Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

RNDr. Miroslava Kemeňová

Autoreferát dizertačnej práce

Descriptive Complexity of Infinite Words

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.2.1. informatika

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Miroslava Kemeňová
Katedra informatiky
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Pavol Ďuriš, CSc.
Katedra informatiky FMFI UK
Bratislava

Oponenti:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa

v študijnom odbore 9.2.1. informatika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, miestnosť

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod a súčasný stav problematiky

Slovo (postupnosť symbolov) je jedným zo základných konceptov matematiky a informatiky. Aj keď je to pomerne jednoduchý koncept, jeho použitie vedie často k veľmi zaujímavým a komplikovaným výsledkom.

Štúdiom slov sa zaoberá veda s názvom kombinátorika na slovách. Je to pomerne mladá, ale veľmi rýchlo sa rozvíjajúca oblasť diskrétnej matematiky a teoretickej informatiky. Prvé výskumne kroky v tejto oblasti sa zvyknú priraďovať k menu Axel Thue a k roku 1906, viď [50] alebo komentovaný preklad [10] alebo [6, 7]. Po práci Axela Thuea zapadla však táto oblasť na dlhé obdobie prachom, a systematická práca na poli slov sa začal rozvíjať až v druhej polovici dvadsiateho storočia. Prvá monografia na tému kombinátoriky na slovách vyšla v roku 1983 pod pseudonymom Lothaire, pod ktorým sa skrývali mená viacerých významných vedcov [34]. Výskum v tejto oblasti od vtedy ohromne narástol. Keďže slovo je pojem veľmi prirodzený v matematike a informatike, slová sa objavili v mnohých matematických a informatických disciplínach, akými sú napríklad formálne jazyky, teória automatov, algebra, pravdepodobnosť, teória čísel, topológia a v mnohých ďalších.

V predkladanej dizertačnej práci sa zaoberáme špecifickou oblasťou kombinátoriky na slovách, a to teóriou *nekonečných slov*, to jest, nekonečných postupností symbolov vybraných z konečnej abecedy. Podobne ako v prípade konečných slov, ktoré slúžia na popis objektov v rôznych oblastiach vedy, nekonečné slová sú užitočné na popis objektov a fenoménov, ktoré vyžadujú nekonečnú, a teda obyčajne komplikovanejšiu reprezentáciu.

Nekonečné slová skúmame z pohľadu veľmi blízko spojeného s teoretickou informatikou – skúmame koncept *zložitosti* nekonečných slov. Teória zložitosti je oblasťou teoretickej informatiky, kladúcou si otázku, prečo sú niektoré problémy ťažko riešiteľné pomocou počítača. Táto otázka, prevedená do jazyka slov, je otázkou aký "komplikovaný" je daný jazyk (množina slov), alebo v našom prípade nekonečné slovo. Zaujímavosťou akejkoľvek odnože teórie zložitosti je, že existuje množstvo príkladov jednoduchých, prirodzených a veľmi jednoducho formulovateľných problémov, ktorých riešenie sa ukazuje byť veľmi ťažké.

Existuje viacero prístupov k meraniu toho, aké "komplikované" dané nekonečné slovo naozaj je. Každý z týchto prístupov zdôrazňuje iný aspekt zložitosti. V dizertačnej práci sa zameriavame na tzv. *popisnú zložitosť* nekonečných slov, ktorá hľadá odpovede na otázku: Aké komplikované mechanizmy sú potrebné na vytvorenie daného nekonečného slova? Táto teória vyvstala z potreby konečného modelu pre nekonečné objekty. Najjednoduchším a najrozšírenejším mechanizmom používaným na generovanie nekonečných slov spočíva v iterovaní nevymazávajúceho homomorfizmu, viď [50]. Medzi zložitejšie používané mechanizmy patrí najmä kódovanie iterovaného homomorfizmu, iterovanie viacerých homomorfizmov periodicky a iterovanie prekladačov, viď [17].

2 Ciele dizertačnej práce

Najťažšími problémami v teórii zložitosti sú obyčajne prípady hľadania "dolných odhadov". V prípade teórie zložitosti nekonečných slov to znamená hľadanie výsledkov typu **"určité nekonečné slovo sa nedá genrovať pomocou určitého výpočtového modelu"**. Takéto úlohy sú obyčajne veľmi ťažké. Aby sme dokázali, že sa dané nekonečné slovo dá generovať určitým mechanizmom, stačí uviesť jeden spôsob, akým je to možné. Na druhej strane, ak chceme ukázať, že je nemožné generovať dané nekonečné istým mechanizmom, musíme ukázať, že žiadne použitie daného výpočtového modelu nevedie ku generovaniu daného nekonečného slova.

