

**Vedecká rada Fakulty matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave**

PaedDr. Zuzana Gazdová

Autoreferát dizertačnej práce

Didaktická analýza dôkazov

Na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor
Vo vednom odbore doktorandského štúdia
9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: PaedDr. Zuzana Gazdová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Ivan Trenčanský, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Oponenti:

Autoreferát bol rozoslaný dňa

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa o hodine pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, v miestnosti

Predseda spoločnej odborovej komisie:

ÚVOD

Matematický dôkaz a argumentácia sú základnými prvkami matematiky ako vedy, avšak mali by byť aj základnými prvkami vyučovania a učenia sa matematiky. A práve táto problematika sa dostáva do popredia výskumu v didaktike. Prístupy sú rôzne a z toho vyplýva aj široké spektrum riešených otázok. Nás najviac zaujali práce venované vyučovaniu témy dôkazu a argumentácie a to hlavne práce zamerané na učiteľov a ich prístup a chápanie tejto témy.

Pretože pedagogickú prax učiteľa formujú nielen jeho vedomosti, ale aj predstavy, chápanie vyučovaného predmetu ako aj sociálne vzťahy počas vyučovacieho procesu. Rastúca pozornosť sa obracia práve na predstavy, chápanie daného predmetu, vyučovanej témy učiteľom. Rôzny pohľad, presvedčenie učiteľa o tom čo je dôkaz, argumentácia, aké sú ich funkcie ovplyvňujú to, ako dané pojmy zahrnú do vyučovania, resp. ako ich sami využívajú pri riešení úloh. Dá sa predpokladať, že ak je učiteľ presvedčený o dôležitosti dôkazu a argumentácie, využíva tieto pri riešení úloh, sú aj jeho žiaci vedení k zdôvodňovaniu svojho postupu, k validácii vyslovených hypotéz a k chápaniu dôkazu ako nevyhnutnej súčasti pravdivosti tvrdenia. Naopak ak učiteľ považuje dôkaz za zbytočnú záťaž žiakov a nepodstatný prvok pre vyučovanie, ak pri riešení úlohy zdôrazňuje skôr osvojenie si algoritmu správneho riešenia, tak aj prístup žiakov bude jemu podobný. Niekedy však učiteľ ako matematik pociťuje dôležitosť témy dôkazu, ale v úlohe učiteľa je ovplyvnený mnohými prvkami, ktoré menia jeho prístup k tejto oblasti vo vyučovaní.

V teoretickej fáze našej práce sme na základe štúdia mnohých článkov, dizertačných prác ako aj na základe vlastnej krátkej pedagogickej praxe stanovili hlavný cieľ našej práce:

Cieľom našej práce je získať prehľad o predstavách a chápaní pojmov dôkaz a argumentácia a ich funkciách v matematike a vyučovaní matematiky u učiteľov gymnázií a študentov učiteľstva a vplyv týchto predstáv na pedagogickú prax.

Tento cieľ sme sa rozhodli naplniť výskumom, ktorého príprave predchádzalo štúdium podobných prác a článkov, ktoré slúžili ako motivácia a podklad pre smerovanie nášho výskumu. Na ich základe sme zvolili otázky, tie sme formulovali v dotazníku, ktorý slúžil ako naša výskumná metóda. Zvolili sme dotazníkovú metódu, ktorá je typická pre kvantitatívny

výskum, pričom však na jeho vyhodnotenie sme zvolili obsahovú analýzu odpovedí, ktorá spadá skôr pod kvalitatívny výskum a lepšie korešponduje s dosiahnutím našich cieľov.

Hlavný cieľ práce sme sa rozhodli rozložiť na niekoľko čiastkových cieľov realizovaného výskumu:

- **Cielenými otázkami zistiť, čo učiteľ a študent učiteľstva rozumie pod pojmom dôkaz a argumentácia a aké sú ich funkcie vo vyučovaní a v matematike.**
- **Preskúmať uplatňovanie témy dôkazu a argumentácie vo vyučovaní, skúsenosti učiteľov s touto témou.**
- **Získať názor učiteľov na vzťah žiakov k téme dôkazu.**
- **Zistiť postoj študentov učiteľstva k téme dôkazu v matematike.**
- **Porovnať odpovede učiteľov z praxe a študentov učiteľstva.**
- **Na základe výsledkov výskumu navrhnúť možnosti zlepšenia a hlavne možnosti ďalšieho výskumu v tejto oblasti.**

Na základe dizertačných prác venovaných tejto problematike u nás a skúseností z vlastnej praxe, sme stanovili aj hypotézy výskumu, ktoré vyhodnotením odpovedí učiteľov potvrdíme, alebo vyvrátíme.

H1 Dôkaz a argumentácia nie sú dôležitými prvkami vo vyučovaní na hodinách matematiky.

H2 Správne využívanie argumentácie a dôkazu vo vyučovaní podporí pochopenie podstaty riešenia úlohy pred osvojením len algoritmu jej riešenia.

