UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Mgr. Jana Havlíčková

Autoreferát dizertačnej práce

Topologické metódy v pravdepodobnosti

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia:
9.1.7 Geometria a topológia

Bratislava, 2015

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Jana Havlíčková
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK,
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.
Matematický ústav SAV,
Grešákova 6, 040 01 Košice

Oponenti: ……………………………………………………….
……………………………………………………….

……………………………………………………….
……………………………………………………….

……………………………………………………….
……………………………………………………….

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... o .... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie ....

v študijnom odbore 9.1.7. Geometria a topológia

na FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4.

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4

1 Úvod

1.1 Historický prehľad

Väčšie množstvo konkrétnych poznatkov je užitočné triediť a sprehľadniť. Takto možno charakterizovať aj využívanie abstraktnej matematiky. Napríklad v teórii pravdepodobnosti σ-aditivitu a limitné konštrukcie možno zaradiť do rámca spojitých štruktúr a na ich lepšie pochopenie možno využiť niektoré všeobecnejšie topologické postupy.

Dôležité tvrdenie teórie miery hovorí, že každú pravdepodobnostnú mieru p na $\mathbf{A}$ (normovanú σ-aditívnu mieru) možno rozšíriť na pravdepodobnostnú mieru p_σ na $\sigma(\mathbf{A})$, pričom toto rozšírenie je jednoznačné. Josef Novák, ako odchovanec svetoznámeho topológa Eduarda Čecha, v tejto konštrukcii "videl" sekvenčné zovšeobecnenie slávnej topologickej Čechovej-Stoneovej β-kompaktifikácie a vypracoval teóriu **sekvenčných obalov** ([40],[41],[42],[5]).

V druhej polovici minulého storočia sa vyvinula kategoriálna topológia a Mirek Hušek, jeden z jej protagonistov v Československu poukázal na kategoriálnu podstatu konštrukcie sekvenčného obalu: ide o **epireflexiu**, čo je spomínaná Novákom tušená podobnosť s Čechovou-Stoneovou β-kompaktifikáciou
([16],[6],[8],[11],[12]).

Na rozširovanie miery sa podobá aj prechod od klasických náhodných udalostí ku (merateľným) fuzzy náhodným udalostiam a prechod od pravdepodobnostnej miery ku integrálu podľa miery tak, ako to navrhol L. A. Zadeh ([52]).

Ďalším impulzom bol kategoriálny prístup ku teórii pravdepodobnosti a zavedenie vhodných kvantových štruktúr: MV-algebier, D-posetov a efektových algebier ([4]). Práve kategoriálny prístup umožňuje analyzovať aj pomerne vzdialené oblasti matematiky z vhodnej jednotiacej perspektívy, klásť zaujímavé otázky a nachádzať prekvapivé odpovede ([1]).

Fuzzy pravdepodobnosť (pozri [25], [2], [3]) pôvodne modelovala fyzikálne deje spojené s meraním v mikrosvete, ale nachádza aj širšie uplatnenie. Možno sa na ňu dívať aj ako na zovšeobecnenie klasickej pravdepodobnosti ([32]), pričom práve kategoriálne metódy poskytujú nástroje na popísanie prechodu od booleovského prístupu k stochastickým dejom ku fuzzy prístupu (pozri [14], [22], [12]). Pritom fuzzy náhodná premenná má kvantový charakter: môže zobraziť elementárnu udalosť (degenerovanú pravdepodobnostnú mieru) na spektrum (nedegenerovanú pravdepodobnostnú mieru) a duálne, fuzzy pozorovateľná má fuzzy charakter: môže zobraziť booleovskú (ostrú) udalosť na fuzzy (neostrú) udalosť. IF-pravdepodobnosť (pozri [49]) pracuje s dvojicami fuzzy udalostí, čo naznačuje využívanie abstraktného súčinu, pričom teória kategórií sa tiež ukazuje ako vhodný nástroj pre vyjasnenie vzťahu medzi IF-pravdepodobnosťou a fuzzy pravdepodobnosťou (pozri [24], [51]).

1.2 Ciele dizertačnej práce

Cieľom dizertačnej práce je prehĺbiť využitie topologických metód a metód teórie kategórií v teórii miery a v teórii pravdepodobnosti. Na možnosť a vhodnosť využitia topologických metód v teórii miery poukázal J. Novák v prácach [39], [40] a [42]. Myšlienkou bolo považovať ohraničenú mieru na okruhu množín za ohraničenú sekvenčne spojitú funkciu, ktorá má ďalšie špeciálne vlastnosti a skúmať možnosti, ako môžeme takéto funkcie rozšíriť na generovaný σ-okruh topologickými prostriedkami, pokiaľ možno bez využitia vonkajšej miery. Ukázalo sa, že tento prístup ku rozširovaniu miery je analogický ako rozširovanie ohraničených spojitých funkcií na úplne regulárnych topologických priestoroch a bola vybudovaná teória sekvenčných obalov ([41]).

Ako ukázal M. Hušek (pozri [14]), teória kategórií je vhodným aparátom, pomocou ktorého možno študovať rozširovanie spojitých funkcií v širšom kontexte. Prvým krokom je nájsť vhodnú kategóriu, ktorá je vytvorená vhodným objektom, nazýva sa kogenerátor, pomocou jeho mocnín a vlastne ide o rozširovanie morfizmov do tohto objektu. Druhým krokom je hľadanie najväčšej podkategórie, ktorej objekty majú z hľadiska rozširovania takýchto morfizmov extrémne vlastnosti. Typickým príkladom je Čechova-Stoneova kompaktifikácia. Základnou kategóriou sú úplne regulárne (Hausdorffove) priestory, kogenerátorom je interval $[0, 1]$ a podkategóriu tvoria kompaktné priestory. V prípade rozširovania ohraničených mier bolo potrebné identifikovať vhodné kategórie.

Ako sa ďalej ukázalo (pozri [14], [23]), zovšeobecňovanie klasickej pravdepodobnosti a hlavne fuzzy pravdepodobnosti dáva podnety pre ďalšie bádanie v tejto oblasti.

Naším cieľom je formulovať topologické a kategoriálne problémy v oblasti zovšeobecnenej pravdepodobnosti, ktoré nadväzujú na konštrukcie sekvenčných obalov, rozpracovať vhodný aparát a navrhnúť riešenie týchto problémov.

Je známe (pozri [10], [43]), že rôzne kategórie D-posetov umožňujú pracovať s dôležitými základnými pojmami teórie pravdepodobnosti (udalosti, pravdepodobnostná miera, náhodná premenná, pozorovateľná) ako s objektami a morfizmami vhodných kategórií D-posetov. Práve D-posety a ďalšie kvantové štruktúry sú stavebnými prvkami predkladanej dizertácie.

2 Základné pojmy a známe výsledky v problematike

Označme I uzavretý jednotkový interval $[0, 1]$. Nech X je množina. Každú podmnožinu $A \subseteq X$ množiny X možno stotožniť s jej indikátorovou funkciou χ_A, $\chi_A(x) = 1$ pre $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ inak, t.j so zobrazením z X do $\{0, 1\}$.

Fuzzy podmnožiny množiny X sú zobrazenia z X do I.

Nech X je množina. Neprázdny systém $\mathbf{A}$ podmnožín množiny X sa nazýva **poľom**, ak obsahuje X, $\emptyset$ a je uzavretý na konečné zjednotenia, konečné prieniky a doplnky.

Ak je neprázdny systém množín uzavretý aj na spočítateľné zjednotenia, tak sa nazýva σ-**poľom**. Systém $\mathbf{P}(X)$ všetkých podmnožín množiny X je σ-poľom, prienik všetkých σ-polí, ktoré obsahujú $\mathbf{A}$ je σ-pole, ktoré obsahuje $\mathbf{A}$; označujeme ho $\sigma(\mathbf{A})$ a nazývame ho **generovaným** σ-poľom.

V celej dizertácii budeme pracovať so základnou kategóriou **ID** a jej podkategóriami. Stručne povedané, kategóriu tvoria objekty a morfizmy, ktoré môžeme skladať tak, že platia určité axiómy. Príkladom sú topologické priestory a spojité zobrazenia, prípadne iné množiny so štruktúrou a "štruktúru zachovávajúce" zobrazenia. Pre zrozumiteľnosť ďalšieho textu postačí takýto intuitívny prístup, pričom niektoré pojmy budú ozrejmené na príkladoch.

ID-poset, alebo D-poset fuzzy množín je systém $\mathcal{X} \subseteq I^X$ fuzzy podmnožín množiny X zachovávajúci D-poset štruktúru:

- $\mathcal{X}$ čiastočne usporiadaný,
- $0_X, 1_X \in \mathcal{X}$,
- ak $u, v \in \mathcal{X}$ a $v \leq u$, tak $u - v \in \mathcal{X}$;

Označme **ID** kategóriu všetkých ID-posetov a sekvenčne spojitých zobrazení zachovávajúcich štruktúru ID-posetov.

