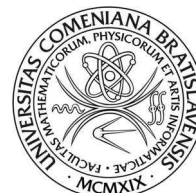




Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**Mgr. Mária Gabajová**

**Autoreferát dizertačnej práce**

**ROZVÍJANIE PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY**

**na získanie akademického titulu philosophiae doctor**

**v odbore doktorandského štúdia:**

**9.1.8 Teória vyučovania matematiky**

**Miesto a dátum:**

**Bratislava 2012**



## Úvod a rozdelenie práce

Priestorová predstavivosť je jednou z dôležitých schopností umožňujúcich prežitie ľudí v reálnom svete. Bez nej by sme sa nedokázali vrátiť z práce domov, či pohybovať sa v byte. Priestorová predstavivosť je nevyhnutnou podmienkou na vykonávanie rôznych profesií, napríklad dizajnérov, lekárov či vedcov. Priestorová predstavivosť však nie je vrodená schopnosť, ale postupne s nadobúdaním skúseností sa rozvíja. Priestorová predstavivosť však nie je jeden ucelený konštrukt, ale je to niekoľko schopností. V rámci týchto schopností dokážeme identifikovať rôzne útvary, predstavovať si rôzne obrazce, usporiadať predmety v priestore a podobne.

Školstvo Slovenskej republiky prechádza v súčasnosti reformou. Vo vzdelávacích programoch ISCED 1 a ISCED 2 je v rámci cieľov zahrnuté aj rozvíjanie priestorovej predstavivosti, nie je však definované, akým spôsobom má učiteľ priestorovú predstavivosť na hodinách rozvíjať.

Práca je rozčlenená do šiestich kapitol.

V prvej kapitole dizertačnej práce sa nachádza prehľad o mieste priestorovej predstavivosti vo vyučovaní matematiky v rámci štátneho vzdelávacieho programu.

V druhej kapitole opisujeme aktuálny pohľad na priestorovú predstavivosť z troch hľadísk: fyziologického, psychologického a pedagogického hľadiska. Zhrnuli sme závery niektorých výskumov týkajúcich sa priestorovej predstavivosti.

Tretia kapitola obsahuje teoretické východiská, v ktorých sa zameriavame na priestorovú predstavivosť z pohľadu psychológie, geometrie a definície priestorovej predstavivosti.

Štvrtá kapitola opisuje predexperiment zameraný na vhodnosť aktivít a didaktických pomôcok pre nami zvolenú vekovú kategóriu.

V piatej kapitole popisujeme vlastný výskum, ciele a hypotézy výskumu. V tejto kapitole sme overili na základe získaných údajov stanovené hypotézy. Je tu uvedený priebeh experimentu, dôležité skutočnosti, ktoré sa počas experimentu vyskytli a akým spôsobom sme sa snažili naplniť ciele výskumu. Nachádza sa tu aj stručná charakteristika zbierky úloh, ktorá je výsledkom výskumu.

V šiestej kapitole sme stručne zhrnuli prínos pre pedagogickú teóriu a prax.

V závere sa nachádza stručné zhrnutie výsledkov výskumu.

V prílohách sa nachádzajú testy, ktoré sme používali na overenie hypotéz, výsledky jednotlivých testov, výsledky dotazníka a je tu aj uvedená kompletná zbierka aktivít, ktorá je výsledkom výskumu.

## 1. Ciele a hypotézy výskumu

Rozvíjanie priestorovej predstavivosti vo výchovno-vzdelávacom procese z hľadiska potrieb pedagogickej teórie aj praxe prináša nasledovné **výskumné problémy**:

- dlhodobo je známe, že geometria robí problémy študentom a žiakom počas celého štúdia,
- rozvíjaniu priestorovej predstavivosti sa nevenuje dostatočná pozornosť na primárnom stupni, kedy je jedno z najvhodnejších vekových období na rozvíjanie priestorovej predstavivosti,
- zaznamenávame problém, akým spôsobom rozvíjať čo najúčinnjšie priestorovú predstavivosť u žiakov,
- ako implementovať úlohy rozvíjajúce priestorovú predstavivosť žiakov do vyučovania matematiky tak, aby bola táto schopnosť rozvíjaná efektívne a dlhodobo.

V zhode s uvedenými výskumnými problémami sme si v našej práci stanovili nasledujúce **ciele**:

- vytvoriť súbor úloh, ktoré pomáhajú rozvíjať priestorovú predstavivosť prostredníctvom didaktických pomôcok a sú zaujímavé nielen pre deti, ale aj pre učiteľov,
- preskúmať účinnosť úloh na priestorovú predstavivosť žiakov a ich učebné výsledky,
- na základe výsledkov vyvodiť teoretické a praktické závery pre efektívnejšie rozvíjanie priestorovej predstavivosti vo vyučovaní matematiky.

Na základe formulovaných cieľov sme si stanovili tieto základné **výskumné úlohy**:

- zvoliť výskumnú vzorku žiakov vo veku 10-12 rokov, ktorým sa budeme systematicky venovať so zámerom rozvíjania priestorovej predstavivosti,
- uskutočniť vhodný výber testovacieho nástroja priestorovej predstavivosti pre nami zvolenú vekovú kategóriu,
- vybrať vhodné didaktické pomôcky na rozvíjanie priestorovej predstavivosti pre nami zvolenú vekovú kategóriu žiakov,
- vypracovať súbor úloh na rozvíjanie priestorovej predstavivosti,
- využívanie didaktických pomôcok a súbor vypracovaných úloh overiť v praxi.

