

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

**DOTT. BENEDETTO DI PAOLA**

**FROM COMMON LANGUAGE TO ALGEBRAIC LANGUAGE  
AND ALGEBRAIC PROVING IN THE TRANSITION  
FROM ARITHMETIC THOUGHT TO ALGEBRAIC THOUGHT:  
COMPARISON BETWEEN CHINA AND ITALY**

**AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE**

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*  
vo vednom odbore 9.1.8. Teória vyučovania matematiky

Bratislava, 2012

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Predkladateľ: Dott. Benedetto Di Paola  
Department of Mathematics and informatics  
University of Palermo  
Via Archirafi, 34  
90 123 Palermo, Italy

Školiteľ: Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.  
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského, Mlynská dolina  
842 48 Bratislava

Oponenti: Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.  
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied  
Univerzita Mateja Bela  
Tajovského 40  
974 01 Banská Bystrica

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky  
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy  
ul. M. D. Rettigové 4  
116 39 Praha 1  
Česká Republika

Doc. RNDr. Ivan Trenčanský, CSc.  
Blagoeova 22  
851 03 Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný dňa .....

Obhajoba dizertačnej práca sa koná ..... 2012 o ..... hodine pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ..... 2012 vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave v Matematickom pavilóne, č. ....

Predseda odborovej komisie:  
Prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc.  
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
842 48 Bratislava

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

**DOCT. BENEDETTO DI PAOLA**

**FROM COMMON LANGUAGE TO ALGEBRAIC LANGUAGE  
AND ALGEBRAIC PROVING IN THE TRANSITION  
FROM ARITHMETIC THOUGHT TO ALGEBRAIC THOUGHT:  
COMPARISON BETWEEN CHINA AND ITALY**

**AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE**

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*  
vo vednom odbore 9.1.8. Teória vyučovania matematiky

Bratislava, 2012

## OBSAH AUTOREFERÁTU

ÚVOD .....	3
1. VŠEOBECNÝ RÁMEC: CIEĽ DIZERTÁCIE A HYPOTÉZY VÝSKUMU .....	4
2. POTENCIÁLNE SÚVISLOSTI ČÍNSKEHO JAZYKA A HYPOTÉZY VÝSKUMU ....	6
3. SÚČASNÝ STAV RIEŠENIA PROBLEMATIKY .....	8
4. EXPERIMENTÁLNY VÝSKUM: METÓDY A VÝSLEDKY .....	11
5. ZÁVERY .....	15
ZOZNAM PRÁC UCHÁDZAČA .....	16
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY .....	18
ANNOTATION .....	24

## ÚVOD

Základnou témou dizertácie je sledovanie kognitívnych procesov vo vyučovaní matematiky na nižšom stupni sekundárnej školy vo fáze prechodu od vyučovania aritmetiky k vyučovaniu algebr. V tomto sledovaní založenom na všeobecne akceptovaných zásadách výskumu v didaktike je cieľom prehĺbenie poznania o zákonitostiach, ktorými sa riadi utváranie algebrického myslenia v prechodovej fáze od dominancie aritmetického myslenia. Výskum realizovaný v hraniciach paradigmy *experimentálnej epistemológie* venoval ústrednú pozornosť javom vyučovania a osvojovania základných pojmov algebr a myšlienkových procesov príznačných pre utváranie algebrického myslenia v rámci všeobecnej schémy „didaktického trojuholníka“.

Ako ukázali výskumy mnohých autorov priebežne citovaných v dizertácii, myšlienkové procesy, podstatným spôsobom ovplyvňujúce tvorbu algebrického myslenia, sú hlboko zakotvené v psychologicko-neurofyziologických mechanizmoch osvojovania prirodzeného materinského jazyka. Tieto mechanizmy sú podstatne rozdielne v kultúre Západu a v kultúre východných civilizácií, ktorých jazyk je v písomnej podobe zaznamenávaný ideografickým spôsobom čínsko-japonského typu. V týchto kultúrach, v ktorých osvojovanie prirodzeného jazyka je založené na triáde *znak (komplex znakov) – fonetická podoba – význam (obsah)*, sa v procese výučby prirodzeného jazyka vytvára návyk pevnej väzby medzi uvedenými tromi zložkami triády. Tento návyk je svojou formálnou aj logickou štruktúrou blízky k ovládaniu algebrickej symboliky reprezentovanej triádou *symbol – slovné vyjadrenie – význam*; toto osvojenie „abecedy“ algebr je nevyhnutným predpokladom úspešného budovania algebrických kompetencií.