Známe sú jej "klasické" plné podkategórie **FSD** a **CFSD**:

objektami **FSD** sú polia množín (s prirodzeným čiastočným usporiadaním a diferenciou),

objektami **CFSD** sú σ-polia množín,

pričom plná podkategória znamená, že ak dva objekty patria do podkategórie, tak každý morfizmus kategórie je aj morfizmom podkategórie.

Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je D-poset fuzzy množín. Označme $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ množinu všetkých sekvenčne spojitých D-homomorfizmov z $\mathcal{X}$ do I; prvok $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ nazveme **stav**.

Prvok $x \in X$ budeme chápať ako evaluačný stav na $\mathcal{X}$: $x(u) = u(x)$, $u \in \mathcal{X}$.

Ak $X = \mathcal{S}(\mathcal{X})$, tak $\mathcal{X}$ nazveme **sober**.

Nech Y je množina stavov taká, že $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Pre $u \in \mathcal{X}$ položme $ev_Y(u) = \{y(u); y \in Y\} \in I^Y$ a označme ev_Y korešpondujúce zobrazenie z $\mathcal{X}$ do I^Y. Položme $\mathcal{X}_Y = \{ev_Y(u); u \in \mathcal{X}\}$.

Ak $Y = \mathcal{S}(\mathcal{X})$, tak $\mathcal{X}_Y$ nazveme **sobrifikácia** $\mathcal{X}$.

Označme **SID** plnú podkategóriu kategórie **ID**, kde objekty sú sober D-posety fuzzy množín.

Pripomeňme, že bold algebra je systém $\mathcal{X} \subseteq I^X$ fuzzy podmnožín množiny X taký, že

$0_X, 1_X \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ uzavretý vzhľadom na Łukasiewiczovské operácie $\oplus$, $\odot$, "doplnok":

ak $u, v \in \mathcal{X}$, tak $(u \oplus v)(x) = min\{u(x) + v(x), 1\}$,
$(u \odot v)(x) = max\{u(x) + v(x) - 1, 0\}$,
$u^c(x) = 1 - u(x), x \in \mathcal{X}$

Označme **BID** kategóriu bold algebier ako objektov a sekvenčne spojitých D-homomorfizmov ako morfizmov a **CBID** plnú podkategóriu **BID**, kde objekty sú Łukasiewiczove klany, t.j. bold algebry sekvenčne uzavreté v I^X.

Nech $\mathbb{A}$ je σ-algebra podmnožín množiny X. Označme $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ všetky $\mathbb{A}$-merateľné fuzzy podmnožiny X. Platí nasledujúce dôležité tvrdenie.

Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je Łukasiewiczov klan. Potom existuje σ-pole $\mathbb{A} \subseteq \{0, 1\}^X$ také, že

$$\mathbb{A} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{A})$$

Ak $\mathcal{X}$ obsahuje všetky konštantné funkcie s hodnotami v I, tak $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbb{A})$ a $\mathcal{X}$ nazveme **generovaný** Łukasiewiczov klan.

Označme **CGBID** plnú podkategóriu **BID**, kde objekty sú bold algebry typu $\mathcal{M}(\mathbb{A})$;

Objektami kategórie **CGBID** sú generované (t.j. deliteľné) Łukasiewiczove klany, ktoré modelujú náhodné udalosti vo fuzzy pravdepodobnosti.

V celej práci budeme pracovať s normovanými mierami a s integrálom voči normovaným mieram, ale mnohé výsledky sa dajú využiť aj pre neohraničené miery.

V pravdepodobnosti začíname s jednoduchými náhodnými udalosťami (množinami, výrokovými funkciami), tieto vieme "pomerať" prirodzene určenou pravdepodobnostnou mierou a pýtame sa, pre aké oveľa zložitejšie náhodné udalosti vieme konzistentne "dopočítať" ich mieru. Príkladom je hod mincou, či kockou, pričom zložitejšie udalosti môžu súvisieť s výsledkami pri opakovaných hodoch a počítaním pravdepodobností konečných a nekonečných postupností výsledkov. Na abstraktnej úrovni ide o zväčšovanie definičného oboru funkcie s predpísanými vlastnosťami. Kde sa tu berie topológia?

Ohraničená miera na okruhu množín je sekvenčne spojitá ([39], to vlastne nie je prekvapenie, pozri Lebesgueovu vetu o dominantnej konvergencii a σ-pole množín má vlastnosť podobnú kompaktnosti! "Chybou krásy" bolo, že aditivita miery je definovaná pomocou algebraických operácií a nie pomocou topologických pojmov (nie je invariantom v príslušnej teórii), teda aplikácie sekvenčného obalu do teórie miery boli v "inom jazyku než samotná topologická konštrukcia".

2.1 Motivačné príklady

Popíšeme dva kanonické príklady z teórie miery a integrovania, ktoré nám poslúžia pri formulovaní vhodných postupov, pojmov a ich vlastností.

Definícia 1. Nech A a B sú množiny, nech X je podmnožina množiny A a Y je podmnožina množiny B. Nech g je zobrazenie X do Y a nech f je zobrazenie A do B také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in X$. Potom hovoríme, že f je **rozšírením** g.

Prvým príkladom je rozšírenie pravdepodobnostnej miery z poľa množín na generované σ-pole.

Príklad 2. Nech $\mathbf{A}$ je pole podmnožín množiny X a nech $\sigma(\mathbf{A})$ je generované σ-pole. Zrejme platí, že $\mathbf{A} \subseteq \sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{P}(X)$. Budeme sa zaoberať vzájomným vzťahom týchto troch systémov podmnožín. Každú podmnožinu $A \subseteq X$ môžeme stotožniť s jej indikátorovou funkciou $\chi_A : X \longrightarrow [0,1]$, $\chi(x) = 1$ pre $x \in A$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in A^c = X \setminus A$, pričom vlastnosti (pojmy) funkcií budeme považovať za vlastnosti (pojmy) podmnožín.

Pre nás dôležitými pojmami budú čiastočné usporiadanie a konvergencia postupností. Inklúzia v systéme $\mathbf{P}(X)$ zodpovedá bodovému čiastočnému usporiadaniu indikátorových funkcií a konvergencia v $\mathbf{P}(X)$, ktorú definujeme takto:
$A = \lim_{n\to\infty} A_n$, ak $A = \limsup A_n = \liminf A_n$,
pričom $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ a $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$, zodpovedá bodovej konvergencii indikátorových funkcií. Pripomeňme, že do $\limsup A_n$ patria tie body množiny X, ktoré patria do A_n pre nekonečne veľa indexov a do $\liminf A_n$ patria tie body množiny X, ktoré patria do každej A_n s výnimkou konečne veľa indexov.

Z hľadiska teórie kategórií je dôležité to, že aj čiastočné usporiadanie aj konvergencia v $\sigma(\mathbf{A})$ (a teda aj v $\mathbf{A}$) sú "iniciálnymi štruktúrami voči pravdepodobnostným mieram". Platí totiž, že $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ práve, ak $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$ pre všetky $m \in \mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$ a podobne, $B \subseteq A$ práve ak $m(B) \leq m(A)$ pre všetky $m \in \mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$, pričom $\mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$ označujeme množinu všetkých pravdepodobnostných mier na $\sigma(\mathbf{A})$. To znamená, že každá pravdepodobnostná miera je sekvenčne spojitá a naviac, ak $A \neq \lim_{n\to\infty} A_n$, tak existuje $m \in \mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$ taká, že neplatí $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$. Podobne, každá $m \in \mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$ je monotónna funkcia a ak neplatí $B \subseteq A$, tak existuje $m \in \mathcal{P}(\sigma(\mathbf{A}))$ taká, že neplatí $m(B) \leq m(A)$. To vyplýva z toho, že aj konvergencia aj čiastočné usporiadanie sú definované bodovo a každý bod $x \in X$ možno považovať za degenerovanú pravdepodobnostnú mieru $\delta_x = \chi_{\{x\}}$.

Ukážeme, že $\sigma(\mathbf{A})$ je najmenší systém podmnožín množiny X, ktorý obsahuje $\mathbf{A}$ a je uzavretý voči limitám konvergentných postupností.

Nech Y je množina a $\mathbf{P}(Y)$ systém jej všetkých podmnožín. Pripomeňme, že zobrazenie $cl : \mathbf{P}(Y) \longrightarrow \mathbf{P}(Y)$ sa nazýva **uzáverovým operátorom**, ak platí:

(u1) $cl(\emptyset) = \emptyset$ a $cl(Y) = Y$,

(u2) ak $B \subseteq A$, tak $cl(B) \subseteq cl(A)$,

(u3) vždy $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.

