrich. On the continuation of solutions of a certain non-linear differential equation. *Monatsh. Math. 71* (1967), 385–392. [cited at p. 15, 7]

[7] Došlý, O., and Řehák, P. *Half-linear Differential Equations*, vol. 202 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, Amsterdam, July 2005. [cited at p. 2, 12, 29, 6, 7]

[8] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear Operators, Part I: General Theory*, vol. 7 of *Pure and applied mathematics*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958. [cited at p. 70]

[9] Elias, U. *Oscillation theory of two-term differential equations*. Mathematics and its Applications (Dordrecht). 396. Kluwer Academic Publishers, 1997. [cited at p. 4, 9, 7]

[10] Erbe, L. Integral comparison theorems for third order linear differential equations. *Pacific J. Math. 85*, 1 (1979), 35–48. [cited at p. 30, 31, 32, 9]

[11] Erbe, L. Comparison theorems of Hille-Wintner type for third order linear differential equations. *Bull. Aust. Math. Soc. 21* (1980), 175–188. [cited at p. 36, 37, 9]

[12] Erbe, R. H., and Liang, Z. Continuation and uniqueness for generalized Emden-Fowler systems. *J. Austral. Math. Soc. Ser. 33* (1991), 85–93. [cited at p. 14, 24, 7, 9]

[13] Filippov, V. V. *Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, August 1998. [cited at p. 69]

[14] Flajolet, P., Dumas, P., and Puyhaubert, V. Some exactly solvable models of urn process theory. In *Proceedings of Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science* (2006), P. Chassaing, Ed., vol. AG of *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pp. 59–118. [cited at p. 6, 7]

[15] Galaktionov, V. A., and Svirshchevskii, S. R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Applied Mathematics and Nonlinear Science. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2007. [cited at p. 5]

[16] Greguš, M. *Third Order Linear Differential Equations*, 1st ed., vol. 22 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publ. Company, Dordrecht, August 1987. [cited at p. 1, 2, 12, 25, 41, 6]

[17] Gustafson, G. B. The nonequivalence of oscillation and nondisconjugacy. *Proc. Amer. Math. Soc. 25* (1970), 254–260. [cited at p. 10, 7]

[18] Hanan, M. Oscillation criteria for third-order linear differential equations. *Pac. J. Math. 11* (1961), 919–944. [cited at p. 1, 30]

[19] Hartman, P. Disconjugate nth order differential equations and principal solutions. *Bull. Amer. Math. Soc. 74* (1968), 125–129. [cited at p. 65]

[20] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., vol. 38 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, March 2002. [cited at p. 39, 6]

[21] Hartman, P., and Wintner, A. On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients. *Am. J. Math. 76* (1954), 207–219. [cited at p. 41]

[22] Ince, E. L. *Ordinary Differential Equations*, reprint edition ed. Mathematics and its Applications (East European Series). Dover Publications, Inc., New York, NY, June 1956. [cited at p. 1, 11]

[23] Jaroš, J., and Kusano, T. Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of nonlinear functional differential equations of neutral type. *Funkcialaj Ekvacioj 32*, 2 (1989), 251–263. [cited at p. 42]

[24] Jin, S., and Lu, S. Periodic solutions for third order p-Laplacian equation with a deviating argument. *J. Franklin Inst. 346*, 2 (2009), 126–135. [cited at p. 4, 6]

[25] Kamo, K., and Usami, H. Asymptotic forms of positive solutions of third-order Emden-Fowler equations. *J. Math. Anal. Appl. 271* (2002), 297–312. [cited at p. 3, 42, 55, 15]

[26] Kiguradze, I. T. On the oscillation of solutions of the equation dm u/dtm + a(t)|u|m sgnu = 0,. *Mat. Sb. 65* (1964), 172–187. [cited at p. 44, 12]

[27] Kim, W. J. Asymptotic properties of nonoscillatory solutions of higher order differential equations. *Pacific J. Math. 93*, 1 (1981), 107–114. [cited at p. 41]

[28] King, J. Two generalisations of the thin film equation. *Math. Comput. Modelling 34* (2001), 737–756. [cited at p. 5]

[29] Kitano, M., and Kusano, T. On a class of second order quasilinear ordinary differential equations. *Hiroshima Math. J. 25* (1995), 321–355. [cited at p. 15, 24, 7, 9]

