Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Balázs Hegyi

Autoreferát dizertačnej práce

Hyers-Ulam stabilita diferenciálnych rovníc

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
9.1.9. aplikovaná matematika

Miesto a dátum:

Dizertačná práca bola vypracovaná
v dennej forme doktorandského štúdia

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského

Predkladateľ: **Mgr. Hegyi Balázs**
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: **prof. RNDr. Pavel Kostyrko, DrSc.**

Oponenti: ....
....
....
....
....
....
(meno a priezvisko oponenta s uvedením jeho titulov a hodností
a názov ustanovizne, s ktorou je oponent v pracovnom pomere)

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie ....
(uviesť dátum vymenovania)

9.1.9. aplikovaná matematika

na
....
....
(presná adresa miesta konania obhajoby dizertačnej práce)

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod

V roku 1940 Stanislaw M. Ulam na University of Wisconsin (okrem iného) položil nasledujúcu otázku: ak je daná metrická grupa $G(\cdot, \rho)$, číslo $\varepsilon > 0$ a zobrazenie
$f : G \to G$ a je splnená nerovnosť:

$$\rho(f(x \cdot y), f(x) \cdot f(y)) < \varepsilon$$

pre každé x, $y \in G$, či existuje *automorfizmus* A pre G a konštanta $k > 0$, závislá len od G, že:

$$\rho(A(x), f(x)) < k\varepsilon$$

pre každé $x \in G$?
Ak odpoveď je kladná, tak rovnicu $A(x \cdot y) = A(x) \cdot A(y)$ automorfizmu nazývame *stabilná*. Viacerí autori začali skúmať úlohy tohto typu, v roku 1941 Donald H. Hyers sa zaoberal ε - additívnymi zobrazeniami $f : E_1 \to E_2$ medzi Banachovými priestormi, tj. zobrazeniami, ktoré spĺňajú nerovnosť:

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \delta$$

pre každé x, $y \in E_1$.
Ukázal (v [12]), že v tomto prípade additívna funkcia $a : E_1 \to E_2$ existuje, pre ktorú $\|f(x) - a(x)\| < \varepsilon$ (tj. v tomto špeciálnom prípade $k = 1$). Teda Cauchyho funkcionálna rovnica $f(x + y) = f(x) + f(y)$ je stabilná.
Ďalším veľmi dôležitým zovšeobecnením Hyers-Ulam stability je spojené s prácou Tosia Aoki [3]. Žiaľ, táto práca zostala bez povšimnutia a až oveľa neskôr (v roku 1978), tieto výsledky "znovu" objavil Themistocles M. Rassias [45] a odvtedy tento typ stability funkcionálnych rovníc sa volá Hyers-Ulam-Rassias stabilita. Definícia a hlavné tvrdenie z [3], ktoré zovšeobecňujú Hyers-Ulam stabilitu funkcionálnych rovníc (z [12]):

Transformáciu $f : E \to E'$ voláme *"približne lineárna"*, ak existuje $K \geq 0$ a $p \in \mathbb{R}$, $0 \leq p < 1$, že:

$$\| f(x + y) - f(x) - f(y) \| \leq K (\| x \|^p + \| y \|^p)$$

pre každé x, $y \in E$.
Nech f a φ sú transformácie z E do E'. Nazývame ich *"blízke"*, ak existujú $K \geq 0$ (tzv. *Hyers-Ulam konštanta*) a $p \in \mathbb{R}$, $0 \leq p < 1$, že:

$$\| f(x) - \varphi(x) \| \leq K \| x \|^p$$

pre všetky $x \in E$.

Tvrdenie 1 ([3])**.** *Ak f je približne lineárna transformácia z E do E', potom existuje jednoznačne určená lineárna transformácia φ blízko k f.*

Výborné zhrnutia dosiahnutých výsledkov o Hyers-Ulam-Rassias stabilite *funkcionálnych rovníc* nájdeme v knihách: Jung [27]; Hyers, Isac, Rassias [13]; Czerwik [6]. Skvelým zhrnutím výsledkov stability funkcionálnych rovníc (aj s bohatým zoznamom použitej literatúry) je vedecký článok [7]. Teória stability aj zovšeobecnenej stability funkcionálnych rovníc sú úzko spojené s prácami matematikov Themistocles M. Rassias a Jung Soon-Mo.