Ak naviac platí:

(u4) vždy $cl(cl(A))n = cl(A)$,

tak hovoríme, že cl je **topologickým** uzáverovým operátorom. Ďalej, ak $A = cl(A)$, tak A sa nazýva **uzavretá množina**, doplnky uzavretých množín sa nazývajú **otvorené množiny** a tvoria **topológiu** (spĺňajú axiómy otvorených množín).

(i) Nech $\mathbf{B}$ je systém podmnožín množiny X. Definujme $cl(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{P}(X)$ takto: $B \in cl(\mathbf{B})$ práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n \in \mathbf{B}$, taká, že $B = \lim_{n\to\infty} B_n$ v $\mathbf{P}(X)$. Pre každé ordinálne číslo α definujeme $cl^{\alpha}(\mathbf{B})$ induktívne takto: $cl^0(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$, $cl^{\alpha}(\mathbf{B}) = cl(cl^{\alpha-1}(\mathbf{B}))$ ak α je izolované ordinálne číslo a $cl^{\alpha}(\mathbf{B}) = cl(\bigcup_{\beta<\alpha} cl^{\beta}(\mathbf{B}))$ ak α je limitné ordinálne číslo. Je známe ([41]), že pre každé ordinálne číslo α je cl^{α} (ako zobrazenie $\mathbf{P}(\mathbf{P}(X))$ do $\mathbf{P}(\mathbf{P}(X))$) uzáverovým operátorom, $cl(cl^{\omega_1}(\mathbf{B})) = cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$, že cl^{ω_1} je topologickým (idempotentným) uzáverovým operátorom, a $cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$ je najmenší systém podmnožín množiny X taký, ktorý obsahuje $\mathbf{B}$ a je uzavretý na limity konvergentných postupností.

(ii) Ak $\mathbf{B}$ je pole množín, tak pre každé ordinálne číslo α, $cl^{\alpha}(\mathbf{B})$ je poľom množín (platí totiž $A \cup B = \lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n$, $A \cap B = \lim_{n\to\infty} A_n \cap B_n$, a $A^c = \lim_{n\to\infty} A_n^c$) a $cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$ je σ-poľom (naozaj, ak $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n \in \mathbf{B}$, je postupnosť, tak $\cup_{k=1}^{n} B_k \in cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$, $\cap_{k=1}^{n} B_k \in cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$, a teda aj $\lim_{n\to\infty} \cup_{k=1}^{n} B_k \in cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$, $\lim_{n\to\infty} \cap_{k=1}^{n} B_k \in cl^{\omega_1}(\mathbf{B})$).

(iii) Ak $\mathbf{C}$ je σ-poľom, tak $cl(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ (naozaj, ak $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $A_n \in \mathbf{C}$, tak $A = \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ implikuje $A \in \mathbf{C}$).

(iv) $cl^{\omega_1}(\mathbf{A})$ je σ-pole a ak $\mathbf{C}$ je σ-pole a $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{P}(X)$, tak $cl^{\omega_1}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{C}$.

Zhrnutie. Množinové pole je množina $\mathbf{A}$ so štruktúrou (množinové operácie, čiastočné usporiadanie, konvergencia postupností) a pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$ je špeciálne zobrazenie do $[0,1]$, pričom jej vlastnosti možno popísať pomocou tejto štruktúry a túto štruktúru možno čiastočne popísať pomocou pravdepodobnostných mier. Ku každej pravdepodobnostnej miere p na $\mathbf{A}$ existuje na generovanom σ-poli $\sigma(\mathbf{A})$ jediná pravdepodobnostná miera p_{σ}, ktorá je rozšírením miery p. Pritom $\sigma(\mathbf{A})$ je najmenším sekvenčne uzavretým množinovým poľom, ktoré obsahuje $\mathbf{A}$. Pretože zúženie pravdepodobnostnej miery na $\sigma(\mathbf{A})$ je pravdepodobnostnou mierou na $\mathbf{A}$, existuje vzájomne jednoznačný vzťah medzi pravdepodobnostnými mierami na $\mathbf{A}$ a pravdepodobnostnými mierami na $\sigma(\mathbf{A})$.

Druhým kanonickým príkladom je prechod od pravdepodobnostnej miery ku "pravdepodobnostnému" integrálu. Konštrukcia integrálu vzhľadom k ohraničenej miere a jeho základné vlastnosti sú čitateľovi iste známe (pozri [26], [36], [47]). Našim cieľom sú len poznámky, ktoré nám v ďalšom poslúžia ako motivácia a ilustrácia.

Príklad 3. Nech $(X, \mathbf{A}, p)$ je klasický pravdepodobnostný priestor, t.j. nech $\mathbf{A} = \sigma(\mathbf{A})$ je σ-pole podmnožín množiny X a nech p je pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$. Nech $\mathcal{B}(\mathbf{A})$ je systém všetkých ohraničených merateľných funkcií. Ak stotožníme množinu $A \in \mathbf{A}$ a jej indikátorovú funkciu $\chi_A \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$, tak každá $f \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$ je integrovateľná vzhľadom k miere p a integrál $\int f\, dp$ je konečný. Z abstraktného hľadiska je tento integrál rozšírením funkcie p z $\mathbf{A}$ na $\mathcal{B}(\mathbf{A})$.

Nech ďalej $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je systém všetkých merateľných funkcií s hodnotami v intervale $[0,1]$. L. A. Zadeh ([52]) navrhol, aby funkcie $f \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ modelovali **fuzzy náhodné udalosti** a aby "pravdepodobnostný" integrál $\tilde{p}(f) = \int f\, dp$ modeloval ich **fuzzy**

pravdepodobnosť (pozri [25],[38],[47]). Samozrejme, $\tilde{p}$ je rozšírením funkcie p z $\mathbf{A}$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Mostom medzi mierou p a integrálom vzhľadom k nej sú elementárne funkcie. Pripomeňme, že ak $\{A_i\}_{i=1}^n$ je konečná postupnosť množín v $\mathbf{A}$, a $\{a_i\}_{i=1}^n$ je konečná postupnosť reálnych čísiel, tak funkciu $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ nazývame (merateľnou) **elementárnou funkciou**.

(i) Pretože $\int \chi_A \, dp$ interpretujeme ako abstraktný "objem" útvaru, ktorého podstavou je A a výškou je 1, nutne $\int \chi_A \, dp = p(A)$ a pre $0 \leq a$ platí $\int a\chi_A \, dp = a \int \chi_A \, dp$. Ďalej, integrál nezápornej elementárnej funkcie je konečným súčtom takýchto sčítancov a je jednoznačne určený. Označme $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ množinu všetkých elementárnych funkcií. Pretože $\mathcal{E}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{A})$ a integrál interpretujeme ako lineárny funkcionál, je rozšírenie integrálu na $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ tiež jednoznačne určené. Všetky ohraničené merateľné funkcie sú integrovateľné a ich integrál vzhľadom k pravdepodobnostnej miere je konečný.

(ii) Pripomeňme si, že každá nezáporná ohraničená merateľná funkcia je (bodovou) limitou neklesajúcej postupnosti jednoduchých funkcií a že množina všetkých merateľných funkcií je sekvenčne uzavretá vzhľadom na bodovú konvergenciu. Platí tiež veľmi zaujímavá a dôležitá Lebesgueova veta o dominantnej konvergencii: ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ merateľných funkcií bodovo konverguje ku funkcii f, pričom $| f_n | \leq g$ pre nejakú integrovateľnú funkciu g, tak f je integrovateľná a $\int f \, dp = lim_{n\to\infty} \int f_n \, dp$.

Zhrnutie. Integrál na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ vzhľadom k pravdepodobnostnej miere p je sekvenčne spojitým rozšírením p ako funkcie, ktorá každej množine $A \in \mathbf{A}$ priradí abstraktný "objem" útvaru, ktorého podstavou je A a výškou je 1.

2.2 Sekvenčná spojitosť

V práci [39] je dokázané, že σ-aditívna miera na okruhu množín je sekvenčne spojitá práve vtedy, ak je ohraničená (dôkaz je pomerne technicky náročný). Z topologického hľadiska, ale tiež z hľadiska kategoriálneho prístupu k teórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti (pozri paragraf o prechode od miery ku integrálu) je sekvenčná spojitosť pravdepodobnostnej miery dôležitejšia, než tradične zdôrazňovaná monotónna sekvenčná spojitosť. Ako sme už spomenuli, sekvenčná spojitosť pravdepodobnostnej miery vyplýva z Lebesgueovej vety o dominantnej konvergencii. Vyplýva tiež z vety 8 (pozri 2.3 Retrospektíva). Naozaj, najprv predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín množiny X a nech $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, t.j. $A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_n$. Pretože $B_k = \bigcup_{n=k}^\infty A_n$, $k = 1, 2, ...$, je nerastúca postupnosť a $C_k = \bigcap_{n=k}^\infty A_n$, $k = 1, 2, ...$, je neklesajúca postupnosť a obe konvergujú monotónne ku A, prvá zhora a druhá zdola, pritom $C_k \subseteq A_k \subseteq B_k$, takže monotónna spojitosť pravdepodobnostnej miery na σ-poli $\mathbf{A}$ implikuje jej sekvenčnú spojitosť (opačne to vyplýva triviálne).