Učiteľ má dôležitú funkciu na vyučovacej hodine, prináša tému vyučovacej hodiny a zvyčajne aj rozhoduje, akou formou budú žiaci na hodine pracovať. Aj keď si učitelia uvedomujú, že niektoré príklady žiaci nevedia bez dostatočne rozvinutej priestorovej predstavivosti riešiť, jej rozvíjanie do svojich hodín ako primárny cieľ takmer vôbec

nezaradujú. Učitelia sa spoliehajú na to, že žiaci si rozvíjajú priestorovú predstavivosť dostatočne v mimoškolských aktivitách (stavebnice, hry s rodičmi a pod.). Manipuláciu s reálnymi objektmi sme si vybrali preto, lebo žiaci majú možnosť na lepšie uvedomenie si vzájomných vzťahov medzi útvarmi, uvedomenie si polohy útvaru v priestore, uvedomenie si, že nech akokoľvek útvar zmení polohu v priestore, jeho základné vlastnosti (tvar, veľkosť) sa tým nemenia. Keďže naša práca má mať aplikačnú úroveň, je dôležité, aby pomôcky boli ľahko dostupné či už z finančného hľadiska alebo z hľadiska dostupnosti na trhu. Z vyššie uvedených dôvodov sme si na prácu vybrali tangram, SOMA kocku, plastelínu a špajle.

Vzhľadom na stanovené ciele a úlohy sme si na základe teoretických poznatkov a empirických skúseností sformulovali nasledujúce **hypotézy**:

*H1: Získavaním skúseností v oblasti jemnej motoriky a psychomotorických zručností pomocou nami vybraných didaktických pomôcok nastane lepšie rozvíjanie priestorovej predstavivosti u žiakov 4. a 5. ročníka základnej školy ako u žiakov, ktorí takéto skúsenosti nemali.*

*H2: Systematickým rozvíjaním priestorovej predstavivosti v 5. ročníku základnej školy dosiahnu žiaci v 6. ročníku lepšie učebné výsledky v geometrii ako žiaci, ktorí nemali systematicky rozvíjanú priestorovú predstavivosť v 5. ročníku.*

Prvá pracovná hypotéza vychádza z podkladov uvedených v teoretickej časti tejto práce. Vychádza z predpokladov, že vek 11-12 rokov je jedno z najvhodnejších období na rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Vo veku 11 rokov prechádzajú deti zo štádia konkrétnych operácií do štádia formálnych operácií, čo teda znamená, že získavaním skúseností v oblasti jemnej motoriky a psychomotorických zručností s priestorovými útvarmi dieťa nadobúda priestorovo-vizuálno-konštrukčné spoje. Priestorová predstavivosť a jej rozvíjanie nie je však krátkodobou záležitosťou, ale je potrebné ju rozvíjať systematicky, teda pravidelne v dlhšom časovom intervale.

Druhá pracovná hypotéza je založená na predpoklade, že priestorová predstavivosť slúži aj ako nástroj na riešenie niektorých problémov. Žiaci, ktorí majú systematicky rozvíjanú priestorovú predstavivosť, si dokážu ľahšie poradiť s riešením matematických úloh z geometrie, pretože rýchlejšie dokážu interpretovať vzťahy, ktoré pre zadané úlohy platia.

## 2. Teoretické východiská práce

V rámci teoretických východísk práce sme si zdefinovali pojmy *priestorovej predstavivosti* ako aj *geometrickej predstavivosti*. Tieto pojmy sme opísali na základe slovenskej aj zahraničnej literatúry.

Priestorovú predstavivosť podľa Molnára (Molnár, 2004) môžeme definovať ako schopnosť operovať priestorovými predstavami. Nie sú to však predstavy o činnosti, ale rozumová činnosť s predstavami. Je to súbor schopností týkajúcich sa reprodukčných i anticipačných, statických a dynamických predstáv o tvaroch, vlastnostiach a vzájomných vzťahoch medzi geometrickými útvarmi v priestore. Priestorová predstavivosť nie je jeden ucelený konštrukt, ale je to súbor niekoľkých faktorov: *priestorová orientácia pasívna*, *priestorová orientácia aktívna*, *vizuálna pamäť*, *vizuálna identifikácia*, *mentálna manipulácia*, *manuálna manipulácia* a *technická tvorivosť v priestorovej predstavivosti*.

Geometrická predstavivosť je podľa Jirotkovej (1990) schopnosť

- poznávať geometrické útvary a ich vlastnosti,
- abstrahovať z reálnej skutočnosti - konkrétnych objektov ich geometrické vlastnosti a vidieť v nich geometrické útvary v ich ideálnej podobe (napríklad o izbe uvažovať ako o ideálnom kvádri ),
- na základe rovinných obrazov si predstaviť geometrické útvary v rôznych vzájomných polohách a to aj v takých, v ktorých nemôžu byť uskutočnené pomocou reálnych geometrických modelov,
- mať zásobu predstáv geometrických útvarov a schopnosť vybavovať si ich najrôznejšie podoby,
- predstaviť si geometrické útvary, vzťahy medzi nimi aj na základe ich popisu.

Pierre van Hiele (Van Hiele, 1986) vo svojej práci klasifikoval stupne (úrovne) geometrického myslenia: *vizualizácia*, *analýza*, *neformálna dedukcia*, *dedukcia* a *rigoróznosť*.

J. Piaget a V. Repáš uvádzajú, že „*existujú isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopnosti priestorového videnia. Keď sa tieto obdobia premeškajú, stráca človek možnosť rozvinúť svoje schopnosti na takú úroveň, ktorú dávali genetické predispozície.*“ (Hejný a kol., 1990, s.368) Za prvé obdobie pokladajú vek 5-6 rokov a druhé takéto obdobie je 11 až 12 rokov.

Z výskumov tiež vyplýva, že priestorovú predstavivosť môžeme rozvíjať získavaním množstva skúseností s okolitým svetom (Piaget, 1993; Swoboda, 2009; Jirotková, 1990; Hejný, 1990).