Hlavným cieľom predkladanej dizertačnej práce je hľadanie takýchto dolných odhadov. Musíme zdôrazniť, že dokazovanie, že dané nekonečné slovo nemôže byť generované určitým mechanizmom závisí často na základných vlastnostiach nekonečného slova, a môže byť veľmi ťažké. Aj preto existuje len veľmi málo výsledkov takéhoto typu.

3 Základné modely popisnej zložitosti

Súčasťou dizertačnej práce je prezentácia viacerých algoritmických modelov používaných na generovanie nekonečných slov, spolu s viacerými príkladmi slov vygenerovaných týmito modelmi. Zameriavame sa na generovanie v "reálnom čase", a teda všetky uvažované zobrazenia a mechanizmy sú nevymazávajúce. Modely sú založené na metóde Axela Thuea, konkrétne na generovaní nekonečných slov pomocou iterovania (opakovaného použitia) jednoduchých zobrazení na voľných monoidoch. Zobrazenie, ktoré v svojej práci pôvodne používal Thue, bol homomorfizmus.

3.1 Iterovanie homomorfizmu

Nech $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je nevymazávajúci homomorfizmus predĺžiteľný na písmene $a \in \Sigma$. Potom $h(a) = ax$ pre nejaké $x \in \Sigma^+$. Následne, pre každé $i \in \mathbb{N}$ je slovo $h^i(a)$ vlastným prefixom $h^{i+1}(a)$ a:

$$h^i(a) = axh(x)h^2(x)\dots h^{i-1}(x).$$

Preto limita postupnosti $h^0(a), h^1(a), h^2(a), \dots$ existuje a definuje nasledovné nekonečné slovo $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w} = h^\omega(a) := axh(x)h^2(x)h^3(x)\dots.$$

3.1.1 D0L TAG-systém

D0L TAG-systém je alternatívny pohľad na iterovanie homomorfizmu. Formálne je D0L TAG-systém $\mathcal{M}$ trojica (Σ, h, u), pričom

- Σ je konečná abeceda,
- $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je nevymazávajúci homomorfizmus a
- u je (začiatočné) konečné slovo.

Konfiguráciou D0L TAG-systému $\mathcal{M}$ voláme slovo v tvare $v \upharpoonright w$, pričom $v \in \Sigma^*$ a $w \in \Sigma^+$. Symbol $\upharpoonright$ reprezentuje pozíciu čítacej hlavy.

Stav výpočtu D0L TAG-systému $\mathcal{M}$ je relácia $\vdash$, definovaná na konfiguráciách nasledovne: $v \upharpoonright aw \ \vdash \ va \upharpoonright wh(a)$, where $v, w \in \Sigma^*$ and $a \in \Sigma$.

Hovoríme, že nekonečné slovo $\mathbf{w}$ je *generované D0L TAG-systémom* $\mathcal{M}$, ak pre každý konečný prefix w nekonečného slova $\mathbf{w}$ existuje slovo z také, že $\upharpoonright u \ \vdash^* w \upharpoonright z$.

Nekonečné slovo $\mathbf{w}$ voláme *D0L slovo* vtedy, ak je $\mathbf{w}$ alebo $S\mathbf{w}$ generovateľné iterovaním homomorfizu alebo D0L TAG-systémom, pričom $S \notin \Sigma$.

3.2 Morfické slová

Nech je $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ nevymazávajúci homomorfizmus predĺžiteľný na písmene $a \in \Sigma$ a nech je $c : \Sigma^* \to \Gamma^*$ kódovanie (homomorfizmus zachovávajúci dĺžky). Potom je nekonečné slovo $\mathbf{w} = c(h^\omega(a))$ dobre definované a označujeme ho ako *morfické slovo.* Homomorfizmus h voláme generujúcim homomorfizmom, alebo aj generátorom, postupnosti $c(h^\omega(a))$.