Predpokladajme teraz, nech $\mathbf{A}$ je len pole podmnožín množiny X a nech p je pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$. Podľa vety 8 existuje jednoznačné rozšírenie funkcie

p na pravdepodobnostnú mieru p_σ na $\sigma(\mathbf{A})$. Podľa predošlého kroku je miera p_σ sekvenčne spojitá, takže aj jej zúženie p je sekvenčne spojitá pravdepodobnostná miera na $\mathbf{A}$.

Ukážme si, ako kategoriálny prístup umožňuje popísať prechod od pravdepodobnostnej miery ku pravdepodobnostnému integrálu v širších súvislostiach. Fundamentálnym spôsobom sa pri tom využívajú D-posety, zavedené F. Kôpkom a F. Chovancom [33], [29], hlavne D-posety fuzzy množín [43], [12], [23].

Pripomeňme si (pozri [33]), že D-poset je pätica $(X, \leq, \ominus, 0_X, 1_X)$ kde X je množina, $\leq$ je čiastočné usporiadanie, 0_X je najmenší prvok, 1_X je najväčší prvok a "$\ominus$" je parciálna operácia na X, ktorá sa nazýva **diferencia**, pričom $a \ominus b$ je definované práve ak $b \leq a$, a platí:

(D1) $a \ominus 0_X = a$ pre každé $a \in X$;

(D2) Ak $c \leq b \leq a$, tak $a \ominus b \leq a \ominus c$ a $(a \ominus c) \ominus (a \ominus b) = b \ominus c$.

Päticu $(X, \leq, \ominus, 0_X, 1_X)$ skracujeme na X. Zobrazenie h D-posetu X do D-posetu Y, ktoré zachováva D-štruktúru sa nazýva D-**homomorfizmus**. Pritom D-posety sú ekvivalentné efektovým algebrám (pozri [4]).

Príkladom je systém všetkých fuzzy množín nejakého univerza (t.j. všetkých zobrazení nejakej množiny U do intervalu $[0, 1]$), pričom usporiadanie je bodové, funkcie 0_U a 1_U, sú minimálnym a maximálnym prvkom a "$\ominus$" je rozdiel $u - v$ pre $v \leq u$. Špeciálne, ak $\{a\}$ je jednobodová množina, tak interval $I = [0, 1]$ môžeme považovať za D-poset všetkých fuzzy množín univerza $\{a\}$.

Nech $(X, \mathbf{A}, p)$ je klasický pravdepodobnostný priestor. Potom σ-pole $\mathbf{A}$ (ako indikátorové funkcie) a systém $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ sú D-posety fuzzy množín, pričom pravdepodobnostná miera p a pravdepodobnostný integrál $\tilde{p}$ sú sekvenčne spojitými D-homomorfizmami. Čo je dôležitejšie a prekvapivejšie, platí nasledujúce tvrdenie (pozri [12]).

Veta 4. *Nech* $\mathbf{A}$ *je* σ*-pole množín.*

(i) Nech m *je sekvenčne spojitý* D*-homomorfizmus poľa* $\mathbf{A}$ *do intervalu* I*. Potom* m *je pravdepodobnostná miera.*

(ii) Nech h *je sekvenčne spojitý* D*-homomorfizmus* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *do intervalu* I*. Potom funkcia* h *je pravdepodobnostným integrálom, t. j. existuje pravdepodobnostná miera* p *na poli* $\mathbf{A}$ *taká, že* $h = \tilde{p}$*.*

V teórii kategórií ([1]) pracujeme s objektami, morfizmami a diagramami. Napríklad, v topológii sú objektami topologické priestory, morfizmami sú spojité zobrazenia a diagramami sú schémy, ktoré "popisujú topologické konštrukcie pomocou skladaní spojitých zobrazení a rovností o týchto skladaniach". Napríklad, Čechovu-Stoneovu kompaktifikáciu môžeme znázorniť pomocou diagramu

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "id_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "f_\beta"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

pričom X je úplne regulárny topologický priestor, βX je jeho Čechova-Stoneova kompaktifikácia, id_X je vnorenie priestoru X do priestoru βX a diagram hovorí, že pre každú spojitú funkciu $f : X \longrightarrow [0,1]$ existuje práve jedna spojitá funkcia $f_\beta : \beta X \longrightarrow [0,1]$ taká, že pre každé $x \in X \subseteq \beta X$ platí $f_\beta(id_X(x)) = f(x)$ (hovoríme, že diagram komutuje).

Podobne, vo fuzzy pravdepodobnosti sú "dobré" D-posety fuzzy množín objektami a sekvenčne spojité D-homomorfizmy sú morfizmami. Potom prechod od pravdepodobnostnej miery p ku pravdepodobnostnému integrálu $\tilde{p}$ môžeme znázorniť pomocou diagramu

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook, "id_{\mathbf{A}}"] \arrow[dr, "p"'] & \mathcal{M}(\mathbf{A}) \arrow[d, dashed, "\tilde{p}"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

a diagram hovorí, že pre každý sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $p : \mathbf{A} \longrightarrow [0,1]$ existuje práve jeden sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\tilde{p} : \mathcal{M}(\mathbf{A}) \longrightarrow [0,1]$ taký, že pre každú množinu $A \in \mathbf{A}$ platí $\tilde{p}(id_{\mathbf{A}}(A)) = p(A)$ (hovoríme, že diagram komutuje).

Prechod od poľa $\mathbf{A}$ ku systému $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (ako to navrhol L. A. Zadeh) možno prirovnať ku prechodu od celých čísiel ku reálnym číslam: pridáme deliteľnosť a úplnosť. Platia nasledujúce tvrdenia (pozri [23]).

Veta 5. *Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je D-poset fuzzy podmnožín. Predpokladajme, že*

(i) Ak $u, v \in \mathcal{X}$, tak $u \vee v \in \mathcal{X}$, kde $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x), x \in X$;

(ii) $\mathcal{X}$ je sekvenčne uzavretá podmnožina mocniny I^X voči bodovej konvergencii. Potom existuje σ-pole $\mathbf{A} \subseteq I^X$ také, že $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Veta 6. *Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je D-poset fuzzy podmnožín. Predpokladajme, že*

(i) Ak $u, v \in \mathcal{X}$, tak $u \vee v \in \mathcal{X}$, kde $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x), x \in X$;

(ii) D-poset $\mathcal{X}$ je deliteľný: pre každé $u \in \mathcal{X}$ a pre každé prirodzené číslo n existuje $v \in \mathcal{X}$ také, že $nv = u$, kde $(nv)(x) = nv(x), x \in X$;

(iii) $\mathcal{X}$ je sekvenčne uzavretá podmnožina mocniny I^X voči bodovej konvergencii. Potom existuje σ-pole $\mathbf{A} \subseteq I^X$ také, že $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Výrazným posunom od dvojhodnotovej logiky a Booleových algebier bolo zavedenie viachodnotovej logiky a MV-algebier a MV-algebry sú aj zaujímavou doménou zovšeobecnenej pravdepodobnosti (pozri [46]). MV-algebry sú zovšeobecnením Booleových algebier a ich významná podtrieda sa dá reprezentovať pomocou D-posetov fuzzy podmnožín, ktoré spĺňajú predpoklady vety 5. Ako vyplýva z vety 5 a vety 6, D-posety fuzzy podmnožín typu $\mathbf{A}$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ sú "minimálne", resp. "maximálne" objekty v tejto podtriede.

Vráťme sa teraz ku Čechovej-Stoneovej kompaktifikácii. Nech X je úplne regulárny (Hausdorffov) topologický priestor a nech $C_I(X)$ je množina všetkých spojitých funkcií z X do $I = [0, 1]$. Topológia v X je iniciálnou topológiou voči $C_I(X)$ (je popísaná funkciami v $C_I(X)$: bod x je v uzávere množiny A práve vtedy, ak pre každú funkciu $f \in C_I(X)$ je $f(x)$ v uzávere množiny $f(A)$). Nech Y je topologický priestor taký, že

(β_1) priestor Y je úplne regulárny (Hausdorffov);

(β_2) priestor X je hustý podpriestor priestoru Y;

(β_3) priestor X je C_I-vnorený do priestoru Y, t.j., každá funkcia z $C_I(X)$ sa dá spojite rozšíriť na priestor Y.

Je známe, že Čechova-Stoneova kompaktifikácia βX je maximálny zo všetkých topologických priestorov Y, ktoré spĺňajú podmienky (β_1), (β_2) a (β_3): každý priestor Y, ktorý spĺňa tieto podmienky, je "topologicky medzi" priestormi X a βX, čo znamená, že existuje podpriestor Z, $X \subseteq Z \subseteq \beta X$ a homeomorfizmus h priestoru Y na priestor Z, pričom $h(x) = x$ pre všetky $x \in X$.