Vychádzajúc z doteraz známych poznatkov o úlohe socio-etnického prostredia v školskom vzdelávaní a o vplyve tohto zázemia na výsledky vzdelávania v matematike bolo realizovaných niekoľko experimentálnych akcií v prostredí tried s talianskymi a čínskymi žiakmi na niekoľkých školách rôzneho stupňa a typu v Palerme s cieľom získať hlbší a podrobnejší obraz o prejavoch schopností utvárania algebrického myslenia na báze rozdielov spôsobených predchádzajúcim rozdielnym štýlom osvojovania jazyka (a ďalších oblastí poznania) v odlišných kultúrnych prostrediach.

V praktickej línii výskum postupoval v duchu Brousseauovej *Teórie didaktických situácií*, rozvinutej značným počtom ďalších autorov, z ktorých bol tematikou a metódami v popredí F. Spagnolo. Didaktické a najmä a-didaktické situácie boli posudzované a vyhodnocované

kvalitatívnymi a kvantitatívnymi metódami francúzskej školy didaktiky matematiky, sústredenej okolo G. Brousseaua ako ústrednej osobnosti tejto školy. Hlavným zámerom výskumu bolo zistenie partikulárnych výhod a nedostatkov pri osvojovaní novej matematickej (algebraickej) tematiky v závislosti od nadobudnutej socio-kultúrnej úrovne žiakov v odlišných etnických prostrediach. Nejaké pokusy o zovšeobecňujúce závery ohľadom dvoch rozdielnych kultúr – čínskej ako reprezentantky Východu a talianskej ako reprezentantky Západu – stáli mimo záujmu dizertácie.

## **1. VŠEOBEECNÝ RÁMEC: CIEĽ A HYPOTÉZY VÝSKUMU**

Hlavným rámcom teoretickej i experimentálnej zložky dizertácie je experimentálna epistemológia matematiky v zmysle Spagnola (2010). Základné tézy tejto koncepcie sú nasledovné:

- Experimentálne javy súvisiace s odhaľovaním možností štúdia kognitívnych procesov u študentov a správania študentov v triede sú mimoriadne zložité a vyžadujú špeciálne diferencované prístupy a hľadiská, ktoré umožňujú učiteľom a výskumníkom sledovať dynamiku diania v triedach a nehodnotiť len výsledky riešenia úloh študentmi.
- Výskum neberie do úvahy len teoretický prístup k didaktickým problémom vyskytujúcim sa v triede, ale skúma aj experimentálne akcie prebiehajúce v triede počas riešenia problémov.
- Obe zložky realizácie experimentu – teoretickú aj experimentálnu – výskumník sleduje v ich dialektickej jednote a protikladnosti s dôrazom na proces prekonávania a protirečení (v zmysle Hegelovej dialektiky).

V duchu týchto téz sú skúmané a zisťované rozdiely a podobnosti v konaní a výkonoch čínskych a talianskych študentov. Plné chápanie týchto vzťahov predpokladá hlboké a mnohostranné štúdium mnohých určujúcich atribútov kultúr, ktorých predstaviteľmi v didaktickom výskume sú žiaci/študenti uvedených krajín. Dôležitými zložkami komplexov, skúmaných na oboch stranách sú prirodzený jazyk, história matematiky, epistemológia matematiky, neurofyziológia, psychologicko-pedagogické disciplíny atď. Z podstatných rozdielov medzi západnou a východnou kultúrou v tejto oblasti treba uviesť v západnej kultúre aristotelovskú logiku a na nej založené pravidlá argumentácie, odvodzovania, dokazovania, tvorby hypotéz atď., a ako protipól v kultúre Východu používanie metapravidiel, algoritmicke myslenie, hľadanie analógií ap. Značné rozdiely sú zreteľné aj v systémoch základných kompetencií, ktoré sa historicky ustálili v oboch kultúrnych

oblastiach. To sťažuje porovnávanie kultúr vychádzajúcich z odlišných základných princípov existenčnej povahy. Tieto rozdiely sa špecifickým spôsobom transformujú do didaktickej oblasti, kde v multikultúrnom zmiešanom školskom prostredí sú zákonite zdrojom odlišností v percepcii aj v osvojovaní poznatkov. To kladie osobitné nároky na prácu učiteľa, ktorý by v príprave na vyučovanie mal mať zakomponované výsledky experimentálnych výskumov realizovaných v takomto prostredí. Mnohé z týchto výskumov majú charakter predvýskumu, ktorý vyžaduje pokračovanie ďalším zacieleným výskumom na báze hypotéz sformulovaných na záver predvýskumu.