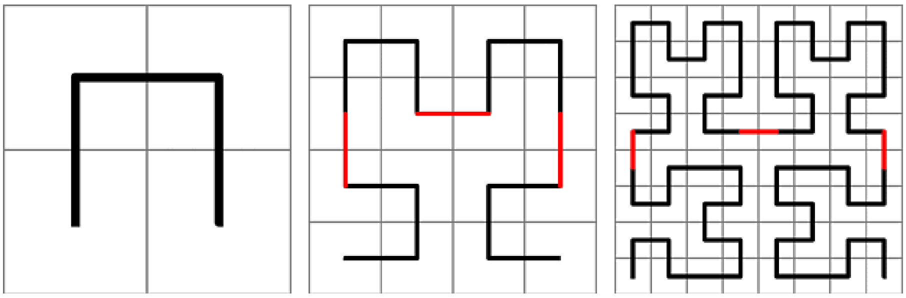
3.2.1 CD0L TAG-system

Na generovanie morfického slova sa dokážeme pozrieť pomocou TAG-stroja: *CD0L TAG-systém* je 5-ica $\mathcal{M} = (\Sigma, \Gamma, h, c, u)$, pričom

- Σ a Γ sú konečné abecedy,
- $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je nevymazávajúci homomorfizmus, nazývaný generujúci homomorfizmus, alebo generátor,
- $c : \Sigma^* \to \Gamma^*$ je kódovanie a
- u je (začiatočné) konečné slovo.

Definícia konfigurácie a kroku výpočtu CD0L TAG-systému je taká istá, ako v prípade D0L TAG-systému. Hovoríme, že nekonečné slovo $\mathbf{w}$ je *generované CD0L TAG-systémom* $\mathcal{M}$, ak $\mathbf{w} = c(\mathbf{z})$, pričom $\mathbf{z}$ je nekonečné slovo generované D0L TAG-systémom (Σ, h, u).

Nekonečné slovo $\mathbf{w}$ voláme *CD0L slovom* ak je $\mathbf{w}$ alebo $S\mathbf{w}$ generované jednou z týchto dvoch metód, pričom $S \notin \Sigma$.



Obr. 1: Hilbertova priestor vypĺňajúca krivka. Slovo, popisujúce proces generovania tejto krivky, je CD0L slovo. [47]

4 Iterovanie gsm

Iterovanie deterministického gsm (generalized sequential machine) rozširuje Thueovu metódu iným spôsobom – používame silnejší mechanizmus priamo v iteračnom procese: Deterministické gsm je šestica $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, \delta, \lambda, q_0)$, pričom

(i) K, Σ_1, Σ_2 sú konečné množiny (stavov, vstupov a výstupov)

(ii) δ je funkcia z $K \times \Sigma_1$ do K (ďalší stav)

(iii) λ je funkcia z $K \times \Sigma_1$ do Σ_2^* (výstup)

(iv) $q_0 \in K$ (začiatočný stav)

Pre každé gsm M, definujeme *gsm zobrazenie* $M : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ako $M(w) = \lambda(q_0, w)$.

Aby sme mohli gsm používať na generovanie nekonečných slov, potrebujeme ho obmedziť podobne ako v prípade iterovaného homomorfizmu. Predpokladáme, že gsm je nevymazávajúce, teda $\lambda(q, a) \neq \varepsilon$ pre všetky $q \in K$ a $a \in \Sigma_1$. Zároveň potrebujeme analógiu prefixovej podmienky, teda že existuje $a \in \Sigma$, ktoré je vlastným prefixom $\delta(q_0, a)$. Do tretice budeme vyžadovať, aby $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Pri splnení týchto podmienok postupnosť $M(a)$, $M^2(a)$, $M^3(a), \ldots$ konverguje k nekonečnému slovu. Označujeme ho $M^\omega(a)$ a hovoríme, že bolo *generované iterovaním deterministického gsm* M.

4.0.2 DGSM TAG-system

DGSM TAG-system $\mathcal{M}$ je trojica (Σ, M, u):

- Σ je konečná abeceda,
- $M = (K, \Sigma, \Sigma, \delta, \lambda, q_0)$ je nevymazávajúce deterministické gsm,
- u je začiatočné konečné slovo.

Konfiguráciou DGSM TAG-systému $\mathcal{M}$ voláme pár $(q, v \upharpoonright w)$, pričom $v \in \Sigma^*$, $w \in \Sigma^+$ a $q \in K$.