V prípade prechodu od pravdepodobnostnej miery p ku integrálu voči miere p na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ tiež maximálnym objektom, ale z úplne iných príčin. Ide o maximalitu v zmysle vety 6 a tá nič nehovorí o spojitom rozširovaní príslušných morfizmov. Hlbšia analýza maximality tohto typu presahuje ciele a rozsah tejto práce.

Z hľadiska prechodu od klasickej pravdepodobnosti ku fuzzy pravdepodobnosti je dôležité nasledujúce tvrdenie (pozri [23]), ktoré zovšeobecňuje diagram prechodu od pravdepodobnostnej miery p ku integrálu $\tilde{p}$ voči p na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Veta 7. *Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín množiny X, nech $\mathbf{B}$ je σ-pole podmnožín množiny Y, nech $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{M}(\mathbf{B})$ sú príslušné merateľné funkcie s hodnotami v intervale $I = [0, 1]$. Nech h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{B})$. Potom existuje jediný sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\overline{h}$ z $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ do $\mathcal{M}(\mathbf{B})$, ktorý je rozšírením h.*

Ak $\mathbf{T}$ je triviálne dvojprvkové σ-pole podmnožín jednoprvkového univerza $\{a\}$, tak $[0, 1] = \mathcal{M}(\mathbf{T})$, každý sekvenčne spojitý D-homomorfizmus p z $\mathbf{A}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ je pravdepodobnostnou mierou a jeho jednoznačne určeným rozšírením z $\mathbf{A}$ na $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ je pravdepodobnostný integrál $\tilde{p}$ voči p.

Z hľadiska teórie kategórií veta 7 znamená, že D-posety fuzzy množín typu $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ tvoria epireflektívnu podkategóriu špeciálnej kategórie D-posetov fuzzy množín, ktoré sú charakterizované vetou 5. Sú to dôležité domény zovšeobecnenej pravdepodobnosti (MV-algebry, ktoré sa dajú reprezentovať pomocou sekvenčne uzavretých D-posetov fuzzy množín) a pomocou tejto kategórie sa dá vysvetliť podstata prechodu od klasickej pravdepodobnosti ku fuzzy pravdepodobnosti (pozri [23]).

Zhrnutie. Prechod od pravdepodobnostnej miery p na množinovom σ-poli náhodných udalostí $\mathbf{A}$ ku fuzzy pravdepodobnostnej miere $\tilde{p}$ na fuzzy náhodných udalostiach $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ možno kanonicky popísať pomocou D-posetov fuzzy množín a sekvenčne spojitých D-homomorfizmov. V tomto kontexte možno aj kanonicky (pomocou teórie kategórií) porovnať teórie klasickej pravdepodobnosti a fuzzy pravdepodobnosti.

2.3 Retrospektíva

V predošlých odstavcoch sme analyzovali proces rozširovania pravdepodobnostných mier z poľa $\mathbf{A}$ podmnožín množiny X na väčšie pole $\mathbf{B}$ podmnožín množiny X. Ako zhrnutie našich úvah môžeme sformulovať tri tvrdenia o rozširovaní.

Pripomeňme (pozri príklad 2), že pravdepodobnostné miery určujú štruktúru poľa množín (iniciálna štruktúra voči pravdepodobnostným mieram). Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú polia podmnožín množiny X a nech $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Nech cl^{α} je uzáverovým operátorom v $\mathbf{P}(X)$ z príkladu 2. Ak existuje ordinálne číslo α také, že $cl^{\alpha}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$, tak hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **sekvenčne husté** v $\mathbf{B}$. Ak ku každej pravdepodobnostnej miere p na $\mathbf{A}$ existuje pravdepodobnostná miera $\overline{p}$ na $\mathbf{B}$ taká, že $\overline{p}$ je rozšírením p, tak hovoríme, že $\mathbf{A}$ je $\mathcal{P}$-**vnorené** do $\mathbf{B}$. Poznamenajme, že ak pole $\mathbf{A}$ je sekvenčne husté v $\mathbf{B}$, tak všetky $\overline{p}$ sú jednoznačne určené.

Veta 8. *Nech* $\mathbf{A}$ *je pole podmnožín množiny* X*, nech* $\sigma(\mathbf{A})$ *je generované* σ*-pole a nech* p *je pravdepodobnostná miera na poli* $\mathbf{A}$*. Potom existuje jediná pravdepodobnostná miera* p_{σ} *na* $\sigma(\mathbf{A})$ *taká, že* p_{σ} *je rozšírením* p*.*

Poznamenajme, že vetu 8 môžeme preformulovať tak, že pole $\mathbf{A}$ je $\mathcal{P}$-vnorené do poľa $\sigma(\mathbf{A})$, pričom pole $\mathbf{A}$ je sekvenčne husté a všetky rozšírené miery sú jednoznačne určené. Nasledujúca veta je podstatným zosilnením vety 8. Tvrdenie vyplýva z úvah v príklade 2 a z vety 8.

Veta 9. *Nech* $\mathbf{A}$ *je pole podmnožín množiny* X*, nech* $\sigma(\mathbf{A})$ *je generované* σ*-pole. Potom* $\sigma(\mathbf{A})$ *je najväčšie zo všetkých polí* $\mathbf{B}$ *podmnožín množiny* X*, v ktorom je pole* $\mathbf{A}$ *sekvenčne husté a* $\mathcal{P}$*-vnorené.*

Veta 9 charakterizuje generované σ-pole podobným spôsobom, ako podmienky (β_1), (β_2) a (β_3) charakterizujú Čechovu-Stoneovu kompaktifikáciu.

Definujme kategóriu $\mathcal{A}$ takto: objektami sú MV-algebry, ktoré sa dajú reprezentovať pomocou sekvenčne uzavretých D-posetov fuzzy podmnožín nejakého univerza (pozri veta 5) a morfizmami sú sekvenčne spojité D-homomorfizmy. Definujme jej (úplnú) podkategóriu $\mathcal{B}$ takto: objektami sú všetky D-posety fuzzy podmnožín typu $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ (pozri veta 6) a morfizmami sú sekvenčne spojité D-homomorfizmy. Platí nasledujúce tvrdenie (pozri [23]).

Veta 10. *$\mathcal{B}$ je epireflektívnou podkategóriou kategórie $\mathcal{A}$.*

Dôsledkom vety 10 je, že každá pravdepodobnostná miera p na množinovom poli $\mathbf{A}$ sa dá jednoznačne rozšíriť na pravdepodobnostnú mieru p_σ na generované σ-pole $\sigma(\mathbf{A})$ a potom jednoznačne rozšíriť na pravdepodobnostný integrál $\widetilde{p_\sigma}$ na $\mathcal{M}(\sigma(\mathbf{A}))$.

2.4 IF-pravdepodobnosť

Nech X je množina. Pripomeňme, že IF-podmnožina množiny X je dvojica $A = (\mu_A, \nu_A)$, kde μ_A, ν_A sú fuzzy podmnožiny množiny X (nazýva sa aj funkcia náležania, respektíve nenáležania) a $\mu_A + \nu_A \leq 1_X$, kde 1_X označuje konštantnú funkciu s hodnotou 1. Zrejme, pre $\nu_A = 1_X - \mu_A$ možno (μ_A, ν_A) považovať za fuzzy podmnožinu množiny X ($\nu_A = 1_X - \mu_A$ je nadbytočná informácia). Zovšeobecnené náhodné udalosti v IF-pravdepodobnosti sú centrované systémy IF-podmnožín.

Nech $\mathbf{A}$ je σ-pole podmnožín množiny X. Nech $\mathcal{F}$ je množina všetkých merateľných IF-podmnožín množiny X, teda dvojíc (μ_A, ν_A), kde $\mu_A, \nu_A \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, $\mu_A + \nu_A \leq 1_X$; budeme ich nazývať IF-udalosti. Nech $A = (\mu_A, \nu_A)$ a $B = (\mu_B, \nu_B)$ sú IF-udalosti. B. Riečan (pozri [49]) definoval dve operácie a čiastočné usporiadanie na IF-udalostiach nasledovne:

$A \oplus B = ((\mu_A + \mu_B) \wedge 1_X, (\nu_A + \nu_B - 1_X) \vee 0_X)$;

$A \odot B = ((\mu_A + \mu_B - 1_X) \vee 0_X, (\nu_A + \nu_B) \wedge 1_X)$;

$A \preceq B$ iff $(\mu_A \leq \mu_B) \wedge (\nu_B \leq \nu_A)$.

Všimnime si, že IF-udalosti sú uzavreté vzhľadom na $\oplus$ a $\odot$, ale nie sú uzavreté vzhľadom na operáciu $\neg$ definovanú $\neg(\mu_A, \nu_A) = (1_X - \mu_A, 1_X - \nu_A)$. V [49], Riečan definoval stavy a pozorovateľné pre IF-udalosti a dokázal limitné vety pre IF-pravdepodobnosť (bez doplnku).