Na základe analýzy výskumov týkajúcich sa priestorovej predstavivosti či už v oblasti pedagogiky alebo psychológie sme vyslovili predpoklad, že priestorovú predstavivosť môžeme vhodne rozvíjať manipuláciou s predmetmi, rozvíjaním psychomotorických zručností a jemnej motoriky. Tieto úvahy viedli k sformulovaniu prvej hypotézy.

Druhá hypotéza vychádzala z úvah, že geometria robí študentom problémy počas celej školskej dochádzky (Půlpán, 1992; Hejný, 1990). S časti to je zapríčinené nedostatočne rozvinutou priestorovou predstavivosťou, preto majú študenti v tejto oblasti horšie učebné výsledky. Predpokladáme preto, že zlepšením priestorovej predstavivosti sa zlepšia aj učebné výsledky žiakov.

Pre štatistické overenie hypotéz a metodológiu výskumu sme vychádzali z diel autorov, ktorí sa zaoberajú metódami výskumu v oblasti pedagogiky (Kerlinger, 1972; Gavora, 2010; Komárik, 2002; Chráska, 2007).

### **3. Vlastný výskum**

Výskum bol realizovaný formou experimentálnej metódy. Jedná sa o kvantitatívno-kvalitatívny výskum. Pomocou tejto metódy sme skúmali vzťah medzi závisle premennou – riešenie úloh, zameraných na priestorovú predstavivosť a nezávisle premennou – aktivity zahŕňajúce manipuláciu s priestorovými telesami. Metódou kvalitatívnej časti výskumu bolo pozorovanie žiakov a učiteľov počas experimentu, interview s učiteľmi a dotazníkový prieskum žiakov.

Predmetom výskumu je rozvíjanie priestorovej predstavivosti respektíve jej aspektov v rámci vyučovania matematiky prostredníctvom manipulácie s nami vybranými pomôckami. Vzhľadom na časové, materiálne aj organizačné podmienky sme sa zamerali na vekovú kategóriu 10 až 12 rokov. Zvolili sme si triedy 4. a 5. ročníka, pretože podľa nášho názoru chýba akési prepojenie medzi primárnym a sekundárnym stupňom základnej školy a zároveň žiaci primárneho stupňa majú v sebe obrovský potenciál tvorivosti, preto je vhodné ho využiť.

Kontrolnú skupinu tvorilo 5 tried a to 3 triedy 4. ročníka ZŠ – 31 žiakov a 2 triedy 5. ročníka ZŠ – 34 žiakov. Experimentálnu skupinu tvorili 4 triedy a to 2 triedy 4. ročníka ZŠ – 37 žiakov a 2 triedy 5. ročníka ZŠ – 35 žiakov. Do výsledného vyhodnotenia sme však zaradili len tých žiakov, ktorí sa zúčastnili pretestu aj posttestu.

Na štatistické overenie hypotézy H1 sme si zvolili testy zamerané na priestorovú predstavivosť, ktoré sme zadali žiakom kontrolnej aj experimentálnej skupiny na začiatku experimentu a aj na záver experimentu. Aby sme predišli tomu, že si žiaci zapamätajú odpovede z predchádzajúceho testu – pretestu v úlohách, ktoré sú totožné s úlohami

z posttestu, v postteste sme zamenili poradie odpovedí alebo sme pozmenili zadanie. Do posttestu sme zaradili o dve úlohy navyiac. Je nutné poznamenať, že v rámci experimentu sme so žiakmi nediskutovali o výsledkoch pretestu a aktivity, ktoré boli so žiakmi vykonávané na hodinách, boli iného typu.

Na štatistickú verifikáciu hypotézy H2 sme si zvolili test z geometrie, ktorý dostali žiaci experimentálnej a kontrolnej skupiny po prebratí tematického celku Obsah a obvod obdĺžnika a štvorca v 6. ročníku ZŠ.

Na verifikáciu hypotéz sme použili F-test na zistenie rozptylov medzi jednotlivými skupinami. T-test pre rovnaké rozptyly a pre rôzne rozptyly sme využili pri porovnaní medzi kontrolnou a experimentálnou skupinou v závislosti na výsledkoch F-testu. Párový T-test sme využili na overenie posunu v rámci každej skupiny zvlášť, teda na porovnanie medzi skóre pretestu a posttestu.

#### 4. Experiment

Experiment prebiehal na hodinách matematiky. Na začiatku experimentu všetkým skupinám bol zadaný pretest. Aktivity v rámci experimentu boli zamerané na manuálnu manipuláciu s geometrickými útvarmi. V tabuľke 4.1 uvádzame, koľko vyučovacích hodín bolo odučených v experimentálnych triedach s jednotlivými pomôckami.

pomôcka	4.A	4.B	5.A	5.B
tangram	7	7	16	16
plastelína a špajle	2	4	11	11
SOMA kocka	2	3	3	3
spolu	11	14	30	30

tabuľka 4.1

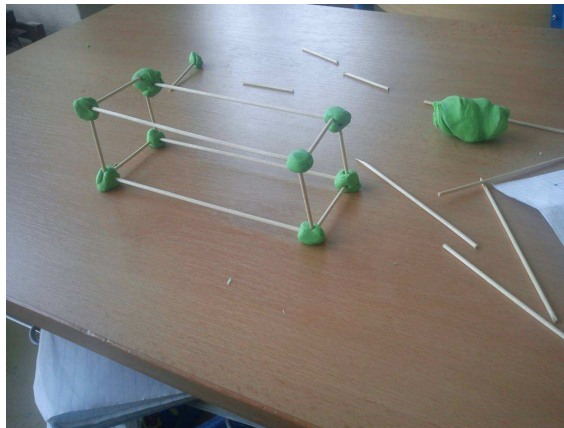
V rámci experimentu sme odučili 53 hodín a keďže naša práca má mať aplikačný charakter, niektoré hodiny sme nechali realizovať učiteľky v našej prítomnosti a niekoľko hodín pani učiteľky absolvovali bez nás, pričom sme im predtým dali zadania úloh a neskôr sme s nimi rozdiskutovali priebeh hodiny, ako sa im pracovalo s pomôckami a podobne. V 4. A to bola 1 hodina, v 4.B 3 hodiny a v 5.A a 5.B 14 vyučovacích hodín.