Hlavné hypotézy:

***H0: Rozdiely a podobnosti v histórii východných kultúr a dedičstva Západu majú ekvivalent aj v rozdieloch a podobnostiach medzi spôsobmi zdôvodňovania pozorovanými v dnešnom procese vyučovania/učenia sa matematiky.***

***H1. Rozdiely a analógie existujúce v talianskych a čínskych kultúrnych tradíciách sú zistiteľné aj v analýze argumentačných schém, ktoré možno odhaliť v situáciách vyučovania/osvojovania algebry a všeobecne matematiky.***

***H2: Pri absencii formalizovaného algebrického kontextu:***

- ***(H2 – 1): Stratégie riešenia úloh aritmetického a/alebo prealgebrického typu sú u čínskych žiakov/študentov zamerané na hľadanie základných a definitívnych algoritmov založených na rekurzívnom analogickom myslení a u talianskych žiakov/študentov na deduktívnom odôvodňovaní.***
- ***(H2 – 2): Pri absencii náležitého ovládania jazyka algebry prevažujú stratégie riešenia založené na metóde pokus – omyl vyjadrené v prirodzenom a/alebo aritmetickom jazyku.***
- ***(H2 – 3): Vo fáze zovšeobecňovania sa čínski žiaci uchylujú k „variačnému“ odôvodňovaniu, ktoré ich privádza k definícii abstraktného jazyka (ktorý však stráca svoj význam pri vytrhnutí z konkrétneho kontextu). U talianskych žiakov sa proces zovšeobecnenia utvára argumentáciou, tvorbou hypotéz a dokazovaním v duchu deduktívnej logiky.***
- ***(H – 4): V situácii/úlohe zadanej v jazyku registra vizuálneho typu sa študenti usilujú na uľahčenie riešenia spojiť rôzne aspekty „veci, ktorá sa mení“, t. j. premennej v postavení neznámej alebo premennej v relačno-funkčnom význame;***

*stratégie riešenia uvádzajú v rôznych koncepciách v hierarchii, ktorá môže prekážať ich rozvíjaniu.*

*H3: V rýdzo algebrickom kontexte čínski žiaci preukazujú dobrú schopnosť syntakticky používať algebrický formalizmus.*

*H4: Kompozičná štruktúra písanej čínštiny podporuje za použitia prostriedkov kodifikácie a dekodifikácie osvojovanie špeciálnych aspektov pojmov neznáma, premenná a parameter.*

Na overenie hypotéz výskumu boli použité nasledovné paradigmatické oblasti:

- Historická analýza a sledovanie historicko-epistemologického vývoja matematického myslenia vo vzťahu k rozdielom vo formách zdôvodňovania (argumentácia, tvorba hypotéz, dokazovanie), skúmanie historickej algebrickej tradície reprezentovanej v západnom svete Euklidovými *Základmi* a v čínskom prostredí *Matematikou v deviatich knihách*.
- Analýza prirodzeného jazyka a poznatky neurofyziológie pri štúdiu alfabetickeho a ideografického jazyka s porovnaním kognitívnych aspektov týchto faktorov pri zohľadnení pôvodu študentov a pri skúmaní potenciálneho dosahu týchto faktorov na proces štúdia matematiky.
- Analýza priebehu experimentu z hľadiska prístupu podľa teórie didaktických situácií.
- Analýza prípadov za použitia metódy individuálneho interview.

Ako východiskový materiál boli použité výsledky výskumu niekoľkých autorov, ktorí v priebehu vyše desiatich rokov realizovali výskum v predmetnej problematike na mnohých školách rozmanitého stupňa a typu vo väčších mestách v Taliansku, kde je do vzdelávacieho procesu začlenený značný počet detí čínskych imigrantov. Ich počet trvale vzrastá, takže problematika sledovaná v dizertácii je čoraz aktuálnejšia.