Predložená dizertačná práca sa zaoberá Hyers-Ulam stabilitou *diferenciálnych* rovníc. Míľnikmi v teórií Hyers-Ulam stability sú [43] a [44] poľskej matematičky Marty Obłoza. Tieto dve práce boli prvé o Hyers-Ulam stabilite *diferenciálnych rovníc*, otvorili bránu do štúdia nového typu stability diferenciálnych rovníc - okrem dobre známeho typu *Lyapunovej* stability. Práca [44] je porovnaním Lyapunovej a Hyers-Ulam stability diferenciálnych rovníc. Definícia a hlavné tvrdenie o Hyers - Ulam stabilite lineárnej diferenciálnej rovnice (podľa [43]): uvažujme diferenciálnu rovnicu

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{(R)}$$

(D je otvorená, súvislá podmnožina (tj. oblasť) $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie).

Definícia 2 ([43])**.** Ľubovoľnú funkciu φ definovanú na intervale I nazývame δ-približné riešenie (R), ak:

(i) $(t, \varphi(t)) \in D$, pre všetky $t \in I$

(ii) φ je diferencovateľná na I

(iii) $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \delta$, pre každé $t \in I$

Podľa [12] môžeme definovať stabilitu rovnice (R) nasledovne:

Definícia 3 ([43])**.** Rovnica (R) je stabilná *v zmysle Hyers* práve vtedy, keď pre každú kladnú hodnotu ε, existuje kladná hodnota δ, že pre každú funkciu φ a x: ak φ je δ-približné riešenie (R) definované na I, x je riešenie (R), definované na I, a pre nejaké $\tau \in I$:

$$\varphi(\tau) = x(\tau)$$

potom

$$|\varphi(t) - x(t)| \leq \varepsilon \;\; \text{pre každé } t \in I$$

V [43] autorka skúmala stabilitu lineárnej diferenciálnej rovnice:

$$x'(t) + g(t)x(t) = p(t) \qquad \text{(R')}$$

kde p a g sú spojité reálne funkcie definované na intervale I.

Tvrdenie 4 ([43])**.** *Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ohraničený interval. Predpokladajme, že:*

$$\int_I |g(t)|dt < \infty$$

Potom rovnica (R') *je stabilná v zmysle Hyers.*

Naneštastie, podobne, ako v prípade [3], tieto výsledky opäť zostali bez povšimnutia a v rade ďalších prác o Hyers-Ulam stabilite diferenciálnych rovníc často citujú [2]. Tvrdenia v [2] boli potom zovšeobecnené v prácach, ktoré uvedieme na konci v časti Literatúra.

V ďalšom Jung skúmal diferenciálne rovnice $\varphi(t)y'(t) = y(t)$ v [15], $y'(t) + g(t)y(t) + h(t) = 0$ v [18]. Keďže v predloženej dizertačnej práci pri dôkaze Hyers-Ulam stability Laplaceovej rovnice a rovnice vedenia tepla sa opierame o tvrdenia z [18], uvedieme ich aj na tomto mieste: nech je daná rovnica

$$y'(t) + g(t)y(t) + h(t) = 0 \tag{1}$$

Veta 5 ([18])**.** *Nech X je komplexný Banachov priestor a nech $I = (a, b)$ je otvorený interval, a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Nech funkcie $g : I \to \mathbb{C}$ a $h : I \to X$ sú spojité funkcie, že $g(t)$ a $\exp\{\int_a^t g(u)du\}h(t)$ sú integrovateľné na (a, c) pre každé $c \in I$. Navyše predpokladajme, že $\varphi : I \to [0, \infty)$ je funkcia, že $\varphi(t)\exp\{\Re(\int_a^t g(u)du)\}$ je integrovateľná na I. Ak spojite diferencovateľná funkcia $y : I \to X$ spĺňa nerovnosť:*