Počas jednotlivých vyučovacích hodín sme sa zamerali na preberanie učiva, ktoré zodpovedalo tematickým plánom v rámci jednotlivých ročníkov, napríklad obvod geometrických útvarov, propedeutika k obsahu obdĺžnika, štvorca či trojuholníka, základné vlastnosti geometrických útvarov. Vo všetkých aktivitách bolo dôležité, aby každý žiak získaval svoje vlastné skúsenosti, teda každý žiak pracoval individuálne. Počas hodín žiaci aktívne pracovali s geometrickými útvarmi, to znamená otáčali tieto útvary do rôznych polôh,



vytvárali stavby z kociek, kreslili plány stavieb kociek z rôznych pohľadov, tvorili rôzne telesá. Týmito aktivitami sme sa snažili podporiť etapu vizualizácie. V rámci hodín sme so žiakmi triedili geometrické útvary na základe ich vlastností, skúmali sme vlastnosti týchto útvarov a snažili sme sa so žiakmi dospieť k určitým všeobecným vlastnostiam geometrických útvarov, teda žiakov sme priviedli na úroveň analýzy (úroveň geometrického myslenia).

Uvedieme aspoň jeden príklad z aktivít, ktoré sme so žiakmi realizovali počas hodín. Žiaci mali zostrojiť kváder pomocou špajlí a plastelíny. Žiaci vedeli, ako vyzerá kváder, teda dokázali ho vizuálne identifikovať avšak s jeho zostrojením mali problémy. Určili, koľko guľôčok plastelíny majú na zostrojenie použiť, ale nedokázali pokračovať v zostrojení ďalej. Náčrt kvádra na tabuľu nepomohol. Pomohla až otázka: „Aký tvar majú jednotlivé steny kvádra?“ Žiaci správne odpovedali: „obdĺžnik“. Vtedy si uvedomili, že musia začať s obdĺžnikovou podstavou. Teda najprv zostrojili obdĺžnik a potom postupne dobudovali kváder - obrázok 4.1.

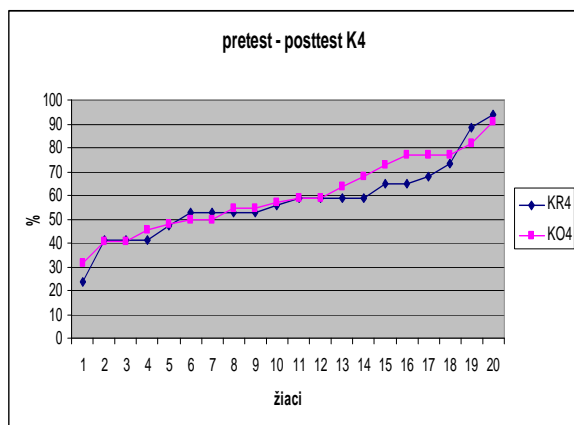


obrázok 4.1

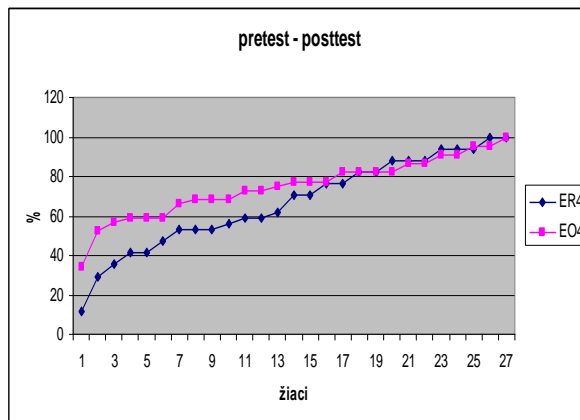
Ako vidíme aj na tejto úlohe, hoci žiaci majú formálne poznatky o geometrickom útvere, ešte to neznamená, že si dokážu aj predstaviť, čo všetko v skutočnosti tieto vedomosti znamenajú. Teda formálne poznatky nie sú prepojené so skutočným uplatnením v praxi.

## 5. Výsledky výskumu

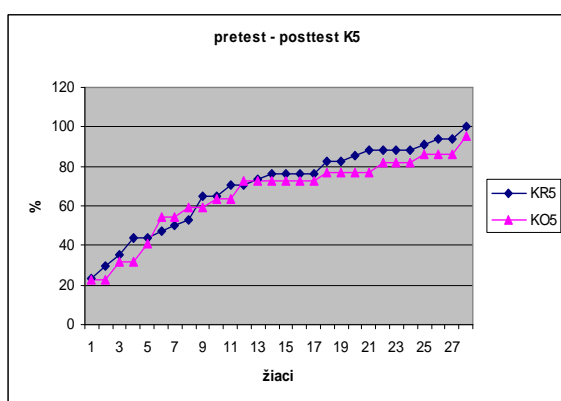
Zo štatistického vyhodnotenia pretestu a posttestu vyplynulo, že u žiakov experimentálnej skupiny nastalo lepšie rozvíjanie priestorovej predstavivosti ako u žiakov kontrolnej skupiny systematickým rozvíjaním priestorovej predstavivosti získavaním skúseností v oblasti jemnej motoriky a psychomotorických zručností.