Označme

$$A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big) = \{(u, v) \in \mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A});\, u \leq v\}.$$

Potom $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ je uzavreté vzhľadom na binárne Łukasiewiczovské operácie, ale nie je uzavreté vzhľadom na doplnok $\neg$. Definujme zobrazenie h z množiny $\mathcal{F}$ všetkých merateľných IF-podmnožín množiny X do $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ ako $h((\mu_A, \nu_A)) = (\mu_A, 1_X - \nu_A)$. Potom (pozri [49], [50]) h je bijekcia zachovávajúca poradie a operácie $\oplus, \odot$ v $\mathcal{F}$ a obvyklé poradie a binárne Łukasiewiczovské operácie v $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$.

Takže IF-udalosti možno chápať ako príslušnú časť $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ definičného oboru fuzzy pravdepodobnosti $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$. V skutočnosti $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ tvorí "doplnkovo hustú" časť v $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Lemma 4.1 v [51] uvádza, že ak B je bold algebra taká, že $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big) \subseteq B \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$, tak $B = \mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Ako dokázal Riečan v [49], systém IF-udalostí $\mathcal{F}$ sa dá rozšíriť na MV-algebru $\mathcal{M}$ tak, že každý stav na $\mathcal{F}$ je zúženie jednoznačne určeného stavu na $\mathcal{M}$. Naviac, Riečan dokázal reprezentačnú vetu pre stavy na $\mathcal{M}$ (a teda aj $\mathcal{F}$). Vnorenie $A\big(\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})\big)$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je ekvivalentné vnoreniu $\mathcal{F}$ do $\mathcal{M}$, ale reprezentačná veta o stavoch na $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$ je menej technická a viac intuitívna (pozri [50]).

3 Výsledky dizertačnej práce

Dizertácia je zložená z troch hlavných častí. Prvá bola predložená ako písomná práca ku dizertačnej skúške. Sú v nej syntetickým spôsobom spracované niektoré menej známe súvislosti medzi teóriou miery, integrálom a topológiou (pozri predchádzajúcu časť autoreferátu). Druhá časť zodpovedá článku [H1] ([27]) **Real functions and the extension of generalized probability measure**. Tretia časť zodpovedá článku [H2] ([28]) **Real functions and the extension of generalized probability measure II**.

3.1 Rozšírenia

Pre potrebu klasifikácie rozšírení sme definovali nové pojmy.

Definícia 11. Nech $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq I^X$ sú D-posety fuzzy množín, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Nech $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ je podmnožina $\mathcal{S}(\mathcal{X})$. Ak pre každé $s \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ existuje $t \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})$ také, že $s(u) = t(u)$ pre každé $u \in \mathcal{X}$, tak $\mathcal{X}$ nazveme $\mathcal{H}(\mathcal{X})$-**vnorením** do $\mathcal{Y}$.

Motivovaní kanonickými rozšíreniami, delíme vlastnosti rozšírení D-posetov fuzzy množín na dve skupiny - interné a externé.

Nech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sú D-posety fuzzy množín také, že $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq I^X$.

Interné. Nasledujúce vlastnosti $\mathcal{Y}$ sú definované pomocou štruktúry I^X:

(i) $\mathcal{Y}$ je uzavretý vzhľadom na $\wedge$ a $\vee$;

(ii) $\mathcal{Y}$ je deliteľný;

(iii) $\mathcal{X}$ je sekvenčne hustý v $\mathcal{Y}$;

(iv) $\mathcal{Y}$ je sekvenčne uzavretý v I^X.

Externé. Nasledujúce vlastnosti $\mathcal{Y}$ sú definované pomocou rozšírení morfizmov nejakej vhodnej triedy:

(i) $\mathcal{X}$ je $\mathcal{H}(\mathcal{X})$-vnorený do $\mathcal{Y}$;

(ii) rozšírenie daných morfizmov je jednoznačné;

(iii) $\mathcal{Y}$ je najväčšie (najmenšie) zo všetkých rozšírení $\mathcal{X}$ na ktoré sa tieto morfizmy dajú rozšíriť;

(iv) $\mathbf{ID_1}$ a $\mathbf{ID_2}$ sú podkategórie $\mathbf{ID}$, $\mathbf{ID_2}$ je epireflektívna v $\mathbf{ID_1}$, $\mathcal{X}$ je objektom $\mathbf{ID_1}$, $\mathcal{Y}$ je objektom $\mathbf{ID_2}$ a $\mathcal{Y}$ je epireflexiou $\mathcal{X}$.

Definícia 12. Nech $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq I^X$ sú D-posety fuzzy množín, teda objektami kategórie **ID**. Ak $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, tak $\mathcal{Y}$ nazveme ID-**rozšírením** $\mathcal{X}$

ID-rozšírenia a interné i externé vlastnosti poskytujú prirodzený jazyk pre konštrukcie a klasifikácie oborov zovšeobecnenej pravdepodobnosti, pričom každé kanonické rozšírenie sa dá charakterizovať ako ID-rozšírenie s vhodnými vlastnosťami. Takýto prístup k teórii pravdepodobnosti vedie k lepšiemu porozumeniu klasickej teórie pravdepodobnosti, fuzzy teórie pravdepodobnosti a vzťahov medzi nimi (pozri [23]).

V praci [27] bol formulovaný nasledujúci problém.

PROBLÉM. Je **CGBID** epireflektívna podkategória kategórie **BID**?

Tento problém bol kladne vyriešený v práci [15].

Veta 13. *Podkategória* **SID** *kategórie* **ID** *je epireflektívna v kategórii* **ID**.

Definícia 14. Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je D-poset fuzzy množín a nech $\mathcal{Y} \subseteq I^X$ je ID-rozšírenie $\mathcal{X}$. Ak zúženie zobrazenia $r : \mathcal{S}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ je jedno-jednoznačné, potom $\mathcal{Y}$ nazveme **stavové** rozšírenie $\mathcal{X}$. Stavové rozšírenie $\mathcal{Y}$ D-posetu $\mathcal{X}$ nazveme **maximálne**, ak neexistuje vlastné stavové rozšírenie $\mathcal{Z} \subseteq I^X$ ID-rozšírenia $\mathcal{Y}$. Nech $\mathcal{C}$ je trieda stavových rozšírení$\mathcal{X}$ a nech $\mathcal{Y} \in \mathcal{C}$. Ak neexistuje vlastné rozšírenie $\mathcal{X}$ v $\mathcal{C}$, tak hovoríme, že $\mathcal{Y}$ je **maximálnym** v $\mathcal{C}$. Ak $\mathcal{Y}$ je stavové rozšírenie $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ je ID-rozšírenie každého stavového rozšírenia $\mathcal{Z}$ D-posetu $\mathcal{X}$, tak $\mathcal{Y}$ nazveme **absolútnym stavovým rozšírením** $\mathcal{X}$. Ak $\mathcal{Y} \in \mathcal{C}$ a $\mathcal{Y}$ je ID-rozšírenie každého stavového rozšírenia $\mathcal{Z}$ D-posetu $\mathcal{X}$ v $\mathcal{C}$, tak $\mathcal{Y}$ nazveme **absolútne stavové rozšírenie** $\mathcal{X}$ **v** $\mathcal{C}$.

V dizertácii sú pomocou tejto klasifikácie charakterizované niektoré známe rozšírenia a su formulované štyri problémy.

Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je D-poset fuzzy množín. Zrejme, prienik všetkých bold algebier $\mathcal{Y} \subseteq I^X$ takých, že $\mathcal{Y}$ je ID-rozšírenie $\mathcal{X}$ je najmenšie ID-rozšírenie $\mathcal{X}$, ktoré je aj bold algebrou; označme ho $b(\mathcal{X})$. V dizertácii je popísaná induktívna konštrukcia $b(\mathcal{X})$.

Lema 15. *Nech* $\mathcal{X} \subseteq I^X$ *je sober je D-poset fuzzy množín. Potom* $\mathcal{X}$ *je* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$-*vnorený do* $b(\mathcal{X})$.

3.2 Súčiny

Náhodné udalosti v IF-pravdepodobnosti ([49]) sú dvojice (u, v) fuzzy náhodných udalostí, t.j. prvky definičného oboru pravdepodobnosti tvaru $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$ také, že $u \leq v$, a niektoré konštrukcie v IF-pravdepodobnosti môžeme previesť (pozri [49], [50]) ako príslušné konštrukcie v teórii fuzzy pravdepodobnosti (pomocou $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A})$).