$$\|y'(t) + g(t)y(t) + h(t)\| \leq \varphi(t) \tag{2}$$

pre každé $t \in I$, potom existuje jednoznačne určené $x \in X$, že:

$$\begin{aligned}&\left\| y(t) - \exp\left\{-\int_a^t g(u)du\right\}\left(x - \int_a^t \exp\left\{\int_a^v g(u)du\right\}h(v)dv\right)\right\| \\ &\leq \exp\left\{-\Re\left(\int_a^t g(u)du\right)\right\}\int_t^b \varphi(v)\exp\left\{\Re\left(\int_a^v g(u)du\right)\right\}dv\end{aligned} \tag{3}$$

pre každé $t \in I$.

Poznámka 6. Poznamenajme, že:

$$y(t) = \exp\left\{-\int_a^t g(u)du\right\}\left(x - \int_a^t \exp\left\{\int_a^v g(u)du\right\}h(v)dv\right)$$

je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1), kde x je ľubovoľný prvok z X.

Dôsledok 7 ([18]). *Nech X je komplexný Banachov priestor a nech $I = (a,b)$ je otvorený interval, a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Nech funkcie $g : I \to \mathbb{C}$ a $h : I \to X$ sú spojité funkcie, že $g(t)$ a $\exp\{\int_b^t g(u)du\}h(t)$ sú integrovateľné na (c,b) pre každé $c \in I$. Navyše predpokladajme, že $\varphi : I \to [0,\infty)$ je funkcia, že $\varphi(t)\exp\{\Re(\int_b^t g(u)du)\}$ je integrovateľná na I. Ak spojite diferencovateľná funkcia $y : I \to X$ spĺňa nerovnosť (2) pre každé $t \in I$, potom existuje jednoznačne určené $x \in X$, že:*

$$\left\| y(t) - \exp\left\{-\int_b^t g(u)du\right\}\left(x - \int_b^t \exp\left\{\int_b^v g(u)du\right\}h(v)dv\right)\right\|$$
$$\leq \exp\left\{-\Re\left(\int_b^t g(u)du\right)\right\}\int_a^t \varphi(v)\exp\left\{\Re\left(\int_b^v g(u)du\right)\right\}dv \tag{4}$$

pre každé $t \in I$.

Poznámka 8. Poznamenajme, že pre ľubovoľný prvok $x \in X$:

$$y(t) = \exp\left\{-\int_b^t g(u)du\right\}\left(x - \int_b^t \exp\left\{\int_b^v g(u)du\right\}h(v)dv\right)$$

je riešenie diferenciálnej rovnice (1).

Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu skúmali (bez snahy o úplnosť uvedieme ich krátky zoznam) napr. v prácach: [1], [4], [15], [16], [17], [18], [28], [32], [34], [42], [46], [48]. Osobitne si spomeňme [17] (o stabilite sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientami), [25] (autor dokázal globálnu verziu vety o implicitnej funkcie so špeciálnou podmienkou a použil tento výsledok na dôkaz stability exaktnej diferenciálnej rovnice tvaru $g(x,y) + h(x,y)y' = 0$) a [32] (o stabilite sústavy Eulerových diferenciálnych rovníc prvého rádu).

Výsledky stability rovnice druhého rádu nájdeme napr. v [9], [14], [19], [20], [21], [23], [24], [26], [29], [30], [31], [35], [36], [37], [38], [39].

Podľa zistení autora, v čase písania tejto dizertačnej práce s Hyers-Ulam stabilitou diferenciálnych rovníc tretieho rádu sa zaoberali v [1] a [28].

V súčasnosti sa intenzívnejšie skúma Hyers-Ulam stabilita *parciálnych* diferenciálnych rovníc. Hlavným prínosom tejto dizertačnej práce je dôkaz Hyers-Ulam stability Laplaceovej rovnice (Kapitola 2) a rovnice vedenia tepla (Kapitola 3). V čase písania tejto dizertačnej práce boli známe (podľa zistení autora) výsledky o stabilite parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré nájdeme v [5], [8], [22], [33], [40], [41].