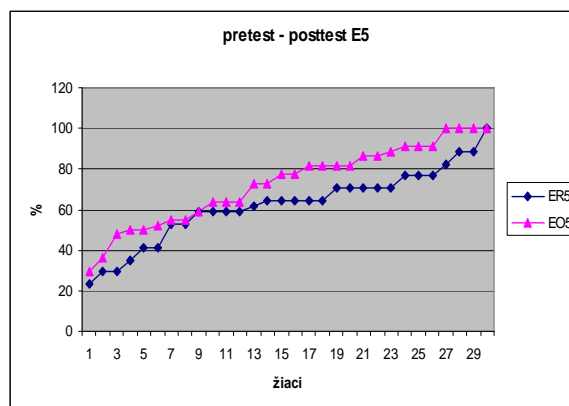
graf 5.1



graf 5.2



graf 5.3



graf 5.4

Zoradením žiakov vzostupne podľa dosiahnutého skóre (grafy 5.1 a 5.2 pre 4. ročník a grafy 5.3 a 5.4 pre 5. ročník) vidíme z porovnania výsledkov pretestu a posttestu, že žiaci experimentálnej skupiny v oboch ročníkoch dosiahli výraznejší posun ako žiaci kontrolnej skupiny. Z grafov 5.1 a 5.2 vyplýva, že pri kontrolnej skupine 4. ročníka (K4) veľká časť krivky KR4 predstavujúca výsledky pretestu sa prekrýva s krivkou KO4 predstavujúcou výsledky posttestu, zatiaľ čo u experimentálnej skupiny (E4) je krivka predstavujúca výsledky posttestu nad krivkou predstavujúcou výsledky pretestu. Z grafov 5.3 a 5.4 vyplýva, že väčšia časť krivky KO5 je pod krivkou KR5, čo znamená, že u väčšiny žiakov na zodpovedajúcej úrovni nastalo zhoršenie výsledkov. Pri experimentálnej skupine 5. ročníka (E5) je krivka posttestu (EO5) nad krivkou pretestu (ER5) čo znamená, že u všetkých žiakov, ktorí sú na zodpovedajúcej úrovni, sme zaznamenali zlepšenie výsledkov.

V dizertačnej práci je uvedené v kapitole 5.8.1 podrobné štatistické vyhodnotenie výsledkov výskumu pri overení hypotézy H1. Zaznamenali sme zlepšenie experimentálnej

skupiny E4 o 7,78% na hladine významnosti 0,05 a u experimentálnej skupiny E5 o 10,62% na hladine významnosti 0,049.

K najvýraznejšiemu nárastu došlo v experimentálnej skupine v 5. ročníku, ale je to pravdepodobne spôsobené vyšším počtom hodín strávených manipuláciou s pomôckami ako v 4. ročníku ZŠ. Z testov vyplynulo, že žiaci kontrolnej skupiny si počas niekoľkých mesiacov len málo alebo skoro vôbec nerozvinuli priestorovú predstavivosť. Ukázalo sa to na výsledkoch kontrolnej skupiny porovnaním výsledkov pretestu a posttestu. Ukazuje sa, že etapa vizualizácie má veľký vplyv na rozvíjanie priestorovej predstavivosti u žiakov a práve táto etapa je v našom školskom systéme zanedbávaná.

Z vyhodnotenia hypotézy H2 vyplynulo, že žiaci experimentálnej skupiny dokázali lepšie riešiť úlohy z geometrie ako žiaci kontrolnej skupiny a to i napriek tomu, že vyučovanie tohto tematického celku prebehlo u obidvoch tried vyučovaním z učebnice a čas, ktorý uplynul od experimentu po zadaní posttestu v experimentálnej triede bol viac ako 6 mesiacov.

Ukázalo sa, že v testoch experimentálnej skupiny sa prejavila väčšia rôznorodosť riešení neštandardných úloh, hoci sa žiaci s nimi predtým nestretli ani v experimentálnej a ani v kontrolnej skupine. Žiaci, ktorí sú vedení nachádzať rôzne spôsoby riešenia úloh a sú aj schopní takéto riešenia vytvárať, majú väčšie predpoklady na zlepšenie učebných výsledkov ako žiaci, ktorí len opakujú nacvičené postupy. V dizertačnej práci v kapitole 5.8.2 sú uvedené podrobné výsledky štatistickej verifikácie hypotézy H2. Hypotézu H2 sme potvrdili na hladine významnosti 0,12.

Na základe uvedených výsledkov môžeme považovať hypotézy H1 a H2 za overené.

Z výskumu vyplýva, že žiaci manipuláciou s geometrickými útvarmi a zlepšovaním psychomotorických zručností si dokážu lepšie rozvíjať priestorovú predstavivosť. V rámci jednotlivých vyučovacích hodín sme spozorovali, že žiaci sa posunuli z 1. úrovne vizualizácie geometrického myslenia na 2. úroveň: analýzy respektíve niektorí až na 3. úroveň: neformálnej dedukcie. Žiaci dokázali na základnej úrovni pochopiť rozdiel medzi priestorovými a rovinnými útvarmi, napríklad pri diskusii, či je sklo v okne kváder alebo štvorec, väčšina sa priklonila k tvaru kváder, pretože má tri rozmery. Teda svoje odpovede dokázali aj zdôvodniť. Žiaci boli zároveň motivovaní k riešeniu úloh používaním rôznych pomôcok, ktoré boli pre nich nenáročné na manipuláciu, avšak žiaci tieto aktivity nevnímali len ako hru, ale ako vyplýva z dotazníkového prieskumu zároveň aj ako učenie.

Ukázalo sa, že pre učiteľov sú takéto aktivity zaujímavé, pretože sme videli počas jednotlivých vyučovacích hodín snahu zapájať sa do hodnotenia jednotlivých aktivít či pomáhania žiakom. S postupom času učiteľky v jednotlivých triedach realizovali samostatne

vyučovanie takouto formou, čo je veľkým pozitívom, pretože učiteľ je ten, čo prináša aktivity na hodiny.