## **2. POTENCIÁLNE SÚVISLOSTI ČÍNSKEHO JAZYKA A JAZYKA ALGEBRY**

Písaná podoba čínskeho jazyka a kodifikovaná výslovnosť mandarínskej čínštiny sú jedinými zjednocujúcimi faktormi čínskeho jazyka na území Čínskej republiky, Tajvanu a mnohých enkláv v dnešnom svete obývaných etnickými Číňanmi; na týchto územiach



hovorová čínština existuje v enormnom počte variantov, ktorého dôsledkom je vzájomná nezrozumiteľnosť mnohých variantov z geograficky vzdialených území.

Krátka analýza ideografického záznamu čínskeho jazyka, realizovaná aj za pomoci neurofyziologických – dodnes rozporných a protirečivých – hľadísk má za hlavný cieľ zistenie, či rôzne systémy písomného záznamu jazykov predstavujú *podstatné* rozdiely medzi jazykmi a či táto odlišnosť grafického záznamu podstatným spôsobom determinuje vznik špecifických kognitívnych stratégií.

Základnou charakteristikou čínskeho ideografického záznamu je *jednota* troch zložiek: grafémy (ktorá je ikonickou jednotkou), slabiky (ktorá je fonologickou jednotkou) a sémantickej zložky (ktorá stanovuje význam, obsah). Rigidná konvergencia tvaru, zvuku a významu v jedinej slovnej jednotke vylučuje verzatilitu lexikálnych jednotiek príznačnú pre alfabetický záznam. Na tomto systéme, pretrvávajúcom odhadom dva a pol až tri a pol tisícročia, nezmenili nič podstatné pokusy o čiastočné reformy, ani systemizovanie transkripcie do svetovo rozšírených jazykov indoeurópskeho pôvodu.

V alfabetických systémoch jednotlivé fonémy zodpovedajúce ireducibilným grafémam nemajú – okrem nepočetných výnimiek – žiadny význam (obsah) a ich význam je daný spojením do konečnej postupnosti reprezentujúcej lexikálnu jednotku, ktorej obsah si musí čitateľ osvojiť v procese vzdelávania rozširovaním svojho vzdelanostného obzoru. V ideografickom systéme, čo je prípad písomného záznamu čínskeho jazyka, uvedený spôsob transferu a modifikácie významu sa vzťahuje na tvorbu odvodených, zložených a abstraktných pojmov, ktorých grafický znak je konečným usporiadaným spojením niekoľkých základných „ireducibilných“ znakov – radikálov so samostatným obsahom, ktorý je v zloženom slove významovo pozmenený.

Tvorba nových slov sa v čínštine deje spájaním základných znakov – radikálov spravidla na báze asociácie. Od základného znaku možno postupným združením s inými znakmi získať až niekoľko desiatok až stoviek nových významov, v ktorých pridávaný znak hrá úlohu *parametra* a pravidlá *spájania* sú analógiou algoritmov. V tomto systéme tvorby možno vidieť zjavnú pre-algebrickú analógiu odvodzovania.

Jedna z hypotéz dizertácie obsahuje tézu, že systém osvojovania písomnej podoby čínskeho jazyka podporuje osvojovanie istých logicko-matematických kompetencií. Na jej potvrdenie je užitočné vopred si prehľadne zhrnúť základné rozdiely medzi čínskym a talianskym jazykom, najmä s ohľadom na tvorbu slov a pravidlá tejto tvorby, sčasti sformulované v logicko-matematickej reči.

### **Osobitosti čínskeho jazyka:**

- Základné sú činnosti rozpoznávania a kompozície. Kompozícia vyžaduje znalosť meta-pravidiel tvorby zložených slov.
- Tvorba zložených slov z toho istého radikálu je „modelom“ používania „parametra“.
- V tvorbe zložených slov sa mimovoľne používajú princípy algebrického myslenia.

### **Osobitosti taliančiny ako reprezentanta indoeurópskych jazykov:**

- Poradie slov má minimálny vplyv na ich význam.
- Priame a Inverzné relácie medzi subjektmi sú modelované činným a trpným rodom.
- V argumentácii sa uplatňuje dvojhodnotová logika, dôkaz dovedením „ad absurdum“, disciplína tvorí hypoteticko-deduktívny systém.