H3 Dôkazové úlohy nie sú podstatnou súčasťou vo vyučovaní matematiky.

Dizertačná práca je delená nasledovne:

ÚVOD	7
1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE	9
1.1 Významy dôkazu v rôznych inštitučných kontextoch	9
1.2 Kognitívne aspekty	11
1.3 Argumentácia a dôkaz	19
1.4 Typy dôkazu	22
1.5 Dynamický geometrický softvér a dôkaz	24
2 DÔKAZ V ŠKOLÁCH A ŠKOLSKÝCH DOKUMENTOCH	31
3 UČITEĽ A DÔKAZ – PREHĽAD SÚČASNÉHO STAVU	41
3.1 Téma dôkazu vo vysokoškolskej príprave učiteľov	42
3.2 Presvedčenie, predstavy učiteľov o dôkaze a argumentácii v matematike	44
4 VÝSKUMNÁ ČASŤ PRÁCE	48
4.1 Dôkaz a argumentácia vo vyučovaní z pohľadu učiteľa	49
4.2 Dôkaz a argumentácia z pohľadu študentov učiteľstva matematiky	54
5 VÝSLEDKY VÝSKUMU	59
5.1 Vyhodnotenie výskumu – učitelia	59
5.2 Vyhodnotenie výskumu – študenti učiteľstva	80
ZÁVER	89
ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV	93
PRÍLOHY	99
Príloha 1: Dotazník učitelia	100
Príloha 2: Dotazník študenti	104

UČITEĽ A DÔKAZ – PREHĽAD SÚČASNÉHO STAVU

Pojmy dôkaz, argumentácia, deduktívne myslenie, zdôvodňovanie nechýbajú v osnovách mnohých krajín, ako aj v osnovách gymnázií na Slovensku. Zaujímavejšia je však asi samotná prax. Môžeme povedať, že aktívne diskusie k tejto problematike, najmä vo svete, vyplývajú hlavne z problémov, ktoré žiaci s témou dôkazu majú.

Aj u nás sa však rozrastá počet prác venovaných dôkazom a argumentácii. Patria medzi ne niektoré diplomové, rigorózne či dizertačné práce. Medzi diplomové práce patria: **Betková, E.** – *Argumentácia žiakov na základných školách*, **Hopková, T.** – *Netradičné vyučovanie dôkazov*, **Machníková, M.** – *Dôkazy v geometrii na strednej škole*, **Mäsiarová, L.** – *Dôkazy v obrázkoch*, **Bačíková, T.** – *Dajú sa riešiť logické úlohy bez poznatkov z výrokovej logiky?*, **Reháková, J.** – *Dôkazy v matematike a problem solving*.

Tiež niektoré rigorózne práce: **Takácsová, K.** – *Dôkazy vo vyučovaní matematiky*, **Balážová J.** – *Argumentácia žiakov ZŠ v planimetrii*, **Bestrová, M.** – *Argumentácia žiakov stredných škôl pri riešení úloh*, ako aj práce dizertačné: **Takáč, Z.** – *Analýza matematického dôkazu*, a iné.

Tieto práce sú zamerané najmä na žiakov, avšak neoddeliteľnou súčasťou didaktického trojuholníka je okrem žiaka aj učiteľ, ako sprostredkovateľ nových poznatkov. Preto sme sa v našej práci o dôkazoch a argumentácii vo vyučovaní rozhodli obrátiť našu pozornosť zo žiakov na učiteľov a na budúcich učiteľov, teda študentov učiteľstva. Zameriame sa na ich prístup k tejto téme vo vyučovaní, na chápanie pojmu dôkaz a argumentácia, implementáciu týchto pojmov do vyučovacej hodiny, uvádzanie dôkazov sprístupňovaných tvrdení. Budeme skúmať, ako je chápaná dôležitosť dôkazu a jeho funkcia vo vyučovaní a aké problémy a poznatky učiteľom prinieslo vyučovanie tejto témy.

Učiteľ do pedagogickej praxe nastupuje s vedomosťami nadobudnutými počas svojej vysokoškolskej prípravy, v našom prípade teda s vedomosťami o dôkazoch a argumentácii, ktoré nadobudol počas kurzov matematiky, logiky a didaktiky matematiky. Nie sú to však len vedomosti, ktoré ovplyvňujú jeho pedagogické pôsobenie. Dôležitým a neoddeliteľným faktorom sa javia aj predstavy, presvedčenie učiteľov o vyučovanom predmete, v našom prípade o matematike, o vyučovanej téme.