Nech T je (neprázdna) množina a nech $\{\mathcal{X}_t;\ t \in T\}$ je indexovaný systém D-posetov fuzzy množín. Ich súčin $\prod_{t\in T} \mathcal{X}_t$, spolu s indexovaným systémom $\{pr_t;\ t \in T\}$ prirodzených projekcií $pr_s : \prod_{t\in T} \mathcal{X}_t \longrightarrow \mathcal{X}_s$, $s \in T$, pozostáva s indexovaného systému $\{u_t;\ u_t \in \mathcal{X}_t, t \in T\}$, pričom súčinová ID-štruktúra je definovaná po súradniciach. Ak $\mathcal{X}_t, t \in T$ sú bold algebry, tak Łukasiewiczovské operácie $\oplus, \odot, (\cdot)^c$ na ich súčine sú definované po súradniciach a $\prod_{t\in T} \mathcal{X}_t$ je súčinová bold algebra.

Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Označme $\mathbf{BID}_n$ kategóriu súčinov bold algebier typu $\prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i$ ako objektov a n-tíc sekvenčne spojitých D-homomorfizmov ako morfizmov, t.j. ak $h_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, sú sekvenčne spojité D-homomorfizmy, tak $(h_1, h_2, ..., h_n)$ je príslušný morfizmus z $\prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i$ do $\prod_{i=1}^n \mathcal{Y}_i$ v $\mathbf{BID}_n$.

Označme $\mathbf{CGBID}_n$ plnú podkategóriu kategórie $\mathbf{BID}_n$, ktorej objekty sú súčiny generovaných Łukasiewiczových klanov tvaru $\prod_{i=1}^n \mathcal{M}(\mathbf{A}_i)$.

Definícia 16. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, nech $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, sú D-posety fuzzy množín a nech $\mathcal{X}$ je ich súčin. Nech h_i, $i = 1, 2, ..., n$, je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z $\mathcal{X}_i$ do generovaného Łukasiewiczovho klanu $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subseteq I^Y$, a nech $w_i \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$, $i = 1, 2, ..., n$, sú funkcie také, že $\sum_{i=1}^n w_i(y) = 1$ pre všetky $y \in Y$. Potom $h = \sum_{i=1}^n w_i h_i$ nazývame **konvexnou kombináciou** h_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Lema 17. *Zobrazenie h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\mathcal{X}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.*

Nech $\{a\}$ je jednoprvková množina a nech $\mathbf{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$ je triviálne σ-pole podmnožín množiny $\{a\}$. Ako obvykle, stotožnime I a $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. Všimnime si, že konvexná kombinácia sekvenčne spojitých D-homomorfizmov do $I = \mathcal{M}(\mathbf{T})$ je stav.

Definícia 18. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, nech $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, sú D-posety fuzzy množín a nech $\mathcal{X}$ je ich súčin. Nech h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z $\mathcal{X}$ do generovaného Łukasiewiczovho klanu $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subseteq Y$. Pre $i \in \{1, 2, ..., n\}$, ak $h(0_1, ..., 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, ..., 0_n) = w$, a $w(y) > 0$ pre všetky $y \in Y$, potom hovoríme, že h je **silne závislé** od i-tej **súradnice**.

Veta 19. *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, nech $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, sú D-posety fuzzy množín a nech $\mathcal{X}$ je ich súčin. Nech h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\mathcal{X}$ do generovaného Łukasiewiczovho klanu $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subseteq Y$, ktorý je silne závislý od všetkých súradníc. Potom existuje jediný sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $h_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{A})$, a jednoznačné funkcie $w_i \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ také, že $\sum_{i=1}^n w_i(y) = 1$ pre všetky $y \in Y$, $i = 1, 2, ..., n$, a $h = \sum_{i=1}^n w_i h_i$.*

Predchádzajúca veta podstatne zovšeobecňuje Theorem 3.5 z práce [51].

V [15] je dokázané, že **CGBID** je epireflektívna podkategória kategórie **BID**. To dáva kladnú odpoveď na otázku formulovanú v [H1] ([27]). Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je bold algebra a nech $\sigma(\mathcal{X})$ je najmenší Łukasiewiczov klan obsahujúci $\mathcal{X}$. Potom $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})})$ je jej epireflexia. V súvislosti so súčinmi definičných oborov pravdepodobnosti je prirodzené sa pýtať, či je aj epireflexia súčinová. Vo všeobecnej topológii, otázka, či epireflektor, napríklad ako Čechova-Stoneova kompaktifikácia , Hewittova realkompaktifikácia atď, je súčinový je pomerne ťažká. Pre sekvenčné obaly je v práci [5] dokázané, že príslušný epireflektor je súčinový. Dokážeme, že aj reflektor z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})})$ je súčinový.

Veta 20. *Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$, $\mathcal{Y} \subseteq I^Y$ sú bold algebry a nech $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ je ich súčin. Potom $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{Y})})$ je epireflektor z $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ do podkategórie* **CGBID** *kategórie* **BID**.

Dôsledok 21. *Epireflektor posielajúci objekty* **BID** *do* **CGBID** *je súčinový.*

Dôsledok 22. *Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$, $\mathcal{Y} \subseteq I^Y$ sú bold algebry a nech $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ je ich súčin. Nech h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ do I. Potom sa h dá jednoznačne rozšíriť na sekvenčne spojitý D-homomorfizmus $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{Y})})$ do I.*

3.3 IF-pravdepodobnosť

Nech $\mathcal{X} \subseteq [0,1]^X$ je bold algebra, nech $\sigma(\mathcal{X})$ je najmenší Łukasiewiczov klan obsahujúci $\mathcal{X}$ a nech $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})})$ je príslušný generovaný Łukasiewiczov klan.

Položme $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) = \{(u,v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X};\ u \leq v\}$. Zrejme, $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ je uzavreté vzhľadom na Łukasiewiczovské operácie $\oplus, \odot$.

Teraz sa pozrime na prechod od $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ ku $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, resp. od $A(\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})}))$ ku $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})}) \times \mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})})$. Uvedomme si, že ak pole množín $\mathbf{A}$ považujeme za bold algebru $\mathcal{X}$, tak $\mathcal{M}(\sigma(\mathbf{A}))$ je totožné s $\mathcal{M}(\mathbf{A}_{\sigma(\mathcal{X})})$.

Lema 23. *Nech B je bold algebra taká, že $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \subseteq B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Potom $B = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.*

Majúc na pamäti vzťahy medzi IF-pravdepodobnosťou a fuzzy pravdepodobnosťou, uvažujme o nasledujúcej otázke. Existujú dve izomorfné kategórie také, že objekty prvej z nich budú tvaru $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ a objekty druhej tvaru $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je bold algebra?

Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$, $\mathcal{Y} \subseteq I^Y$ sú bold algebry a nech h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$. Pre $(u,v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ definujme $\overline{h}(u,v) = (h(u), h(v))$. Označme $\overline{h}$ výsledné zobrazenie z $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ do $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$. Označme $\overline{h}_A$ zúženie zobrazenia $\overline{h}$ na $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$.

Lema 24. *(i) $\overline{h}$ je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ do $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$.*

(ii) $\overline{h}(u,v) \in A(\mathcal{Y} \times \mathcal{Y})$ ak $(u,v) \in A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$.

Predchádzajúce argumenty nás vedú ku kategórii **AIF**, ktorej:

(i) objekty sú systémy $A(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, kde $\mathcal{X}$ je bold algebra, vybavená prirodzeným čiastočným usporiadaním zdedeným z $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ a dvomi Łukasiewiczovskými operáciami $\oplus, \odot$, zdedenými z $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$;

(ii) morfizmy sú tvaru $\overline{h}_A$, kde h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z bold algebry $\mathcal{X}$ do bold algebry $\mathcal{Y}$.

Označme $\mathbf{BID}^2$ nasledujúcu podkategóriu $\mathbf{BID}_2$:

(i) objekty sú bold algeby tvaru $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$;

(ii) morfizmy sú tvaru $\overline{h}$, kde h je sekvenčne spojitý D-homomorfizmus z bold algebry $\mathcal{X}$ do bold algebry $\mathcal{Y}$.

Veta 25. *Kategórie* **AIF** *a* $\mathbf{BID}^2$ *sú izomorfné.*

Záver: Nech $\mathcal{X} \subseteq I^X$ je bold algebra a nech $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ je jej mocnina. Potom (pozri vetu 19) stavy na $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ sú presne konvexné kombinácie stavov na $\mathcal{X}$. Vzhľadom na vetu 25, IF-pravdepodobnosť môže byť interpretovaná v rámci teórie fuzzy pravdepodobnosti.

4 Summary

The present Thesis is devoted to topological methods in generalized probability theory. It is known ([40], [42], [14], [8]) that every σ-additive probability measure is sequentially continuous and every σ-additive probability measure p on a field $\mathbf{A}$ of sets can be uniquely extended to a σ-additive probability measure p_σ on $\sigma(\mathbf{A})$. The extension process can be viewed as a topological construction and, further, from the viewpoint of category theory it can be described as an epireflection. Fuzzy probability theory ([25], [2], [3], [10]) can be viewed as a generalization of classical probability theory and some constructions in IF-probability theory ([49]) have their equivalents in fuzzy probability theory ([24], [51]).