2 Dosiahnuté výsledky

2.1 Stabilita Laplaceovej rovnice

V tejto podkapitole zhrnieme dosiahnuté výsledky stability Laplaceovej rovnici, publikované v [10].

Definícia 9. Nech je daná *Laplaceová rovnica*:

$$\triangle u = 0 \tag{5}$$

kde $\triangle$ je Laplaceov operátor, tvaru

$$\triangle(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Nech ďalej Ω je oblasť (otvorená, súvislá podmnožina) v $\mathbb{R}^n$. Dvakrát spojite diferencovateľná funkcia $u : \Omega \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa (5) sa volá *harmonická funkcia*.

Riešenia Laplaceovej rovnice sa nazývajú niekedy aj *potenciály, funkcie potenciálov*, vzhľadom na ich fyzikálny význam. Laplaceová rovnica modeluje viaceré fyzikálne javy, má veľký význam v teórii pružnosti, v hydrodynamike a v elektrotechnike; u môže znamenať napr. hustotu nejakej veličiny (chemickú koncentráciu) v rovnováhe.
Nech X je normovaný priestor a nech I je otvorený interval. Predpokladajme, že pre ľubovoľnú funkciu $f : I \to X$ spĺňajúcu diferenciálnu nerovnosť

$$\|a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x)\| \leq \varepsilon$$

pre každé $x \in I$ a pre nejaké $\varepsilon \geq 0$, existuje riešenie $f_0 : I \to X$ diferenciálnej rovnice

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x) = 0 \tag{6}$$

že platí $\|f(x) - f_0(x)\| \leq K(\varepsilon)$, pre ľubovoľné $x \in I$, kde $K(\varepsilon)$ závisí len od ε. Potom hovoríme, že (6) má Hyers-Ulam stabilitu (alebo inak: že (6) je stabilná v zmysle Hyers-Ulam).
Ak horeuvedené tvrdenie platí aj v prípade, že nahradíme ε a $K(\varepsilon)$ s $\varphi(x)$ a $\Phi(x)$, kde $\varphi, \Phi : I \to [0, \infty)$ sú funkcie, ktoré nezávisia od f a f_0 explicitne, tak hovoríme, že daná diferencálna rovnica má zovšeobecnenú Hyers-Ulam stabilitu (alebo Hyers-Ulam-Rassias stabilitu).
Túto terminológiu môžeme použiť aj v prípade parciálnych diferenciálnych rovníc. Pre podrobnejšie definície a zhrnutia odkazujem na [2, 6, 12, 13, 27, 45, 47].

V roku 2007, Jung a Lee [33] dokázali Hyers-Ulam stabilitu lineárnej *parciálnej* dfierenciálnej rovnice prvého rádu

$$au_x(x,y) + bu_y(x,y) + cu(x,y) + d = 0,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $c, d \in \mathbb{C}$ sú konštanty, že $\Re(c) \neq 0$. Táto práca bola prvá, ktorá sa zaoberala Hyers-Ulam stabilitou parciálnych diferenciálnych rovníc (pozri ešte [22]).
V tejto kapitole sa venujeme Hyers-Ulam stabilite Laplaceovej rovnice $\triangle u(x) = 0$ v triede sféricky symetrických funkcií, tj. keď riešenie u je sféricky symetrická (niekedy sa tomu hovorí *rotačne symetrická*) skalárna funkcia.
Pre dané celé číslo $n \geq 2$, x_i označuje i-tú súradnicu ľubovoľného bodu $x \in \mathbb{R}^n$, tj. $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, a r alebo $|x|$ označujú Eulidovskú vzdialenosť medzi x a počiatkom, tj.