## **3. SÚČASNÝ STAV RIEŠENIA PROBLEMATIKY**

Pred prechodom k skúmaniu didaktických aspektov problematiky je potrebné načrtnúť historicko-epistemologický vývoj, ktorý viedol k vzniku algebry ako vyššieho vývojového štádia aritmetiky. Popri všeobecných univerzálnych črtách tohto vývoja je nutné všimnúť si relácie medzi matematikou a kultúrnym prostredím, v ktorom matematika vzniká a rozvíja sa. Tento vzťah je neopomenuteľný a jeho dôležitosť je jedna z prvoradých. Ide totiž nielen o spoločenskú zakotvenosť a špecifické spoločenské limitovanie jedincov, ktorí matematiku tvoria, vyučujú a osvojujú si ju, ale aj o miesto matematiky ako plne kompetentného komponentu v systéme dobovej kultúry spoločnosti. Matematické poznatky sú formy kultúrneho odrazu sveta, kultúrne formy špecifických významov (Warfofsky 1979; Ilyenkov 1977; D'Amore, Radford, Bagni 2006). V tomto smere sú Európa vychádzajúca z klasického myslenia gréckej antiky a čínska epistéma založená o. i. na taoistickom princípe jin – jang značne rozdielne, čo má nevyhnutný odraz aj v spôsobe akceptácie poznania žiakmi (Sfard – Prusak, 2005)

To všetko sa prejavuje reláciami a interakciami v mnohozložkovom komplexe sústredenom okolo vyučovania matematiky, ktorého subjektmi sú školský systém, triedne kolektívy žiakov, rodinné a sociálne zázemie, celkové kultúrne prostredie spoločnosti a v multikultúrnom prostredí aj historicko-etnické špecifiká jednotlivých etnických skupín integrovaných určitým spôsobom do etnicky a historicko-kultúrne dominantnej zložky.

Hlavným cieľom dizertácie je pokračujúcim experimentálnym výskumom preskúmať – čo aj len v prvom priblížení – viaceré komponenty uvedeného komplexu s osobitým dôrazom na zisťovanie faktov, ktoré môžu reprezentovať rozdiely a podobnosti vzhľadom na určité

špecifické prvky vzťahujúce sa na vyučovanie matematiky, špeciálne na vyučovanie algebry (osobitne v úvodných programových partiách tohto súboru tematických celkov).

Ďalší cieľ vychádza z experimentálneho potvrdenia faktu, že určité didaktické prekážky v osvojovaní matematických pojmov pramenia v objektívnych príčinách identifikovaných v historickom vývoji matematiky (Bagni, D'Amore 2005; Harper 1987; Sfard 1992; Śierpińska 1994; Spagnolo 2006). Dizertácia pokračuje v uvedenom výskume so špecifickým zameraním pozornosti na prechod od aritmetického jazyka k algebrickému s osobitým sústredením na kľúčový prvok algebrického myslenia vo fáze zovšeobecňovania – na pojem premennej.

Súbežným cieľom práce je porovnávací analýza v témach výskumu medzi vzorkou talianskych a čínskych žiakov/vrstovníkov v integrovanom prostredí niektorých talianskych škôl.

Intenzita výskumu prekážok spojených s osvojovaním začiatkov algebry permanentne vzrastala od začiatku 80. rokov 20. storočia a postupne sa identifikovali čoraz podrobnejšie detaily tohto procesu. V posledných dvoch desaťročiach na mnohé paralelné aj odlišné stránky osvojovania algebry v porovnaní s analogickým procesom v aritmetike poukazovali mnohí autori (Malisani, Spagnolo 2008; Herscovich, Linchevski 1994; Sfard, Linchevski 1994; Sadovsky, Sessa 2005; Linchevski 1995; Radford 2003, 2006; Bardini, Radford, Sabena 2005).

Zjednocujúcim hľadiskom všetkých koncepcií popri všetkých odlišnostiach v detailoch je akceptácia písmenovej symboliky a pojem premennej. Freudenthal (1983) prisudzuje premennej nasledovné významy: neznáma, premenná vo funkčnej relácii a „polyvalentné označenie (meno)“ – premennosť bez zmeny podľa nejakej funkčnej závislosti. Matz (1982) a Wagner (1981, 1983) považujú pojem premennej za *najzložitejší kritický bod aritmeticko-algebrického prechodu*. Algebra ako najvladnejší jazyk matematiky slúžiaci ako most k štúdiu vyššej matematiky sa zároveň javí značnej časti populácie ako nezdolateľný múr zabraňujúci osvojeniu „vyššej“ úrovne myslenia.