PRESVEDČENIE, PREDSTAVY UČITEĽOV O DÔKAZE A ARGUMENTÁCIÍ V MATEMATIKE

Po skončení vysokoškolskej prípravy nastupuje učiteľ do praxe vyzbrojený vedomosťami z matematiky a didaktiky matematiky. Jeho matematické vedomosti zahrňujú ovládanie matematických pojmov, používanie rôznych matematických postupov a techník, správnu argumentáciu, použitie dôkazov, atď.. Ako hovorí Brousseau: Vedomosti z didaktiky matematiky sú zas postavené na poznatkoch o podmienkach a spôsoboch vyučovania a učenia sa matematiky. (LILJEDAHN, 2008)

Veľmi dôležitou súčasťou sú však pre učiteľov aj ich predstavy, presvedčenie o matematike, sú to ich vnútorné, subjektívne vedomosti a niečo, čomu hovoríme didaktické inžinierstvo.

Presvedčenie, predstavy učiteľov o matematike (teachers' beliefs):

presvedčenie je definované ako osobná filozofia, pohľad na matematiku, tvorí ho systém vedomých a podvedomých predstáv, pojmov, významov, pravidiel, mentálnych obrazov a priorít týkajúcich sa matematiky ako vednej disciplíny, kľúčovými prvkami sú chápanie podstaty matematiky (jej objektu skúmania, jej úlohy, metód), pohľad na jej vyučovanie a učenie sa. (ERNEST, 1988)

A úlohu týchto presvedčení, predstáv pre učiteľov ale aj študentov učiteľstva a pre ich pedagogickú prax by sme mohli zhrnúť vyjadrením **Thompsonovej** (1984):

„Ak charakteristické prvky správania učiteľov sú funkciou ich pohľadov, presvedčení a preferencií o predmete a jeho vyučovaní, potom akýkoľvek pokus zlepšiť kvalitu vyučovania matematiky musí začať s porozumením učiteľovho vnímania a jeho prepojením na prax.“

Zamerajme sa na presvedčenie a predstavy učiteľov o matematickom dôkaze a argumentácii. Dôležité bude porozumenie ich chápania pojmu dôkaz a argumentácia, začlenenie týchto pojmov do vyučovacej hodiny, uvádzanie dôkazov tvrdení, ktoré sú žiakom prístupňované, pozrieme sa ako je chápaná dôležitosť dôkazu a aké skúsenosti z pedagogickej praxe učiteľa v tejto oblasti majú.

Motiváciou pre obrátenie našej pozornosti na učiteľov by mohli byť práce **A. Sergis** - *Mathematical proof: Teachers' beliefs and practices* (Matematický dôkaz: Presvedčenie učiteľov a prax), **Eric J. Knuth** - *Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics* (Chápanie pojmu dôkazu u učiteľov kontexte stredoškolskej matematiky) ako aj **F. Furinghetti, F. Morselli** - *Teachers' beliefs and the teaching of proof* (Presvedčenie učiteľov a vyučovanie dôkazu).

V krátkosti si predstavme obsah spomínaných článkov.

Prvý z týchto článkov autora A. Sergisa poukazuje na to, že rozdiel medzi vzdelávacím programom a tým, čo sa na hodinách matematiky naozaj vyučuje je problém, ktorý si vyžaduje hlbšie preskúmanie. Hlavná motivácia výskumu v tomto prípade vychádza z myšlienky, že „učitelia vyučujú takým spôsobom, ako boli sami vyučovaní“ (Frank 1990). Niektoré výskumy poukazujú na to, že predstavy, presvedčenie učiteľov o matematike je sformované počas ich štúdiá a ovplyvňované ich žiackymi skúsenosťami. Potom vedomosti a zručnosti študentov závisia na učiteľových predstavách o vyučovanej téme. Tento článok prináša výsledky výskumu poukazujúce na to, ako sa predstavy a presvedčenie učiteľov odzrkadľujú v praxi a ako ovplyvňujú chápanie a vyučovanie témy dôkazu. Odpovedá na výskumné otázky: Aké je učiteľovo chápanie podstaty a úlohy dôkazu v kontexte stredoškolskej matematiky? Aký je vzťah medzi chápaním dôkazu u učiteľov a ich pedagogickou praxou? Objektmi výskumu sú dvaja učitelia a ich rôzne pohľady na to, čo utvára dôkaz, na jeho funkcie, ktoré sa rozhodli zahrnúť do vyučovania. A nakoniec v článku načrtáva niekoľko pedagogických dôsledkov na zlepšenie učiteľských i žiackych výkonov pri dôkazoch v matematike. (SERGIS, 2007)