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nech r_0 a r_1 sú kladné konštanty a definujme

$$\begin{aligned}
&D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_0 < |x| < \infty\},\\
&D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < r_1\},\\
&U_0 = \{u : D_0 \to \mathbb{R} \mid u(x) = v(r) \text{ pre každé } x \in D_0 \text{ a pre nejaké } v : [r_0, \infty) \to \mathbb{R}\},\\
&U_1 = \{u : D_1 \to \mathbb{R} \mid u(x) = v(r) \text{ pre každé } x \in D_1 \text{ a pre nejaké } v : (0, r_1] \to \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Veta 10. *Nech $\varphi : D_0 \to [0, \infty)$ je funkcia, že platí*

$$\varphi(x) = \varphi(r) = \frac{\theta}{r^{n+\varepsilon}} \tag{7}$$

pre každé $x \in D_0$ a nejaké kladné konštanty ε a θ. Ak nejaká dvakrát spojite diferencovateľná funkcia $u \in U_0$ spĺňa

$$|\triangle u(x)| \leq \varphi(x) \tag{8}$$

pre každé $x \in D_0$, potom existuje harmonická funkcia $u_0 \in U_0$, že platí

$$|u(x) - u_0(x)| \leq \frac{\theta}{(n-2+\varepsilon)\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^{n-2+\varepsilon}} - \frac{1}{r^{n-2+\varepsilon}}\right) \tag{9}$$

pre každé $x \in D_0$, kde x_0 je ľubovoľný bod v $\mathbb{R}^n$, spĺňajúci $|x_0| = r_0$.

Veta 11. *Nech $\varphi : D_1 \to [0, \infty)$ je funkcia, že*

$$\varphi(x) = \varphi(r) = \frac{\theta}{r^{n-\varepsilon}} \tag{10}$$

pre každé $x \in D_1$ a pre nejaké kladné konštanty ε a θ. Ak dvakrát spojite diferencovateľná funkcia $u \in U_1$ spĺňa

$$|\triangle u(x)| \leq \varphi(x) \tag{11}$$

pre každé $x \in D_1$, tak existuje harmonická funkcia $u_0 \in U_1$, že

$$|u(x) - u_0(x)| \leq \frac{\theta}{(n-2-\varepsilon)\varepsilon}\left(\frac{1}{r^{n-2-\varepsilon}} - \frac{1}{r_1^{n-2-\varepsilon}}\right) \tag{12}$$

pre každé $x \in D_1$, kde x_1 je ľubovoľný bod v $\mathbb{R}^n$ spĺňajúci $|x_1| = r_1$.

2.2 Stabilita rovnice vedenia tepla

V tejto kapitole sa zaoberáme stabilitou rovnice vedenia tepla a uvedieme výsledky z [11]. Rovnica vedenia tepla (bez pravej strany) má tvar:

$$\triangle u(x,t) - u_t(x,t) = 0 \tag{13}$$

Riešenie hľadáme v triede radiálne symetrických funkcií, kde $\triangle$ označuje Laplaceov operátor, $t > 0$, $x \in U$ a $U \subset \mathbb{R}^n$ je oblasť. Rovnica vedenia tepla je mimoriadne dôležitá vo viacerých odvetviach matematiky a matematickej fyziky. V matematike je základným príkladom tzv. *parabolických* parciálnych diferenciálnych rovníc. V teórií pravdepodobnosti, rovnica vedenia tepla modeluje Brownov pohyb (pomocou Fokker – Planck rovnice). Vo finančnej matematike sa používa na riešenie Black–Scholes rovnice. Difúzna rovnica, ktorá má všeobecnejší tvar, ako rovnica vedenia tepla, sa vynorí v súvislosti so skúmaním chemickej difúzie a iných súvisiacich procesov.
Pre všeobecný úvod o Hyers-Ulam stabilite parciálnych diferenciálnych rovníc pozri podkapitolu (2.1) o Laplaceovej rovnice.