V školskom matematickom kurikulu Číny a niektorých ďalších východoázijských krajín (Singapúr, Južná Korea) sú žiaci od samých začiatkov matematického vzdelávania na konkrétnych príkladoch oboznamovaní so zovšeobecňujúcimi abstraktnými symbolmi, ktoré postupne budujú pojem funkčnej závislosti a relácie medzi časťou a celkom (Liu, Wang, Zhang 1984). Nisbett (2001) pokladá tento prístup za typický prejav „čínskej epistemológie“ a najvhodnejší spôsob prechodu aritmetického myslenia k algebrickému zovšeobecneniu.

Doerger (2008) nachádza v čínskej koncepcii vyučovania aj zložky zodpovedajúce taoistickej koncepcii argumentácie pomocou reálnych súvislostí.

Vlastný výskum v triedach so zastúpením čínskych žiakov na školách rôznych typov a stupňov v Palerme potvrdil, že aj obmedzené osvojovanie čínskeho jazyka v rodinnom prostredí má pozitívny vplyv na tvorbu špecifických schopností charakteristických pre vzťah medzi osvojovaním čínskeho jazyka jednotou vizuálno-orálno-semantickej metódy a pre-algebrickým myslením. Tvorba nových významných spojení (charakterov) pomocou *radikálu*, ktorý hrá úlohu parametra v matematickom zmysle, a nosiča významu alebo zvuku je príkladom *základného algoritmu* tvorby nových objektov z daných známych objektov, čo je operácia v mnohých variáciách príznačná pre matematiku.

Zmyslom výskumu nebolo len porovnanie kognitívnych štýlov rôznych kultúr, ale aj zázemia, z ktorého vyrastajú, a štúdium perspektív potenciálneho obohacovania procedúr a stratégií riešenia úloh vzájomnou výmenou kultúrnych (myšlienkových) hodnôt, čo aj odlišných, ale zmysluplných a užitočných.

Klasickou historickou ukážkou čínskeho matematického myslenia je dielo *Matematika v deviatich knihách*, ktoré v niekoľkých inovovaných verziách slúžilo ako základná príručka teoretickej i praktickej matematiky najneskôr od 2. storočia p. n. l. približne do 7. storočia n. l. Úloha tohto diela v čínskej kultúre a matematike sa podobá postaveniu a poslaniu Euklidových *Základov* v západnej civilizácii.

Základné didaktické charakteristiky Matematiky v deviatich knihách možno sformulovať nasledovne:

- Používanie riešiacich algoritmov v problémových situáciách s možnosťou zovšeobecnenia riešiacej procedúry (hľadanie základného algoritmu);
- Používanie konkrétnych údajov na reprezentáciu všeobecných pojmov alebo procedúr; riešenia úlohy predstavuje triedu úloh a ich riešení.
- Používanie aritmetických / algebrických meta-pravidiel vzťahujúcich sa na sériovo-holistický typ myslenia (príkladom je metóda fang-čchen);
- Odôvodňovanie analogicko-aduktívneho rekurzívneho typu.

Možno poznamenať, že základné princípy charakterizujúce toto dielo sú aj v súčasnosti prítomné v mentalite východných spoločností a vo verbálne sofistikovanejšej forme obsiahnuté aj v didaktických zásadách a didaktickej praxi.<sup>1</sup>

Mnohé postupy, procedúry a algoritmy orientálnej (čínskej, indickej a arabsko-islamskej) matematiky sú explicitne alebo skryto (väčšinou so zamlčaním pôvodu alebo názvu) prítomné dodnes v programe školského matematického vzdelávania vo väčšine európskych krajín (napr. trojčlenka, metódy riešenia algebrických rovníc prvého a druhého stupňa, Gaussova eliminačná metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc atď.)