Vyhodnotenie jednotlivých úloh v rámci pretestu a posttestu ukázalo, že žiaci najúspešnejšie zvládajú úlohy zamerané na vizualizáciu, úlohy zamerané na mentálnu manipuláciu sú pre nich najťažšie.

Z dotazníkového prieskumu vyplynulo, že aktivity na hodinách boli pre žiakov zaujímavé, ale nepovažovali ich len za hru, ale aj za učenie sa o geometrických útvaroch a ich vlastnostiach.

Jedným z našich cieľov bolo zostaviť zbierku úloh s metodickým materiálom umožňujúcu učiteľom matematiky rozvíjať priestorovú predstavivosť v dlhodobejšom horizonte. Zbierka úloh obsahuje 11 tém, v ktorých sú zahrnuté aktivity zamerané na rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Metodický materiál obsahuje podrobný návod pre učiteľa ako pracovať s jednotlivými pomôckami tak, aby dokázal učiteľ s nimi rozvíjať priestorovú predstavivosť, ale aj plniť výchovno – vzdelávacie ciele uvedené v učebných osnovách predmetu matematika. V zbierke sú uvedené aj rozšírené aktivity, ktoré môže učiteľ využiť na medzipredmetové prepojenie alebo na rôzne formy projektov. V závere zbierky sme pre učiteľov uviedli jednu vzorovú hodinu, podľa ktorej si učelia môžu napláňovať jednotlivé aktivity.

## **6. Výsledky práce a ich význam**

Škola ako inštitúcia má prvoradý cieľ a to vzdelávať a vychovávať. Formuje u žiakov osobnosť, vplýva na postoje žiakov, poskytuje im základné informácie o svete. Učiteľ má možnosť ovplyvniť postoj žiakov k škole ako inštitúcii, ako aj k predmetu, ktorý vyučuje. Úloha učiteľa však nie je jednoduchá, pretože nezahŕňa v sebe len pôsobenie na vyučovacích hodinách, ale aj iné aktivity, napríklad triednictvo, oprava písomných prác a podobne. Nie je ľahké vymýšľať nové aktivity na hodinách a preto častokrát učiteľ sklzáne do istej rutiny. V prípade, že sa dostane do rúk učiteľa aj nová didaktická pomôcka, nie je k tomu dostatočný návod ako ju začleniť do vyučovacej hodiny tak, aby pomocou nej mohli napĺňať výchovnovzdelávacie ciele.

Zostavením zbierky úloh, ktoré pomáhajú rozvíjať priestorovú predstavivosť prostredníctvom didaktických pomôcok, sme sa snažili pomôcť učiteľom v tomto smere. Preskúmali sme aj účinnosť úloh na priestorovú predstavivosť žiakov a ich učebné výsledky. Splnili sme tým cieľ dizertačnej práce.

### *Prínos pre pedagogickú teóriu:*

1. Experimentálne overenie vhodnosti didaktických pomôcok na rozvíjanie priestorovej predstavivosti.
2. Vypracovanie spôsobu práce žiakov s pomôckami, ktorý je charakterizovaný v rámci metodických poznámok. Učiteľ môže týmto spôsobom zároveň získať aj návod, ako začleniť nové pomôcky do vyučovania matematiky a urobiť z nich týmto spôsobom didaktické pomôcky.
3. Motivácia učiteľov k začleneniu didaktických pomôcok k systematickému rozvíjaniu priestorovej predstavivosti do vyučovania matematiky priebežne počas školského roku.
4. Experimentálne overenie, ako môžu učitelia cieľavedomým rozvíjaním priestorovej predstavivosti na hodinách matematiky vplývať aj na zlepšenie učebných výsledkov žiakov.
5. Výber vhodného nástroja na testovanie priestorovej predstavivosti využiteľný pre zvolenú vekovú kategóriu 10 – 12 rokov.

### *Prínos pre pedagogickú prax:*

1. Využitie postupu, ktorý sme aplikovali v rámci experimentu a pokračovanie v ňom.
2. Zbierka súboru úloh a didaktických materiálov, ktorá bude k dispozícii učiteľom aj s metodickými poznámkami a riešeniami jednotlivých úloh.
3. Výsledky dizertačnej práce budú publikované a dané k dispozícii širokej učiteľskej verejnosti jednak v rámci odborných seminárov a konferencií ako aj odborných časopisov či internetu.

## **Záver**

Priestorová predstavivosť je dôležitou schopnosťou pre život človeka. Keďže to nie je vrodená schopnosť, ale je to schopnosť, ktorú môžeme rozvíjať, je potrebné sa zamyslieť nad jej miestom vo vyučovacom procese.

Ako vyplynulo z výsledkov výskumu spoliehať sa len na pozvoľné získavanie skúseností (stavebnice, hry s rodičmi a pod.) v oblasti rozvíjania priestorovej predstavivosti nestačí. Je potrebné systematické rozvíjanie tejto schopnosti už od začiatku školskej dochádzky. Aby sme implementovali úlohy zahrňajúce v sebe rozvíjanie priestorovej predstavivosti do vyučovacieho procesu, je potrebné aktivizovať v tomto smere učiteľov. Ako sa potvrdilo aj v našom výskume, pokiaľ učitelia vidia v aktivitách naplnenie výchovno-vzdelávacích cieľov, potom sú ochotní tieto aktivity zaradiť do vyučovacieho procesu aj v dlhodobejšom horizonte.

Získané výsledky nám ponúkajú ďalšie námety na prácu v oblasti rozvíjania priestorovej predstavivosti vo vyučovaní matematiky. Bolo by vhodné aktivity rozvíjajúce priestorovú predstavivosť zaradiť aj do vyšších ročníkov sekundárneho vzdelávania respektíve rozšíriť.