Pre dané prirodzené číslo $n \geq 2$, nech x_i označuje i-tú súradnicu ľubovoľného bodu $x \in \mathbb{R}^n$, tj.: $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Predpokladajme, že a, b, t_1 sú konštanty, pre ktoré $0 < a < b \leq \infty$, $t_1 > 0$, a definujme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < |x| < b\} \quad \text{a} \quad T = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < t_1\}.$$

Hľadáme riešenie rovnice (13) v tvare $u(x,t) = v\big(|x|^2/t\big) = w\big(|x|/\sqrt{t}\big)$, pre funkcie v a w. Definujeme

$$U = \Big\{u : D \times T \to \mathbb{R} \mid u(x,t) = w\big(|x|/\sqrt{t}\big) \text{ pre každé } x \in D, t \in T \text{ a}$$
$$\text{pre nejakú funkciu } w : \big(a/\sqrt{t_1}, \infty\big) \to \mathbb{R}\Big\}.$$

Veta 12. *Nech* $\varphi : \left(a/\sqrt{t_1}, \infty\right) \to [0,\infty)$ *a* $\psi : T \to [0,\infty)$ *sú funkcie, že:*

$$\int_u^\infty s^{n-1} e^{s^2/4} \varphi(s) ds < \infty \quad \left(\textit{pre } \ u > a/\sqrt{t_1}\right), \tag{14}$$

$$\int_{a/\sqrt{t_1}}^r \frac{1}{u^{n-1}} e^{-u^2/4} \int_u^\infty s^{n-1} e^{s^2/4} \varphi(s) ds du < \infty \quad \left(\textit{pre } \ r > a/\sqrt{t_1}\right), \tag{15}$$

$$c := \inf_{t \in T} t\psi(t) > 0. \tag{16}$$

Ak davkrát spojite diferencovateľná funkcia $u \in U$ *spĺňa*

$$|\triangle u(x,t) - u_t(x,t)| \le \varphi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\psi(t) \tag{17}$$

pre každé $x \in D$ *a* $t \in T$*, potom existuje riešenie* $u_0 : D \times T \to \mathbb{R}$ *rovnice vedenia tepla* (13)*, že* $u_0 \in U$ *a*

$$|u(x,t) - u_0(x,t)| \le \int_{a/\sqrt{t_1}}^{|x|/\sqrt{t}} \frac{c}{u^{n-1}} e^{-u^2/4} \int_u^\infty s^{n-1} e^{s^2/4} \varphi(s) ds du \tag{18}$$

pre každé $x \in D$ *a* $t \in T$*.*

Dôsledok 13. *Nech* $\varphi : \left(a/\sqrt{t_1}, \infty\right) \to [0,\infty)$ *a* $\psi : T \to [0,\infty)$ *sú funkcie, predpokladajme, že existujú kladné konštanty* c*,* ε*,* θ*, že platí*

$$\frac{a}{\sqrt{t_1}} \ge e, \tag{19}$$

$$\varphi(r) \le \frac{\theta e^{-r^2/4}}{r^n (\ln r)^{1+\varepsilon}} \quad \left(\textit{pre } \ r > a/\sqrt{t_1}\right), \tag{20}$$

$$\psi(t) \ge \frac{c}{t} \quad (\textit{pre } \ t \in T). \tag{21}$$

Ak dvakrát spojite diferencovateľná funkcia $u \in U$ *spĺňa*

$$|\triangle u(x,t) - u_t(x,t)| \le \varphi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\psi(t)$$

pre každé $x \in D$ *a* $t \in T$*, potom existuje riešenie* $u_0 : D \times T \to \mathbb{R}$ *rovnice vedenia tepla* (13)*, že platí* $u_0 \in U$ *a*

$$|u(x,t) - u_0(x,t)| \le \frac{c\sqrt{\pi}\,\theta}{e^{n-1}\varepsilon}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t_1}}\right)\right]$$

pre každé $x \in D$ *a* $t \in T$*.*

Summary

We study in the thesis the Hyers-Ulam stability of differential equations. After a not so short introduction and summary of known results in the field of Hyers-Ulam stability, with special care of mentioning pioneer works of Tosio Aoki and Marta Obłoza, we focus our attention to prove the stability of Laplace equation (Chapter 2) and heat equation (Chapter 3).