Krok výpočtu DGSM TAG-systému $\mathcal{M}$ je relácia $\vdash$, definovaná na konfiguráciách nasledovne:

$$(q, v \upharpoonright aw) \quad \vdash \quad (\delta(q,a), va \upharpoonright w\lambda(q,a)),$$

pričom $v, w \in \Sigma^*$ a $a \in \Sigma$.

Hovoríme, že nekonečné slovo $\mathbf{w}$ je *generované DGSM TAG-systémom* $\mathcal{M}$, ak pre každý prefix w slova $\mathbf{w}$ existuje slovo z a stav $q \in K$ také, že existuje výpočet $(q_0, \upharpoonright u) \quad \vdash^* \quad (q, w \upharpoonright z)$.

Nekonečné slovo $\mathbf{w}$ voláme *DGSM slovo*, ak je $\mathbf{w}$ alebo $S\mathbf{w}$ generované jednou z týchto dvoch uvedených metód, pričom S je symbol nepatriaci do abecedy Σ.

Medzikrokom medzi iterovaním homomorfizmu a iterovaním gsm je *iterovanie viacerých homomorfizmov periodicky.*

5 Hlavné výsledky

5.1 Hierarchia v triede CD0L

Skúmame nasledujúcu triedu binárnych nekonečných slov:

$$\mathbf{Pow_k} = a^{n_1}\#a^{n_2}\#a^{n_3}\#\ldots\#a^{n_i}\#\ldots,$$

pričom $n_i = i^k$. Ukážeme, že slovo $\mathbf{Pow_k}$ je morfické, a zároveň existuje CD0L TAG-systém, ktorý toto slovo generuje a mohutnosť abecedy generátora tohto systému je $k+1$. Takisto dokážeme, že neexistuje CD0L TAG-systém generujúci nekonečné slovo $\mathbf{Pow_k}$, ktorý by mal generátor s mohutnosťou abecedy k alebo menšou. To znamená, že v triede binárnych CD0L slov je *nekonečná hustá hierarchia* – závisiaca na počte použitých písmen v abecede generátora.

5.2 Hierarchia v triede DGSM

Výsledok podobného typu prezentujeme pri zameraní sa na nekonečné slová generované iterovaním deterministického gsm. Konkrétne, využívame iterovanie gsm na konštrukciu nekonečného slova $\mathbf{Lin_k}$ definovaného nasledovne:

$$\mathbf{Lin_k} = c_1\#c_2\#c_3\#\ldots,$$

pričom $c_n = a^n\#a^{2n}\#a^{3n}\#\ldots\#a^{kn}$. Ukážeme, že v triede DGSM slov je takisto *nekonečná hustá hierarchia* – závisiaca od počtu stavov iterovaného gsm.

5.3 Rast dĺžky blokov DGSM slov

V siedmej kapitole skúmame unárne markované nekonečné slová, teda slová tvaru

$$\mathbf{w} = w_1\#w_2\#w_3\#\ldots$$

pričom (blok) w_i je konečné slovo nad unárnou abecedou. Skúmame aký potenciálny rast dĺžok blokov majú unárne markované DGSM slová. Keďže je ľahké skonštruovať unárne D0L slovo s celočíselným rastom, sústredíme sa na skúmanie slov s racionálnym a iracionálnym rastom. Ukážeme, že pre ľubovoľné racionálne $\gamma \geq 1$, pričom $\gamma = c/d$ pre nejaké nesúdeliteľné prirodzené čísla c a d, existuje unárne markované nekonečné slovo s rastom γ, ktoré je generovateľné periodickým iterovaním d homomorfizmov. Podobne vieme toto slovo generovať aj iterovaním dgsm s d stavmi.

Naproti tomu ukážeme, že pre žiadne unárne markované nekonečné slovo s rastom γ neexistuje deterministické gsm s menej ako d stavmi, ktoré by ho generovalo. Tieto fakty teda takisto vedú k odôvodneniu existencie nekonečnej hustej hierarchie v triede DGSM, v závislosti od počtu stavov, a takisto vedú k odôvodneniu existencie nekonečnej hustej hierarchie v triede unárnych markovaných slov generovaných periodickým iterovaním viacerých homomorfizmom – na základe počtu iterovaných homomorfizmov.