V centre výskumu druhého z článkov, ktorého autorom je E. J. Knuth, sú odporúčania Principles and Standards for School mathematics platné pre vzdelávanie v USA. Tie odporúčajú, aby študenti rozoznali dôkaz a argumentáciu ako základné prvky matematiky, tvorili a preskúmavali matematické tvrdenia, rozvíjali a hodnotili matematické argumenty a dôkaz, a aby si vedeli vybrať a použiť rôzne typy zdôvodňovania a metód dôkazu. Tieto odporúčania kladú veľké nároky na učiteľov matematiky a ich prístup k tejto téme vo vyučovaní. Opäť sa teda dostávame k tomu, že vedomosti a predstavy, poresvedčenie učiteľov sa javia ako dôležité prvky ovplyvňujúce ich pedagogickú prax. Je dôležité rozlišovať medzi chápaním dôkazu v kontexte vedeckej matematiky a v kontexte stredoškolskej matematiky, teda medzi učiteľom – matematikom a učiteľom – učiteľom. Výsledkom je, že učitelia

považujú dôkaz vhodný vo vyučovaní len pre menšinu žiakov. Hlavné výskumné otázky boli: Čo rozumiete pod pojmom dôkaz? Čím je charakterizovaný dôkaz v stredoškolskej matematike? Prečo je nutné vyučovať tému dôkazu na strednej škole? Kedy s týmto vyučovaním začať? Čo si myslíte o odporúčaníach štandardov v oblasti matematického dôkazu? (KNUTH, 2002)

Výsledky autor zhrnul do niekoľkých častí:

1. Čo utvára dôkaz v stredoškolskej matematike.

Popis významu dôkazu v školskej matematike možno zhrnúť v podstate do chápania úrovne formálnosti dôkazu a to na dôkaz formálny, menej formálny a neformálny dôkaz.

2. Povaha dôkazu v školskej matematike

Zahŕňa pohľad na centrálné postavenie dôkazu v školskej matematike, reformu a skúsenosti žiakov s dôkazom.

3. Úloha dôkazu v školskej matematike

Učítelia v rozhovore zdôraznili tieto funkcie a úlohy dôkazu:

- rozvíjanie zručnosti logicky myslieť
- komunikácia matematiky
- prezentovanie uvažovania
- vysvetlenie prečo
- tvorba matematických vedomostí

Posledný zo spomínaných výskumov autoriek F. Furinghetti, F. Morselli ma podobne charakteristiky ako predchodzie. Výskum je zameraný na spôsob akým stredoškolský učítelia pristupujú k dôkazu a na porozumenie, ktoré faktory tento prístup ovplyvňujú. Kombinuje výsledky z výskumov v oblasti dôkazu a z oblasti výskumov o predstavách a presvedčení učiteľov o dôkaze. Hlavnými témami sú vyučovanie a učenie sa dôkazu, dôkaz ako centrálna či okrajová téma vo vyučovaní, rôzne prístupy k tejto téme, problémy študentov s dôkazom, využívanie učebníc, dôkaz v osnovách atď.. Na vyučovanie dôkazu sa pozerá s dvoch perspektív: ako je téma dôkazu rozvíjaná v triede, a ktoré faktory to ovplyvňujú. Do úvahy je nutné brať nie len učiteľove pedagogické rozhodnutia, ale aj dôvody, ktoré stoja za týmito rozhodnutiami. A opäť sa predstavy, presvedčenie učiteľov javia ako rozhodujúci faktor. (FURINGHETTI et al., 2009)

VÝSKUM

Hlavný cieľ našej práce, ako aj čiastkové ciele výskumu a overované hypotézy sme uviedli už v úvode autoreferátu. Teraz uvedieme metódy, výber respondentov a hlavné výskumné otázky.

Výskumná metóda

Ako výskumnú metódu sme zvolili dotazník, výber bol ovplyvnený najmä časovým obmedzením pre realizáciu výskumu. Dotazník sa skladá hlavne z otvorených otázok, ktoré nám pomôžu nahradiť metódu rozhovoru a umožnia nám získať čo najviac informácií a názorov učiteľov a študentov učiteľstva.

Respondenti

Ako respondentov pre náš výskum sme vybrali učiteľov matematiky na gymnáziách, pretože rozsah i obsah matematiky na gymnáziu najviac zodpovedá aplikáciou i obsahom témy dôkazu a argumentácie našim potrebám. Učitelia na základe dobrovoľnosti mohli vyplniť zaslaný dotazník. Dotazník bolo možné vyplniť na www stránke, kde sme ho sprístupnili, alebo vyplnením zaslaného wordovského dokumentu. Dotazník bol zaslaný celkovému počtu asi 150 respondentov na všetky gymnáziá po celom Slovensku, pričom sa nám vrátilo 32 dotazníkov. Taktiež sme pozmenený dotazník nechali vyplniť aj skupinu 16 študentov učiteľstva s kombináciou matematika na prírodovedeckej fakulte UK, kde dotazník vyplnilo 12 z nich.

Hlavné výskumné otázky

- Aké sú predstavy, presvedčenie učiteľov a študentov učiteľstva o dôkaze a argumentácii v matematike?
- Aké sú skúsenosti študentov učiteľstva s témou dôkazu?
- Ako sa tieto predstavy premietajú do učiteľovej praxe?
- Aký vplyv majú odporúčania vzdelávacieho programu na vyučovanie tejto témy?
- Aká je funkcia dôkazových úloh vo vyučovaní a s akými problémami u žiakov sa učiteľ môže pri ich riešení stretnúť?