Keywords: Hyers-Ulam stability, generalized Hyers-Ulam stability, Laplace equation, heat equation

Literatúra

[1] Abdollahpour, M.-R.and Najati, A. Stability of linear differential equations of third order. *Appl. Math. Letters 24*, 11 (2011), 1827–1830.

[2] Alsina, C., and Ger, R. On some inequalities and stability results related to the exponential function. *J. Inequal. Appl. 2* (1998), 373–380.

[3] Aoki, T. On the stability of the linear transformation in Banach spaces. *J. Math. Soc. Japan 2* (1950), 64–66.

[4] Cimpean, D.-S., and Popa, D. On the stability of the linear differential equation of higher order with constant coefficients. *Appl. Math. Comp. 217* (2010), 4141–4146.

[5] Cimpean, D.-S., and Popa, D. Hyers-Ulam stability of Euler's equation. *Appl. Math. Letters 24* (2011), 1539–1543.

[6] Czerwik, S. *Functional Equations and Inequalities in Several Variables.* World Scientific Publishing Co., 2002.

[7] Forti, G.-L. Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables. *Aequationes Math. 50* (1995), 143–190.

[8] Gordji, M. E., Cho, Y. J., Ghaemi, M. B., and Alizadeh, B. Stability of the second order partial differential equations. *J. Inequal. Appl. 2011:81* (2011).

[9] Găvruţa, P., Jung, S.-M., and Li, Y. Hyers-Ulam stability for second-order linear differential equations with boundary conditions. *Electronic J. Diff. Eq. 2011* (2011), 1–5.

[10] Hegyi, B., and Jung, S.-M. On the stability of Laplace's equation. *Appl. Math. Letters 26* (2013), 549–552.

[11] Hegyi, B., Jung, S.-M., and Kim, K.-S. On the stability of Heat equation. *(submitted to Abstract and Applied Analysis)* (2013).

[12] Hyers, D.-H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27* (1941), 222–224.

[13] Hyers, D.-H., Isac, G., and Rassias, T. M. *Stability of Functional Equations in Several Variables*, vol. 48 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 2012.

[14] Javadian, A., Sorouri, E., Kim, G.-H., and Gordji, M.-E. Generalized Hyers-Ulam stability of the second-order linear differential equations. *J. Appl. Math. 2011*, 813137 (2011), 1–10.

[15] Jung, S.-M. Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order. *Appl. Math. Letters 17* (2004), 1135–1140.

[16] Jung, S.-M. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, III. *J. Math. Anal. Appl. 311* (2005), 139–146.

[17] Jung, S.-M. Hyers-Ulam stability of a system of first order linear differential equations with constant coefficients. *J. Math. Anal. Appl. 320* (2006), 549–561.

[18] Jung, S.-M. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, II. *Appl. Math. Letters 19* (2006), 854–858.

[19] Jung, S.-M. Legendre's Differential Equation and Its Hyers-Ulam Stability. *Abs. App. Anal. 2007* (2007), 1–14.

[20] Jung, S.-M. Approximation of analytic functions by Airy functions. *Int. Transf. Spec. Funct. 19*, 12 (2008), 885–891.

[21] Jung, S.-M. Approximation of analytic functions by Hermite functions. *Bull. Sci. Math. 133* (2009), 756–764.

[22] Jung, S.-M. Hyers-Ulam stability of linear partial differential equations of first order. *Appl. Math. Letters 22*, 1 (2009), 70–74.

[23] Jung, S.-M. Approximation of Analytic Functions by Kummer Functions. *J. Ineq. Appl. 2010* (2010), 1–11.

[24] Jung, S.-M. Hyers-Ulam stability of differential equation $y'' + 2xy' - 2ny = 0$. *J. Ineq. Appl. 2010*, 793197 (2010), 1–12.

[25] Jung, S.-M. Implicit Function Theorem and Its Applications to a Ulam's Problem for Exact Differential Equations. *Acta Math. Sinica 26*, 11 (2010), 2085–2092.