[30] Kreith, K., and Kusano, T. Extremal solutions of general nonlinear differential equations. *Hiroshima Math. J. 10*, 1 (1980), 141–152. [cited at p. 41]

[31] Kusano, T., and Naito, M. Unbounded nonoscillatory solutions of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order. *Hiroshima Math. J. 18*, 2 (1988), 361–372. [cited at p. 41, 56]

[32] Lazer, A. C. The behavior of solutions of the differential equation y''' + p(x)y' + q(x)y = 0. *Pacific J. Math. 17*, 3 (1966), 435–466. [cited at p. 37, 41]

[33] Leibniz, G. Acta eruditorum. In *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, D. J. Struik, Ed. Princeton University Press, August 1986, p. 448. [cited at p. 1]

[34] Li, W., Fan, X., and Zhong, C. Unbounded positive solutions to higher-order difference equations with singular nonlinear term. *Comput. Math. Appl. 39*, 3-4 (2000), 177–184. [cited at p. 42]

[35] Lovelady, D. L. An asymptotic analysis of an odd-order linear differential equation. *Pacific J. Math. 57*, 2 (1975), 475–480. [cited at p. 41]

[36] Mirzov, J. On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems. *J. Math. Anal. Appl. 53* (1976), 418–425. [cited at p. 4, 7]

[37] Naylor, A. W., and Sell, G. R. *Linear operator theory in engineering and science. Repr. of the 1971 orig., publ. by Holt, Rinehart and Winston, Inc. Paperback edition.*, vol. 40 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag New York Inc., New York, NY, February 2000. [cited at p. 69]

[38] Nehari, Z. Non-oscillation criteria for n-th order linear differential equations. *Duke Math. J. 32* (1965), 607–616. [cited at p. 43]

[39] Ollagnier, J. M., Nowicki, A., and Strelcyn, J.-M. On the nonexistence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development. *Bull. Sci. Math. 119*, 3 (1995), 195–233. [cited at p. 9]

[40] Parhi, N., and Padhi, S. Asymptotic behaviour of solutions of delay differential equations of *n*-th order. *Arch. Math., Brno 37*, 2 (2001), 81–101. [cited at p. 42]

[41] Philip Hartman, A. W. On non-oscillatory linear differential equations. *American Journal of Mathematics 75*, 4 (1953), 717–730. [cited at p. 41]

[42] Podlubny, I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego, CA: Academic Press, 1999. [cited at p. 71]

[43] Řehák, P. A Riccati technique for proving oscillation of a half-linear equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 105 (2008), 1–8. [cited at p. 12]

[44] Reichel, W., and R., W. Radial solutions of equations and inequalities involving the p-Laplacian. *J. Inequal. Appl. 1* (1997), 47–91. [cited at p. 17]

[45] Reid, W. T. *Riccati differential equations*, vol. 86 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press Inc., New York, August 1972. [cited at p. 11]

[46] Rovder, J. Oscillation criteria for third-order linear differential equations. *Mat. Čas. 25* (1975), 231–244. [cited at p. 41]

[47] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics. [cited at p. 70]

[48] Swanson, C. A. *Comparison and oscillation theory of linear differential equations*. Academic Press, New York,, 1968. [cited at p. 30, 37]

[49] Tanigawa, T. Oscillation and nonoscillation theorems for a class of fourth order quasilinear functional differential equtions. *Hiroshima Math. J. 33* (2003), 297–316. [cited at p. 3]

[50] Šeda, V. Nonoscillatory solutions of differential equations with deviating argument. *Czech. Math. J. 36(111)* (1986), 93–107. [cited at p. 42]

[51] Wintner, A. On the comparison theorem of Kneser-Hille. *Math. Scand. 5* (1957), 255–260. [cited at p. 36, 9]

[52] Wu, F. Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj 45* (2002), 71–88. [cited at p. 3]

[53] Yang, C., and Yan, J. Positive solutions for third-order Sturm-Liouville boundary value problems with p-Laplacian. *Computers and Mathematics with Applications 59* (2010), 2059–2066. [cited at p. 3]

[54] Yang, C., and Yan, J. Positive solutions for third-order Sturm-Liouville boundary value problems with p-Laplacian. *Comput. Math. Appl. 59*, 6 (2010), 2059–2066. [cited at p. 4, 6]

[55] Zlámal, M. Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equation. *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* (1951), 159–167. [cited at p. 30]