Ďalej ukážeme, že iterovaním gsm nevieme generovať nekonečné slová s iracionálnym rastom.

5.4 Prepojenie s teóriou čísel

Posledný z hlavných výsledkov ukazuje, ako súvisí generovanie istého nekonečného slova so známym otvoreným problémom z teórie čísel.

Skúmané slovo je nasledovné:

$$\mathbf{w}_\gamma = w_0\#w_1\#\ldots\#w_n\#\ldots,$$

pričom γ je racionálne číslo a $w_n = a^{\lfloor(\gamma)^n\rfloor}$.

Všetky výsledky prezentované v sekcii 5 sú originálne a sú založené na článkoch [39] a [40].

6 Zoznam použitej literatúry

[1] J.-P. Allouche. Finite automata in 1-D and 2-D physics. In J.-M. Luck, P. Moussa, and M. Waldschmidt, editors, *Number Theory and Physics*, volume 47, pages 177–184, 1990.

[2] J.-P. Allouche, J. Bétréma, and J. Shallit. Sur des points fixes de morphismes D'un monoïde libre. *ITA*, 23(3):235–249, 1989.

[3] J.-P. Allouche and J. Shallit. *Automatic sequences.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[4] J.-M. Autebert and J. Gabarró. Iterated GSM's and Co-CFL. *actainform*, 26:749–769, 1989.

[5] F. Axel, J.-P. Allouche, M. Kleman, M. Mendès France, and J. Peyrière. Vibrational modes in a one dimensional "quasi-alloy": the Morse case. 47:C3.181–C3.186, 1986. Colloque C3, Supplement to No. 7.

[6] J. Berstel. Sur les mots sans carre definis par un morphisme. In *ICALP: Annual International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 1979.

[7] J. Berstel. Sur les mots sans carre definis par un morphisme. In *ICALP: Annual International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 1979.

[8] J. Berstel. *Transductions and Context-Free Languages.* Teubner, Stuttgart, 1979.

[9] J. Berstel. Properties of infinite words: Recent results. In *STACS: Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 1989.

[10] J. Berstel. Axel Thue's work on repetitions in words. In P. Leroux and C. Reutenauer, editors, *Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Publications du LaCIM, pages 65–80. Université du Québec a Montréal, 1990.

[11] J. Berstel and J. Karhumäki. Combinatorics on words – A tutorial. *BEATCS: Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 79, 2003.

[12] G. J. Chaitin. On the length of programs for computing finite binary sequences. *J. ACM*, 13(4):547–569, 1966.

[13] C. Choffrut and J. Karhumäki. Combinatorics of words. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 1, pages 329–438. Springer-Verlag, 1997.

[14] A. Cobham. Uniform tag seqences. *Mathematical Systems Theory*, 6(3):164–192, 1972.

[15] K. Culik and S. Dube. Balancing order and chaos in image generation. *cag*, 17(4):465–486, 1993.

[16] K. Culik and T. Harju. The omega-sequence equivalence problem for D0L systems is decidable. *JACM: Journal of the ACM*, 31, 1984.

[17] K. Culik and Karhumäki. Iterative devices generating infinite words. *IJFCS: International Journal of Foundations of Computer Science*, 5, 1994.

[18] K. Culik, J. Karhumäki, and A. Lepistö. Alternating iteration of morphisms and the Kolakovski sequence. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Lindenmayer Systems*, pages 93–103. 1992.

[19] K. Culik and A. Salomaa. On infinite words obtained by iterating morphisms. *TCS: Theoretical Computer Science*, 19, 1982.

[20] F. M. Dekking. Regularity and irregularity of sequences generated by automata. pages 9.01–9.10, 1979–1980.

[21] F. M. Dekking. On the structure of self-generating sequences. pages 31.01–31.06, 1980–1981.

[22] F. M. Dekking. What is the long range order in the Kolakoski sequence? In R. V. Moody, editor, *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, volume 489 of *NATO ASI Ser., Ser. C., Math. Phys. Sci.*, pages 115–125. Kluwer, 1997.

[23] P. Ďuriš and J. Maňuch. On the computational complexity of infinite words. *TCS: Theoretical Computer Science*, 295, 2003.

[24] A. Ehrenfeucht, K. P. Lee, and G. Rozenberg. Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interactions. *TCS: Theoretical Computer Science*, 1, 1975.