[26] Jung, S.-M. Approximation of analytic functions by Laguerre functions. *Appl. Math. Comp. 218* (2011), 832–835.

[27] Jung, S.-M. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis*, vol. 48 of *Springer Optimization and Its Applications.* Springer New York, 2011.

[28] Jung, S.-M. Approximate Solution of a Linear Differential Equation of Third Order. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35*, 4 (2012), 1063–1073.

[29] Jung, S.-M. Approximation of analytic functions by special functions. *Ann. Funct. Anal. 3*, 1 (2012), 92–99.

[30] Jung, S.-M., and Kim, B.-B. Chebyshev's Differential Equation and Its Hyers-Ulam Stability. *Diff. Eq. Appl. 2009* (2009), 199–207.

[31] Jung, S.-M., and Kim, B.-B. Simple Harmonic Oscillator Equation and Its Hyers-Ulam Stability. *J. Func. Spac. Appl. 2012* (2012), 1–8.

[32] Jung, S.-M., Kim, B.-B., and Rassias, T. M. On the Hyers-Ulam stability of a system of Euler differential equations of first order. *Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 24*, 4 (2008), 381–388.

[33] Jung, S.-M., and Lee, K.-S. Hyers-Ulam stability of first order linear partial differential equations with constant coefficients. *Math. Ineq. & Appl. 10* (2007), 261–266.

[34] Jung, S.-M., and Rassias, T. M. Ulam's problem for approximate homomorphisms in connection with Bernoulli's differential equation. *Appl. Math. Comp. 187* (2007), 223–227.

[35] Jung, S.-M., and Rassias, T.-M. Approximation of Analytic Functions by Chebyshev Functions. *Abs. App. Anal. 2011*, 432961 (2011), 1–10.

[36] Kim, B.-B., and Jung, S.-M. Bessel's Differential Equation and Its Hyers-Ulam Stability. *J. Ineq. Appl. 2007* (2007), 1–8.

[37] Li, Y. Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations $y'' = \lambda^2 y$. *Thai Journal of Mathematics 8*, 2 (2010), 215–219.

[38] Li, Y., and Shen, Y. Hyers-Ulam stability of Nonhomogeneous Linear Differential Equations of Second Order. *Int. J. Math. Math. Sci. 2009*, 576852 (2009), 1–7.

[39] Li, Y., and Shen, Y. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order. *Appl. Math. Letters 23* (2010), 306–309.

[40] Lungu, N., and Crăciun, C. Ulam-Hyers-Rassias Stability of a Hyperbolic Partial Differential Equation. *ISRN Math. Anal. 2012*, 609754 (2012).

[41] Lungu, N., and Popa, D. Hyers-Ulam stability of a first order partial differential equation. *J. Math. Anal. Appl. 385* (2012), 86–91.

[42] Miura, T., Hirasawa, G., and Takahasi, S.-E. Note on the Hyers-Ulam-Rassias stability of the first order linear differential equation $y'(t)+p(t)y(t)+q(t) = 0$. *J. Math. Math. Sci.*, 22 (2004), 1151–1158.

[43] Obłoza, M. Hyers stability of the linear differential equation. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Prace Matematyczne 13* (1993), 259–270.

[44] Obłoza, M. Connection between Hyers and Lyapunov Stability of the ordinary differential equations. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP W Krakowie, zesyt 189*, Prace Matematyczne XIV (1997), 141–146.

[45] Rassias, T. M. On the stability of the linear mappings in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc. 72* (1978), 297–300.

[46] Rus, I.-A. Ulam stabilities of ordinary differential equations in Banach space. *Carpathian J. Math. 1*, 26 (2010), 103–107.

[47] Ulam, S. M. *Problems in Modern Mathematics.* Wiley, New York, 1964.

[48] Wang, G., Zhou, M., and Sun, L. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Appl. Math. Letters 21* (2008), 1024–1028.

Zoznam publikovaných prác

B., Hegyi, S.M., Jung, On the stability of Laplace's equation, Applied Mathematics Letters 26 (2013), 549–552.