VÝSLEDKY A ICH VÝZNAM

Na základe výsledkov výskumu môžeme tvrdiť, že sa nám podarilo naplniť hlavný cieľ našej práce, a to získať prehľad o predstavách a chápaní pojmov dôkaz a argumentácia, ich funkciách v matematike a vyučovaní matematiky. Aj keď vzorka odpovedí učiteľov i študentov bola malá, a nemôžeme výsledky zovšeobecňovať do takej miery, ako by sme chceli, aj táto vzorka nám poskytla bohaté informácie.

Aké sú teda predstavy, presvedčenie učiteľov a študentov učiteľstva o dôkaze a argumentácii v matematike?

Samozrejme každý z opýtaných učiteľov sa priblížil k viac či menej formálnej definícii matematického dôkazu a argumentácie, **kde dôkaz je logický proces, ktorým overujeme platnosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a predtým dokázaných viet na základe logických zákonov. V matematike plní úlohu nástoja na výstavbu matematickej teórie, na verifikáciu tvrdení, dopĺňa chýbajúce prvky v systéme poznatkov a rozvíja logické myslenie. Vo vyučovaní sú jeho úlohy podobné.** Tieto odpovede formovali najmä skúsenosti z vysokoškolských kurzov matematiky ako aj zo štúdia na strednej škole. Aj keď sme očakávali, že aj kurzy didaktiky matematiky budú v odpovediach viac spomínané, to sa nám nepotvrdilo, ani u učiteľov ani u študentov, čo nám ponúka otázku, prečo tomu tak je, keďže didaktika matematiky by mala pripraviť budúceho učiteľa na prax, a teda aj na prax vo vyučovaní tejto témy. Je to mu naozaj tak, že kurzy didaktiky matematiky neposkytujú študentom učiteľstva konkrétne príklady použitia dôkazu vo vyučovaní, správne použitie argumentácie pri riešení úloh a pri formulovaní tvrdení? Táto otázka by si vyžadovala dôkladnejšie preskúmanie, na čo však náš výskum nestačí.

Na základe určenia úloh dôkazu v matematike a vyučovaní matematiky učiteľmi sa dostávame k našej prvej hypotéze **H1: Dôkaz a argumentácia nie sú dôležitými prvkami vo vyučovaní na hodinách matematiky.**

Na základe našich zistení z odpovedí učiteľov sme usúdili, že dôkaz a argumentácia sú naozaj dôležitými a podstatnými prvkami vyučovania. Len ojedinelé prípady učiteľov považujú dôkaz vo vyučovaní za zbytočný a naopak pre väčšinu je prvkom podstatným. Vidia ho ako prostriedok potvrdenia správnosti tvrdenia, prostriedok rozvoja žiackych zručností

a upevnenia vedomostí. Je súčasťou sprístupňovania nových matematických tvrdení žiakom. Takže vychádzajúc z týchto tvrdení môžeme zhodnotiť, že sa naša prvá hypotéza vyvrátila.

Samozrejme nielen prístup učiteľov, ale aj vzdelávací program má vplyv na vyučovanie tejto témy. Môžeme povedať, že vzdelávací program je svojimi odporúčaniami téme logika, dôkaz, argumentácia pozitívne naklonený, odporúča, aby sa logika prelínala celým učivom matematiky. Učitelia zhodnotili, že takéto odporúčanie nie je pre nich ničím novým, keďže logika, dôkazy sú prirodzenou súčasťou matematiky. Nový vzdelávací program navrhuje isté výkonové štandardy a štandardy kompetencií v oblasti logika, dôvodenie, dôkazy, neuvádza už spomínaný obsahový štandard, neponúka konkrétne príklady ako ich plniť, neponúka návody na úlohy, na štandardné úlohy, od ktorých by sa učitelia mohli odrážať a na čom budovať prax v tejto oblasti. (Môžeme sa obrátiť akurát na **Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre gymnázium, vydaný Štátnym pedagogickým ústavom z roku 2001, ktorý vypracoval RNDr. M. Hanulu**). Možno lepšie spracovanie tejto problematiky v učebniciach by viedlo k zlepšeniu prístupu aj tých učiteľov, pre ktorých tento celok nie je práve obľúbeným, a ktorí nevyužívajú až tak naplno dôkaz vo svojom vyučovaní.

Súčasťou tejto problematiky vo vyučovaní sú aj rôzne dôkazové úlohy, chceli sme zistiť, či takéto úlohy sú súčasťou vyučovania a tak sme formulovali ďalšiu hypotézu

H3: Dôkazové úlohy nie sú podstatnou súčasťou vo vyučovaní matematiky.