### **Zoznam publikovaných prác predkladateľa**

- Borsseau, G. - Trenčanský, I. - Čerňanová, V. - Blunárová, J. - Tisoň, M. - Židová, D. - Folčan, M. - Gazdová, Z. - Kaňuková, K. - Bestrová, M. - Mikóczyová, D. - Neuhold, E. - Koutná, J. - Gabajová, M. - Junková, J. - Pračková, K. - Porkertová, M. - Zábojníková, E. 2011. *Základy a metódy didaktiky matematiky : výskumné ciele didaktiky matematiky, didaktické javy a základy modelovania* : voľný preklad časti 1. kapitoly z knihy *Théorie des situations didactiques*. - 1. vyd. - Bratislava : FMFI UK, 2011. - 43 s. ISBN 978-80-89186-91-4
- Gabajová, M. 2011. *Rozpoznávanie geometrických údajov*. In: Zborník 9 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky. - Bratislava : Knížničné a edičné centrum FMFI UK, 2011. - S. 33-44. - ISBN 978-80-89186-82-2
- Gabajová, M. 2010. *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti*. In: Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2010 : Zborník príspevkov. - Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2010. - S. 370-377. - ISBN 978-80-89186-68-6
- Gabajová, M. 2011. *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti na základnej škole*. In: Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2011 : Zborník príspevkov. - Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2011. - S. 392-395. - ISBN 978-80-89186-87-7
- Gabajová, M. 2011. *Učebné štýly a vyučovanie geometrie u mladších žiakov*. In: *Acta Mathematica* 14. - Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011. - S. 89-94. - ISBN 978-80-8094-958-7. - (Prírodovedec ; č. 476)
- Gabajová, M. - Vankúš, P. 2011. *Učebné pomôcky vo vyučovaní stereometrie* [elektronický dokument]. In: *Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky (CD ROM)*. - Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. - S. 14-18. - ISBN 978-80-558-0047-9. - (Prírodovedec ; č. 492) [Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky. Nitra, 4.11.2011]

## ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- Brincková, J. 1996. *Didaktická hra v geometrii*. Bratislava: Dony, 1996. ISBN 80-85415-83-6.
- Del Grande, J. – Morrow, L. 1993. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics: Addenda series, grades K-6, geometry and spatial sense*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1993
- Dostál, J. 2007. *Učební pomůcky a uplatňování zásady názornosti v moderním vzdělávání*. In: International Colloquium on the Management of Educational Process, Brno: UO, 2007. ISBN 978-80-7231-228-3.
- Gabajová, M. 2011. *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti na základnej škole*. In: Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava 2011 : Zborník príspevkov. - Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2011. ISBN 978-80-89186-87-7.
- Gardner, H. 1999. *Dimenze myšlení: teorie rozmanitých inteligencií*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3
- Grüßing, M. 2002. *Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34 (2), 2002, s. 37-45.
- Hejný, M. a kol. 1990. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990. ISBN 80-08-01344-3.
- Chráška, M. 2007. *Metody pedagogického výskumu: Základy kvantitatívneho výskumu*. Praha: Grada Publishing a.s., 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.
- ISCED 1. 2009. *Štátny vzdelávací program, Matematika, Príloha ISCED 1*. Bratislava: ŠPÚ, 2009.
- ISCED 2. 2010. *Štátny vzdelávací program, Matematika, Príloha ISCED 2*. Bratislava: ŠPÚ, 2010.
- Jelemenská, P. – Ďurďovičová, E. 2008. *Zbierka z uvoľnených úloh medzinárodných meraní TIMSS Matematika a prírodoveda pre základnej školy*. Bratislava: ŠPÚ, 2008. ISBN 978-80-89225-43-9.
- Jelemenská, P. 2010. *Výkony žiakov 4. ročníka základnej školy v matematike a v prírodovedných predmetoch: Národná správa z merania TIMSS 2007*. Bratislava: ŠPÚ, 2010. ISBN 978-80-89225-44-6.
- Jirotková, D. 1990. *Rozvoj priestorové predstavivosti žiakov*. In *Komenský 114*, 5, s. 278 – 281, 1990
- Kennedy, J.M. 1974. *A Psychology of Picture Perception: Images and Information*. San Francisco: Jossey-Bass, 1974.
- Kerlinger, F.N. 1972. *Základy výskumu chování: Pedagogický a psychologický výzkum*. Praha: ACADEMIA, nakladatelství ČSAV, 1972.
- Komárik, E. 2002. *Metódy vedeckého poznávania človeka*, Bratislava: Polygrafické stredisko UK, 2002. ISBN 80-223-1717-9.
- Kubáček, Z. a kol. 2004: *PISA 2003, Matematická gramotnosť, Správa*. Bratislava: SPU, 2004. ISBN 80-85756-88-9.
- Kujal, B. a kol. 1967. *Pedagogický slovník, 2. diel*. Praha: SPN, 1967, s.533.