#### **4. EXPERIMENTÁLNY VÝSKUM: METÓDY A VÝSLEDKY**

Experimentálny výskum bol pripravený pre dve „typológie“ skúmaných žiakov s cieľom preskúmať potenciálne procesy zdôvodňovania na rôznych úrovniach školskej sústavy (v primárnej škole a na nižšom i vyššom stupni sekundárnej školy) vo vzťahu k typickému matematickému kontextu algebrickej aj prealgebrickej povahy so zreteľom na chýlostivú fázu prechodu od aritmetického myslenia – nie nutne formalizovaného – k algebrickému mysleniu. Experiment prebiehal v súlade s deklarovanými cieľmi na školách v Palerme, odlišných sociálno-kultúrnou skladbou žiactva, rodinným zázemím žiakov, typom školy a stupňom vzdelávania v školskej sústave.

Výskumu sa podrobilo 270 žiakov, z toho 40 žiakov čínskej národnosti. Výsledky výskumu treba považovať len za uzavretie prvej etapy budúceho širšie a hlbšie projektovaného výskumu, ktorý sa má čiastočne realizovať aj v Číne.

Výskum prebehol riešením troch špecificky koncipovaných úloh, výsledky riešenia ktorých boli vyhodnotené kvalitatívne a kvantitatívne aj s použitím špeciálneho softvéru CHIC (cohesive hierarchical implicative classification) vypracovaného na vyhodnocovanie experimentálnych údajov.

Tri experimentálne úlohy tvoriace predmet výskumu mali názvy (originálne v talianskom jazyku): *Magická schránka Sudoku*, *Fermatov problém* a *Dotazník o premennej a parametri v rozličných semiotických kontextoch*. Ich obsah a prezentácia boli podstatne rozdielne z hľadiska formy aj požadovaných algebrických a prealgebrických kompetencií, ako aj z hľadiska možností detekcie rozdielov v štýle myslenia príslušníkov rôznych kultúr. Pred štartom výskumu boli výskumníkom poskytnuté všetky relevantné vekové, osobnostné,

---

<sup>1</sup> Poznámka. Klasické historické dielo čínskej matematickej literatúry je pod názvom *Matematika v devíti kapitolách* dostupné v českom preklade s komentárom od Jiřího Hudečka (MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze 2008, Dějiny matematiky, sv. 37)

vzdelanostné údaje o žiakoch; u čínskych žiakov k údajom patrilo aj hypotetické začlenenie do príslušnej vekovo-vzdelávacej kategórie školského systému v Číne.

Výsledky hodnotenia výskumu potvrdili už známy fakt o stroho pragmatickom, konkrétnom správaní čínskych žiakov v prístupe k riešeniu úloh procedurálnym algoritmickým typom uvažovania a odôvodňovania úzko spätým s holistickým myslením pri kodifikácii a dekodifikácii informácií predložených v rôznych situáciách/problémoch. Títo žiaci vo fáze argumentácie a tvorby hypotéz uprednostňovali v heuristickom prístupe metódu pokusu a omylu (aritmetického typu), použitie ktorej sa usilovali uzavrieť hľadaním *fundamentálneho algoritmu* ako nástroja dôkazu. U čínskych žiakov sa argumentácia a organizácia odvodzovania obvykle dejú vytváraním hierarchie odôvodňovacích modelov, ktoré sú sotva založené na dvojhodnotovej logike, ale skorej na extenzívnom používaní myšlienky *variability* ako prvotnej relácie medzi rôznymi „výrazmi“ a následne ako dynamického „výrazu“ vyjadreného prostriedkami „vzorca“ voči iným „výrazom“, ktoré sú taktiež dynamické. (Príklady takéhoto nazerania sú prítomné vo všetkých realizovaných experimentoch.) Túto myšlienku možno považovať za jeden z významných aspektov algebrického myslenia.

Typický spôsob zdôvodňovania vyskytujúci sa u talianskych žiakov má arisotelovsko-euklidovskú podobu, je hypoteticko-deduktívneho typu a je realizovaný reťazcom kontextualizovaných spojení použitím dvojhodnotovej logiky.

Výsledky riešenia troch rôznych úloh s premyslene stanovenými závermi aj bez presného kvantitatívneho vyhodnotenia navodzovali záver, že čínski žiaci v porovnaní s talianskymi aj bez vedomého osvojovania algebrických kompetencií prejavujú väčšiu schopnosť úspešne riešiť úlohy, ktoré sú v podstate algebrické, aj bez formálneho algebrického jazyka. Čínski žiaci sa lepšie orientujú vo výbere údajov a javov, ktoré smerujú k pochopeniu aspektov relácií medzi premennými pôsobiacimi v situácii. Nápadné manipulatívne schopnosti čínskych žiakov s algebrickou symbolikou si všimli aj laickí pozorovatelia a tento jav sa vo všeobecnosti dáva do súvisu s povahou čínskeho písma bližšou po procedurálnej stránke algebrickej symbolike.