Na základe odpovedí učiteľov musíme opäť našu hypotézu zamietnuť, väčšina učiteľov využíva takéto a podobné dôkazové úlohy vo vyučovaní, samozrejme sú témy vhodné a nie vhodné na takéto úlohy, a neobíde sa ich riešenie bez problémov, ako zlá interpretácia výsledku či už strach naháňajúce zadanie. Ale vhodné využívanie týchto úloh vo vyučovaní učiteľom podľa nás môže zlepšiť úspešnosť ich riešenia a odbúra ten komplex slova „*dokážte*“ v ich zadaniach. Dôkazových úloh je v učebniciach podľa učiteľov primerane, niektorí však zdôraznili, že zatiaľ nevieme, ako na tom budú nové učebnice, respektíve, že pociťujú nutnosť hľadať takéto úlohy aj v doplnkovej literatúre.

V práci sme stanovili ešte jednu hypotézu, a to **H2: Správne využívanie argumentácie a dôkazu vo vyučovaní podporí pochopenie podstaty riešenia úlohy pred osvojením len algoritmu jej riešenia.**

Túto hypotézu nemôžeme na základe nášho výskumu ani potvrdiť ani vyvrátiť. Na základe odpovedí učiteľov aj študentov učiteľstva je dôležitejšie osvojenie podstaty riešenia úlohy,

pretože to má všeobecnejšie využitie, než len algoritmus, ktorý je možné použiť len na rovnaký typ úlohy. Avšak pre potvrdenie tejto hypotézy by bolo nutné overiť aj či žiaci týchto učiteľov, resp. žiaci všeobecne pristupujú pri riešení úlohy skôr k aplikácii naučeného postupu bez rozmyslu, alebo dokážu nájsť podstatu jej riešenia. Správne využívanie argumentácie a dôkazu by malo prispievať k rozvoju logického myslenia u žiakov a to by malo byť základným predpokladom pochopenia danej úlohy a jej riešenia.

Keďže sme náš výskum na učiteľoch doplnili aj dotazníkom pre študentov učiteľstva, porovnáme, alebo skôr poukážeme na hlavný rozdiel v odpovediach učiteľov z praxe a študentov učiteľstva.

Podobne ako u učiteľov i u budúcich študentov učiteľstva môžeme nájsť pozitívny vzťah k téme dôkazu aj vzťah negatívny, ktorý u študentov možno mierne prevažuje, aj keď hlavne vo vzťahu dôkazu a stredoškolskej matematiky, kde ho považujú viacerí študenti za zbytočný. Ale vidíme, že už aj študenti učiteľstva majú vytvorené predstavy o úlohe, funkcii dôkazu v matematike i vyučovaní matematiky ovplyvnené najmä zážitkami zo strednej školy a absolvovaných kurzov VŠ. **Avšak je veľký rozdiel vo vyjadrení a vyjadrovaní u budúcich učiteľov a učiteľov z praxe.** Očakávali sme, že študenti, ktorí majú už absolvovanú viac ako polovicu štúdia, dokážu vyjadriť bohatšie a presnejšie svoj názor a vedomosti z tejto témy. Je podľa nás potrebné, aby kurzy didaktiky matematiky viac rozvíjali konkrétnejší prístup, názory k téme dôkazu i k ostatným témam matematiky. A nielen didaktika matematiky, aj keď tá je pre budúcich učiteľov zásadná, ale aj ostatné kurzy matematiky.

Celý výskum by sme na základe jeho výsledkov chceli uzavrieť návrhmi na ďalšie rozšírenie a pokračovanie, ako aj podnetmi na zlepšenie prípravy či praxe učiteľov. Návrhy na zlepšenie by sme chceli smerovať najmä k vysokoškolskej príprave učiteľov a vzdelávaciemu programu pre gymnáziá. V odpovediach učiteľov a najmä študentov učiteľstva sme očakávali viac odkazov na didaktiku matematiky a tie sa tam neobjavili. Bolo by prínosné, ak by kurzy didaktiky matematiky viac svojim obsahom prispievali k rozšíreniu a upevneniu vedomostí o dôkaze, ak by prispievali vhodnými návodmi k jeho využitiu vo vyučovaní a to nie len v celku logika, dôvodenie a dôkazy, ale v každom tematickom celku. Jedným takým kurzom, ktorý sa venuje jednotlivým častiam učiva a aj využitiu rôznych úloh vyžadujúcich správnu argumentáciu je na FMFI UK kurz *Didaktický seminár zo školskej matematiky*, a podobných kurzov teoreticky zastrešených didaktikou matematiky by mohlo byť aj viac. Podobne

vzdelávací program pre gymnázia by okrem požiadavok na zvládnuté kompetencie, mohol ponúkať aj praktické návody, ako tieto požiadavky plniť, ak už nie priamymi odporúčaniami v programe, tak by tieto pokyny mohli byť súčasťou učebníc.

Tiež by sme si vedeli predstaviť návrhy na ďalší výskum v tejto oblasti.

Bolo by vhodné zopakovať tento výskum na väčšej vzorke, aby sme dosiahli všeobecnejšie overenie našich hypotéz ako aj výsledkov výskumu. Téma dôkazu a argumentácie z pohľadu učiteľa však ponúka aj iné možnosti výskumu, bolo by zaujímavé napríklad sledovať študentov učiteľstva počas ich štúdia a počas vstupu do praxe, či táto ovplyvní ich prístup k tejto téme. Teda skúmať nemennosť či zmenu predstáv, presvedčení o dôkaze a argumentácii v matematike. Pričom podľa nás sú tieto predstavy vo väčšej časti nemenné.