- Kuřina, F. 1987. *Geometrická představivost a vyučování stereometrie*. In: Matematika a fyzika ve škole, č.3. Praha: 1987. s. 201 – 212.
- Litter, G. – Jirotková, D. 2004. *Learning about Solids*, In F.K. Lester et al (Eds), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics, 2004 Goteborg University, Sweden
- Molnár, J. 2004. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty, 2004. ISBN 80-244-0927-5.
- Moore Luchin B. 2006. *Geometry, patterns and Process: Making the TAKS connection*, Numbers Mathematics Professional Development, 2006
- Ostatníková, D. a kol. 1996. *Vplyv testosterónu na plošno-priestorovú predstavivosť detí predpubertálneho veku*. In: Studia Psychologica, Vol. 38, 1996
- Perný, J. 2005. *Zobrazování těles a rozvíjení představivosti*. In: Zborník príspevkov z konferencie Induktívne a deduktívne prístupy v matematike, TU Trnava, 2005.
- Perný, J. 2009. *Niektoré faktory ovplyvňujúce priestorovú predstavivosť žiakov*. In Zborník Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, 2009. ISBN 978-80-8083-742-6.
- Piaget, J. 1970. *Psychologie intelligence*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970.
- Piaget, J. – Inhelder, B. 1993. *Psychológia dieťaťa*. Bratislava: SOFA, 1993. ISBN 80-85752-33-6.
- Půlpán, Z. – Kuřina, F. – Kebza, V. 1992. *O představivosti a její role v matematice*, Praha: Academia, 1992. ISBN 80-200-0444-0.
- Repáš, V. a kol. 1989. *Úlohy z matematických olympiád na základnej škole*. Bratislava: SPN, 1989. ISBN 88-08-00063-5.
- Ruisel, I. 2004. *Inteligencia a myslenie*. Bratislava: IKAR, 2004. ISBN 80-551-0766-1.
- Rybár, J. 1997. *Úvod do epistemológie Jeana Piageta*. Bratislava: IRIS, 1997. ISBN 80-88778-43-3.
- Saracho, O. – Spodek, B. 2008. *Contemporary Perspectives on Mathematics in Early Childhood Education*. In: Contemporary perspectives in early childhood education, Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing, 2008. ISBN 978-1-59311-637-8.
- Siposová, J. 2009. *Vyhodnotenie účinnosti tangramu ako nástroja na rozvíjanie priestorovej predstavivosti v matematike na 1. stupni ZŠ v rámci pedagogického výskumu*, Vo(13), č.1, In: Technológia vzdelávania, 2009. ISSN 1338-1202.
- Sterneberg, R.J. 2009. *Kognitivní psychologie*. Praha: Portál s.r.o., 2009. ISBN 978-80-7367-638-4.
- Szobiová, E. 1999. *Tvorivosť. Od záhady k poznaniu*. Bratislava: Stimul, 1999, ISBN 80-88982-05-7
- Swoboda, E. – Gunčaga, J. 2009. *Child and Mathematics. Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*. University of Rzeszów, Rzeszów, 2009. ISBN 978-83-7338-473-6.
- Turek, I. 2005. *Inovácie v didaktike*. Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, 2005. ISBN 80-8052-230-8.



- Uherčíková, V. – Haverlík, I. 2007: *Didaktika rozvíjania základných matematických predstáv*. Bratislava: DONY, 2007. ISBN 978-80-968087-4-8 .
- Ulovec, A. a kol. 2009. *Motivating and Exciting Methods in Mathematics and Science, Case Studies*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2009. ISBN 978-80-244-2334-0.
- Ušiaková, V. 2002. *Rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou SOMA kocky*. Bratislava: Metodické centrum mesta Bratislavy, 2002. ISBN 80-7164-337-8.
- Van Hiele, P. 1986. *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*. Orlando, Fla: Academic Press, 1986.
- Zelina, M. 1995. *Výchova k tvorivej osobnosti*. Bratislava: PdF UK, 1995.
- Žabka, J. – Černek, P. 2010. *Matematika pre 6. ročník. 2 diel*. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2010.

### Internetové zdroje

- Lohman, D.F. 1993. *Spatial ability and G*. [online] Spearman Seminar, University of Plymouth, 21. júl, 1993. [cit. 2012-01-10] Dostupné na internete: [http://faculty.education.uiowa.edu/dlohman/pdf/Spatial\\_Ability\\_and\\_G.pdf](http://faculty.education.uiowa.edu/dlohman/pdf/Spatial_Ability_and_G.pdf)
- Gavora, P. a kol. 2010. *Elektronická učebnica pedagogického výskumu*. [online]. Bratislava : Univerzita Komenského, 2010. [cit. 2011-04-22] Dostupné na: <http://www.e-metodologia.fedu.uniba.sk/> ISBN 978-80-223-2951-4
- National Research Council. 2006. *Learning to Think Spatially*. [online] Washington, D.C.: National Academies Press, 2006. [cit. 2011-01-15] Dostupné na internete: [http://www.nap.edu/openbook.php?record\\_id=11019&page=12#p2000e16c9970012001](http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=11019&page=12#p2000e16c9970012001)
- TIMSS. 2007. *Dotazník pre žiaka*. [online] Bratislava: ŠPÚ, 2007. [cit. 2011-03-30] Dostupné na internete: [http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne\\_merania/timss/vyskumne\\_nastroje/ziacky\\_dotazn%C3%ADk.pdf](http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/vyskumne_nastroje/ziacky_dotazn%C3%ADk.pdf)
- Van Hiele, P. 1999. *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*. [online] Teaching Children Mathematics no.6, National Council of Teacher of Mathematics, s. 310-316, 1999. [cit. 2011-02-10] Dostupné na internete: [www.nctm.org](http://www.nctm.org)
- Žuchová, S.: *Ako sa cítiš a na čo myslíš?*. [online] In: Anthropos, 2009 . [ cit. 2011-02-10] Dostupné na internete: <http://www.magazinos.sk/Anthropos/Archiv/Telo/Studia/Ako-sa-citis-a-na-co-myslis>

## Summary

In our work we deal with developing of spatial sense in the teaching of mathematics. We have focused on the set of the tasks, which effectively and systematically develop of spatial sense during the mathematics lessons. We aimed our attention at the 10-12 years old students because this is one of the best age period for development of spatial sense. To achieve our goal we involved in the project tasks that required application of a special tool: tangram, SOMA cube, play dough and skewers. Each task had two goals: educational one and the goal focused on developing of spatial sense.

This paper describes the experiment during the mathematics lessons, important facts that occurred during experiment as well as the teachers' opinion on each activity.

The work shows that 11 lessons in 4th grade of elementary school focusing on manipulation of solid were enough to improve spatial imagination. In 5th grade of elementary school, with even more activities the change was more significant.

Main outcome of the work is set of task with the guidelines for teachers to help them effectively and quickly to develop spatial imagination in the teaching of mathematics.