In the introductory part we recall basic topological, algebraic and categorical notions and constructions used in the other parts of Thesis. Next, having in mind applications in probability, we present a synthesis of some less known relationships between measure, integral and topology. The fourth part contains results of our paper [H1] ([27]). Fuzzy probability is based on the category **ID** of D-posets of fuzzy sets and its subcategories **BID**, **CBID**, **CGBID**. A classification scheme of extensions is proposed and a problem whether **CGBID** is epireflective in **BID** is formulated. The problem has been positively solved in [15]. The fifth part deals with products of bold algebras and related probability domains and states on such products. The relationships between basic notions of IF-probability theory and fuzzy probability theory are described in terms of category theory. The corresponding results are presented in our paper [H2] ([28]).

5 Zoznam publikovaných prác a ich citácií

Publikácie:

[H1] HAVLÍČKOVÁ, J.: Real functions and the extension of generalized probability measure. Tatra Mt. Math. Publ. **55** (1913), 85–94.
[H2] HAVLÍČKOVÁ, J.: Real functions and the extension of generalized probability measure II. (Submitted)

Citácie:

Práca [H1] bola citovaná v [15], [24], [51]. Práca [H2] bola citovaná v [24], [51].

Výsledky boli ústne prezentované:

- The 26th International Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, september 2012
- ISCAMI 2014 Conference, Malenovice, ČR, marec 2014
- The 28th International Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, september 2014
- Seminar on Quantum Logics, MÚ SAV, Bratislava, marec 2015
- Seminar Set valued analysis, MÚ SAV, Bratislava, apríl 2015

Literatúra

[1] ADÁMEK, J.: Theory of Mathematical Structures. Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] BUGAJSKI, S.: Statistical maps I. Basic properties. Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[3] BUGAJSKI, S.: Statistical maps II. Operational random variables. Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[4] DVUREČENSKIJ, A. and PULMANNOVÁ, S.: New Trends in Quantum Structures, Kluwer Academic Publ. and Ister Science, Dordrecht and Bratislava, 2000.

[5] FRIČ, R.: Remarks on sequential envelopes. Rend. Istit. Math. Univ. Trieste **26** (1988), 604–612.

[6] FRIČ, R.: History of sequential convergence spaces. In: Handbook of the History of General Topology, Volume 1, 343–355. Editors: C. E. Aull and R. Lowen, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1997.

[7] FRIČ, R.: Stone-type duality and its applications to probability, Topology Proc. **22** Summer 1997, 125–137.

[8] FRIČ, R.: Łukasiewicz tribes are absolutely sequentially closed bold algebras. Czechoslovak Math. J. **52** (2002), 861–874.

[9] FRIČ, R.: Duality for generalized events, Math. Slovaca **54** (2004), 49–60.

[10] FRIČ, R.: Remarks on statistical maps and fuzzy (operational) random variables. Tatra Mt. Math. Publ. **30** (2005), 21–34.

[11] FRIČ, R.: Extension of measures: a categorical approach. Math. Bohemica **130** (2005), 397–407.

[12] FRIČ, R.: Extension of domains of states. Soft Comput. **13** (2009), 63–70.

[13] FRIČ, R.: Measures: continuity, measurability, duality, extension. Tatra Mt. Math. Publ. **42** (2009), 161–174.

[14] FRIČ, R.: From probability to sequences and back. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **44** (2012), 285—296

[15] FRIČ, R.: On D-posets of fuzzy sets. Math. Slovaca **64** (2014), 545–554.

[16] FRIČ, R. and HUŠEK, M.: Projectively generated convergence of sequences. Czechoslovak Math. J. **33** (1983), 525–536.

[17] FRIČ, R., KEMOTO, N.: Sequential envelope revisited, Abstracts of the Eighth Prague Topological Symposium, Part B: Extended abstracts, Praha 1996, 126–134.

[18] FRIČ, R., KENT, D. C.: The finite product theorem for certain epireflections. Math. Nachr. **150** (1991), 7–14.

[19] FRIČ, R., McKENNON, K. and RICHARDSON, G. D.: Sequential convergence in C(X). In: Convergence Structures and Applications to Analysis. (Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math.-Natur.-Technik 1979, 4N), Akademie-Verlag, Berlin, 1980, 56–65.

[20] FRIČ, R. and PAPČO, M.: On probability domains. Internat. J. Theoret. Phys. **49** (2010), 3092–3100.

[21] FRIČ, R. and PAPČO, M.:A categorical approach to probability theory, Studia Logica **94** (2010), 215–230.

[22] FRIČ, R. and PAPČO, M.: Fuzzification of crisp domains. Kybernetika **46** (2010), 1009–1024.

[23] FRIČ, R. and PAPČO, M.: On probability domains II. Internat. J. Theoret. Phys. **50** (2011), 3778–3786.

[24] FRIČ, R. and PAPČO, M.: On probability domains III. Internat. J. Theoret. Phys., 2015, DOI 10.1007/s10773-014-2471-4.

[25] GUDDER, S.: Fuzzy probability theory. Demonstratio Math. **31** (1998), 235–254.

[26] HALMOS, P.: Measure Theory. D. Van Nostrand, Inc., Princeton, 1961.

[27] HAVLÍČKOVÁ, J.: Real functions and the extension of generalized probability measure. Tatra Mt. Math. Publ. **55** (2013), 85–94.

[28] HAVLÍČKOVÁ, J.: Real functions and the extension of generalized probability measure II.

[29] CHOVANEC, F. and KÔPKA, F.: D-posets. In: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures. Edited by K. Engesser, D. M. Gabbay and D. Lehmann, Elsevier, Amsterdam, 2007, 367–428.

[30] JUREČKOVÁ, M.: The measure extension theorem for MV-algebras. Tatra Mt. Math. Publ. **6** (1995), 56–61.

[31] KENT, D. C. and RICHARDSON, G. D.: Two generalizations of Novák's sequential Envelope. Math. Nachr. **19** (1979), 77–85.

[32] KOLMOGOROV, A. N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer, Berlin, 1933.

[33] KÔPKA, F. and CHOVANEC, F.: D-posets. Math. Slovaca **44** (1994), 21–34.

[34] KRATOCHVÍL, P.: Multisequences and measure. In: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algeba IV (Proc. Fourth Prague Topological Sympos., 1976), Part B Contributed Papers, Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Praha, 237–244.

[35] LAVRENTIEV, M.: Contributions a la thórie des ensembles homéomorphes, Fund. Math. **6** (1924), 149–160.

[36] LOYA, P.: Measure ... . (http://www.math.binghamton.edu/loya/505-S08/505-7.pdf)

[37] MARCZEWSKI(-SPILRJAN), E.: On absolutely measurable sets and functions. In: Collected mathematical papers, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1966, 160–18.

[38] MESIAR, R.: Fuzzy sets and probability theory. Tatra Mountains Mathematical Publ. **1** (1992), 105–123.

[39] NOVÁK, J.: Ueber die eindeutigen stetigen Erweiterungen stetiger Funktionen. Czechoslovak Math. J. **8** (1958), 344–355.

[40] NOVÁK, J.: On the sequential envelope. In: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algeba (I) (Proc. (First) Prague Topological Sympos., 1961), Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962, 292–294.

[41] NOVÁK, J.: On convergence spaces and their sequential envelopes. Czechoslovak Math. J. **15** (1965), 74–100.

[42] NOVÁK, J.: On sequential envelopes defined by means of certain classes of functions. Czechoslovak Math. J. **18** (1968), 450–456.

[43] PAPČO, M.: On measurable spaces and measurable maps. Tatra Mt. Math. Publ. **28** (2004), 125–140.

[44] PAPČO, M.: On effect algebras. Soft Comput. **12** (2007), 26–35.

[45] PAPČO, M.: Fuzzification of probabilistic objects. 8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2013), doi:10.2991/eusat.2013.10 (2013), 67–71.

[46] RIEČAN, B and MUNDICI, D: Probability on MV-algebras. In: Handbook of Measure Theory, volume II, Edited by E. Pap, North-Holland, Amsterdam, 2002, 869–910.

[47] RIEČAN, B. and NEUBRUNN, T.: Integral, Measure, and Ordering. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1997.

[48] RIEČAN, B. and NEUBRUNN, T.: Teória miery. Veda, Bratislava, 1992.

[49] RIEČAN, B.: Analysis of fuzzy logic models. In: Intelligent Systems (ed. V.M. Koleshko), In Tech, Rijeka 2012, 219–244.

[50] SKŘIVÁNEK, V.: Real functions in generalized probability. (Submitted.)

[51] SKŘIVÁNEK, V. and FRIČ, R.: Generalized random events. Internat. J. Theoret. Phys., 2015, 10.1007/s10773-015-2594-2

[52] ZADEH, L. A.: Probability measures of fuzzy events. J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 421–427.