Popríklad by sme odporúčali rozšíriť náš výskum o pozorovanie na hodinách vybraných učiteľov a o rozhovory so žiakmi daného učiteľa alebo dotazník, aby sme mohli overiť, ako prístup učiteľa k tejto téme ovplyvňuje aj jeho žiakov, teda ak učiteľ vo výraznej miere využíva dôkazy vo vyučovaní a kladie dôraz na argumentáciu, či sa to prejaví aj u jeho žiakov. A mohli by sme navrhnúť aj ďalšie, keďže táto téma je podľa nás veľmi zaujímavá a v oblasti výskumu na Slovensku málo preskúmaná.

ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁC PREDKLADATEĽA

Gazdová, Z. *Didaktická analýza dôkazov v matematike*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Univerzita Komenského v Bratislave. Rigorózna práca. Bratislava. 2009

Trenčanský, I., Balážová, J., Bestrová, M., Čerňanová, V., Folčan, M., Gazdová, Z., Kaňuková, K., Mikóczyová, D., Neuhold, E., Šišková, J., Tisoň, M., Židová, D. *Akcia, formulácia a validácia podľa teórie didaktických situácií v matematike: voľný preklad úvodnej kapitoly z knihy Théorie des situations didactiques/Guy Brousseau*, Bratislava:FMFI, 2007

Gazdová, Z. Kaňuková, K. Analýza vybraných príkladov kurzu TDS. In Stehlikova, N., Tejkalova, L. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2010, sborník príspevku*. Praha: PedF UK.V tisku.

Trenčanský I., Gazdová, Z. Postgraduálne vzdelávanie učiteľov matematiky a teória didaktických situácií. In: *Experience in further education of teachers in mathematics*. Ostrava. 2008. S. 141- 149

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

BALACHEFF, N. 1988. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*. London: Hodder and Stoughton, 1988, s.216-235

BALACHEFF, N. 1999. *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate...*[online]. [cit.2007-6-8]. Dostupné na:

<http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html>

BALACHEFF, N. 2002. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. In F.-I. Lin (Ed.), *International Conference on Mathematics – „Understanding proving and proving to understand“*. Taipei, Taiwan, 2002, s.23-44

BALACHEFF, N. 2008. The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics education* 2008, Vol.40, s.501-512

BALACHEFF, N., MARIOTTI, M. A. 2008. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics education* 2008, Vol.40, s.341-344

BALÁŽOVÁ, J. 2008. *Argumentácia žiakov ZŠ v planimetrii*. Rigorózná práca, FMFI UK, Bratislava, 2008

BERGQVIST, T. 2005. How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2005, Vol.8, s. 171-191

BESTROVÁ, M. 2007. *Argumentácia žiakov stredných škôl pri riešení úloh*. Písomná časť dizertačnej skúšky, FMFI UK, Bratislava, 2007

CLEMENTS, D. H., BATTISTA, M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. MacMillan, N.York, USA,1992, s. 420-464

DE VILLIERS, M. 1999. *The role and function of proof with Sketchpad*. [online]. [cit.2009-2-9]. Dostupné na: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf>

DING, L., JONES, K. 2007. Using the van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in Shanghai. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca: University of Cyprus, 2007

ERNEST, P. (1988): *Impact of beliefs on the teaching of mathematics*. [online]. [cit.2009-1-26]. Dostupné na: <http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/impact.htm>

FURINGHETTI, F., MORSELLI F. 2009. Teachers' beliefs and the teaching of proof. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics*

Education, 2009, Vol.1, s.166-171

FURINGHETTI F., PEHKONEN, E. 2002. Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* . Kluwer Academic Publishers, 2002, s. 39-57

GODINO, J. D. 1997. Meaning of proofs in mathematics education. *PME XXI Proceedings*, Vol.2, Lahti: Finland, 2000, s.313-320

GOLDIN A. G. 2002. Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* . Kluwer Academic Publishers, 2002, s. 59-72.

GUTIERREZ, A. 2004. Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004, Vol.2, s. 511-518

HANNA, G. 2000a. Proof, expalnation and exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 2000, Vol.44, s. 5-23

HANNA, G. 2000b. *Proof and its classroom role: A survey*. [online]. [cit.2007-9-30]. Dostupné na: <http://www.spce.org.pt/sem/GH.pdf>

HANNA, G., DE VILLIERS M., et al. 2009. Icmi study 19: proof and proving in mathematics education: discussion document. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 2009, Vol.1, s. 18-29

HECHT, T. 2006. *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ, zošit 2, Matematická analýza, Logika*. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2006

HAREL, G., SOWDER, L. 1998a. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* .Providence, RI: American Mathematical Society, 1998, s.234-283

HAREL, G., SOWDER, L. 1998b. Toward comprehensive perspectives on the learning, *Learning Mathematics*(2nd Ed.). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 1998

INGLIS, M., MEJIA-RAMOS, J. P., SIMPSON, A. 2007. Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 2007 ,Vol. 66, s. 3-21

JONES, K. 2000. The student experience of mathematical proof at uviversity level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2000, Vol. 31,No. 1, s. 53-60

KNUTH, E. J. 2002. Teachers'conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2002, Vol.5, s. 61–88

LEATHAM, K. 2006. Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education* 9(2), s. 91-102

LILJEDAHN, P. 2008. Teachers' beliefs and Teachers' knowledge. [Online].