[25] V. Geffert. Normal forms for phrase-structure grammars. *ITA*, 25:473–498, 1991.

[26] K. Hoffman and R. Kunze. *Linear Algebra.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

[27] J. Hopcroft and J. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Addison Wesley, 1979.

[28] J. Hromkovič and J. Karhumäki. Two lower bounds on computational complexity of infinite words. *Lecture Notes in Computer Science*, 1218, 1997.

[29] J. Hromkovič, J. Karhumäki, and A. Lepistö. Comparing descriptional and computational complexity of infinite words. *Lecture Notes in Computer Science*, 812:169–182, 1994.

[30] W. Kolakoski. Elementary problem 5304. 72:674, 1965. Solution, **73** (1966), 681–682.

[31] A. N. Kolmogorov. Three approaches to the quantitative definition of information. *Prob. Info. Trans.*, 1(1):1–7, 1965.

[32] A. Lepistö. On the computational complexity of infinite words. In *Developments in Language Theory*, pages 350–359, 1995.

[33] M. Li and P. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications.* Springer, 2nd edition, 1997.

[34] M. Lothaire. *Combinatorics on Words.* Addison-Wesley, 1983.

[35] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words.* Cambridge University Press, 2002.

[36] V. Manca, C. Martin-Vide, and Gh. Păun. Iterated gsm-mappings: a collapsing hierarchy. Technical Report TR 206, Turku Centre for Computer Science TUCS, October 1998.

[37] M. L. Minsky. *Computation: Finite and Infinite Machines.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[38] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 3:286–303, 1936.

[39] M. Kemeňová. On existence of hierarchies in two classes of infinite words. *Manuscript*, 2010.

[40] M. Kemeňová and T. Kulich. On the growth of marked infinite words generated by iterated gsm. *Manuscript*, 2010.

[41] J.-J. Pansiot. Complexite des facteurs des mots infinis engendres par morphismes iteres. In *ICALP: Annual International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 1984.

[42] P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. The algorithmic beauty of plants. *Springer, New York*, 1990.

[43] G. Păun. (DNA) computing by carving. *Soft Computing*, 3(1):30–36, 1999.

[44] G. Rozenberg and A. Salomaa, editors. *Handbook of Formal Languages*, volume 3. Springer, 1997.

[45] A. Salomaa. *Formal Languages.* Academic Press, 1973.

[46] J. Shallit. A generalization of automatic sequences. *TCS: Theoretical Computer Science*, 61, 1988.

[47] J. Shallit and J. Stolfi. Two methods for generating fractals. *Computers and Graphics*, 13(2):185–191, 1989.

[48] A. R. Smith III. Plants, fractals, and formal languages. *Computer Graphics*, 18(3), 1984.

[49] R. J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference. *Information and Control*, 7:1–22, 224–254, 1964.

[50] A. Thue. Uber unendliche zeichenreihen. *Videnskabsselskabets Skrifter, I Mat.-nat. K1.*, 1906.

[51] T. Vijayaraghavan. On the Fractional Parts of the Powers of a Number (I). *J. London Math. Soc.*, s1-15(2):159–160, 1940.

7 Summary

Main focus of this thesis is on the study of the potential and limitations of devices generating one-way infinite words in real time. These devices are based on Thue's method of iterated application of a simple mapping (e.g. morphism, collection of morphisms or dgsm). We prove that there is a dense infinite hierarchy in the class of binary infinite words obtained as codings of iterated morphism – depending on the cardinality of the generating morphism. Similarly, there is a dense infinite hierarchy in the class of infinite words generated by iterated deterministic gsm – depending on the number of states of the gsm.

We study the growth rates of lengths of blocks of unary marked infinite words. We give a characterization of possible growth rates of words obtained by iterated gsm, which leads to a different demonstration of the existence of the dense infinite state hierarchy in the class of words obtained by iterated gsm, as well as it leads to the existence of the dense infinite hierarchy within the class of infinite words generated by periodic iteration of morphisms – depending on the number of used morphisms.

Finally, we show how an acceptance of a certain unary marked infinite word by a deterministic gsm is dependent on an affirmative answer to a well-known unsolved problem from the field of number theory.

Keywords: infinite words, language theory, combinatorics on words, iterated morphism, morphic words, D0L systems, TAG machines, iterated gsm.