[cit.2009-12-29]. Dostupné na:

<http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/LILJED.pdf>

MARRADES, R., GUTIÉRREZ, Á. 2000. Proofs produced by secondary school students learning geometry in dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 2000, Vol.44, s. 87-125

NORDSTRÖM, K. 2005. *A pilot study on five mathematicians' pedagogical views on proof.* [online]. [cit.2007-12-29]. Dostupné na:

<http://www.soph.uab.edu/Statgenetics/Documents/Nodstrom>.

PEDEMONTE, B. 2008. Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics education*, 2008, Vol.40, s. 385-400

REHÁKOVÁ, J. 1996. *Dôkazy v matematike a problem solving.* Diplomová práca. FMFI UK, Bratislava, 1996

REID, D. A. 2005. *The meaning of proof in mathematics education.* [online].

[cit.2009-2-9]. Dostupné na:

<http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/05Automne/CERME4Raid.pdf>

SERGIS, A. 2007. Mathematical proof: Teachers' beliefs and practices. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Larnaca: University of Cyprus, 2007

TAKÁČ, Z. 2003. *Klasifikácia dôkazov.* Pedagogická fakulta KU, Ružomberok, 2003

TALL, D. 1999. *The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?.* [online]. [cit.2007-10-12]. Dostupné na:

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999j-proof-chicago.pdf>

TALL, D. 2008. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 2008, 20 (2), s. 5-24

TALL, D., MEJIA-RAMOS, J. P. 2006. *Long term cognitive development of different types of reasoning and proof.* [online]. [cit.2007-10-12]. Dostupné na:

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006g-mejia-tall.pdf>

THOMPSON A.G. 1984. The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching instructional practice. *Educational Studies in Mathematics* 15, 1984, s.105-127

WEBER, K. 2003. *Students' difficulties with proof.* [online]. [cit.2007-11-8].

Dostupné na: http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html

GEOMETRIC THINKING AND GEOMETRIC CONCEPTS. [online]. [cit.2008-11-8].

Dostupné na:

<http://www.learner.org/courses/learningmath/geometry/pdfs/session9/vand.pdf>

LES MATHÉMATIQUES AU LYCÉE- PROGRAMMES. [online]. [cit.2008-11-8].

Dostupné na:

http://www.acnancymetz.fr/enseign/Maths/m2002/institut/programmes/lycee/1S_programme.html#1S_contenus

MATEMATICKÁ LOGIKA . [online]. [cit.2009-11-8]. Dostupné na:

<http://www.cs.vsb.cz/duzi/matlogika.pdf>

PRINCIPLES AND STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS. [online]. [cit.2008-11-8].

Dostupné na: <http://standards.nctm.org/document/chapter3/reas.htm>

RÁMCOVÝ VZDELÁVACÍ PROGRAM PRE GYMNÁZIA ČESKÁ REPUBLIKA. [online].

[cit.2008-11-8]. Dostupné na:

http://www.msmt.cz/uploads/Vzdelavani/Skolska_reforma/RVP/RVP_gymnazia.pdf

TOULMIN'S ARGUMENT MODEL. [online]. [cit.2008-11-8]. Dostupné na:

http://changingminds.org/disciplines/argument/making_argument/toulmin.htm

VAN HIELE LEVELS OF GEOMETRIC REASONING. [online]. [cit.2008-11-8]. Dostupné na:

http://images.rbs.org/cognitive/van_hiele.shtml

THE VAN HIELE THEORY. [online]. [cit.2008-11-8]. Dostupné na:

<http://academic.sun.ac.za/mathed/Malati/vanHiele.pdf>

SUMMARY

Proof and argumentation are the key elements of mathematics as a scientific discipline, but they should be also key elements mathematical education. The main goal of our thesis is to make survey of inservice and preservice teachers' beliefs about proof and argumentation, their functions in mathematics and mathematical education and their impact on teachers' practice.

Chapters are aimed at various researches and questions in the field of proof and argumentation: proof in lessons, proof in curriculum, as well as teachers' beliefs about proof and argumentation.

Explorational part of the work consists of designing the questionnaire, analysing its questions and analysing the teachers' answers. At the end we propose some possibilities for the next research and for the improvement of pedagogical practice and undergraduate study of preservice teachers.