Pred započatím výskumu bolo sformulovaných niekoľko dôležitých otázok spolu s predpokladanými praktickými odpoveďami na ne, predstavujúcimi hypotézy výskumu. Otázky mali nasledovný obsah a poradie:

- Aktivujú sa u žiakov pojmy neznámej a funkčnej relácie?
- Prejavuje sa to pri prechode od jedného pojmu k druhému?

- Ak je to tak, ako proces prechodu prebieha?
- Je možné analyzovať v tomto zmysle rozdiely v správaní čínskych a talianskych žiakov z epistemologicko-kultúrneho aspektu?
- Zdôrazňuje relácia syntax – semantika obsiahnutá v algebrickom kóde rôzne významy v dvoch typológiách žiakov?
- Ako sa to využíva v riešení úloh? Ako sa deje proces prechodu od algebrického jazyka k prirodzenému a obrátene?
- Ktoré logické deduktívne schémy odlišné v dvoch skúmaných kultúrach sa prejavujú v priebehu testu a zovšeobecnenia v prístupe k algebre pri prechode od aritmetického registra?

Metodologická príprava experimentu prebiehala podľa Teórie didaktických situácií G. Brousseaua. Pre každú z troch skupín situácií sa pripravila odlišná a-priorná analýza zameraná na konanie žiakov z odlišných kultúrnych prostredí s predpokladom vplyvu najhlbších odlišných rysov kultúr zakotvených v celostných osobnostiach žiakov. Analýza „a priori“, zameraná na objekty vystupujúce ako *epistemologické reprezentácie alebo historicko-epistemologické reprezentácie* modeluje hypoteticky konanie žiakov/študentov, ktoré môže byť korektné a nemusí viesť k riešeniu didaktickej situácie zadanej experimentálne.

Prvá etapa výskumu bola zameraná na použitie pojmov *neznáma* a *premenná* v zmysle relačno-funkčnom, mala teda za úlohu overiť alebo vyvrátiť hypotézy H2 – 3, H2 – 4 a H4, rátajúce s preukázateľným vplyvom čínskej epistemológie. Na kvantitatívne vyhodnotenie výsledku bol použitý softvér CHIC a štatistický index implikácie a Lermannov index.

Druhá fáza výskumu bola zameraná na verifikáciu hypotéz H1, H2 – 1, H2 – 2, H2 – 3 vzťahujúcich sa na

- manipulatívne schopnosti žiakov/študentov s formalizovaným algebrickým jazykom;
- schopnosť abstrakcie;
- reláciu syntax – semantika v algebrickom kóde;
- aplikáciu a porovnávanie algebrického a prealgebrického myslenia v rôznych prostrediach (numerické, geometrické, rýdzo algebrické).

V tretej fáze výskumu riešili študenti dve úlohy prealgebrického rázu samostatne a v zmiešanej čínsko-talianskej skupine. Riešenie úloh bolo zamerané na verifikáciu hypotéz H1, H2, H3 a H4.

Posledná časť výskumu, ktorá nebola začlenená do experimentálneho komplexu, je skôr začiatkom pokračujúcej fázy. Tematika tejto časti sa týka prípravy učiteľa na prácu v kultúrne zmiešaných prostrediach.

Rozsiahla časť dizertácie je venovaná konkretizácii použitých koncepcií, demonštrácii výskumných zručností pripraviť experimentálny program s účinnou reliabilitou otázok a podnetov. Výskumné materiály zostavené podľa princípov implikačnej analýzy odrážajú skúsenosti z predchádzajúcich výskumov a zároveň pripravujú cestu k výsledkom rozšírenia hranice doterajšieho poznania v príslušnej oblasti. Každý elementárny krok v duchu implikačnej analýzy je cieľavedome zakomponovaný do reťazca implikácií v komplexe dôsledkov potvrdzujúcich alebo vyvracajúcich hypotézy výskumu, sformulované na základe overených výsledkov predchádzajúcich výskumov a vlastného predvýskumu. Výsledné hodnotenie má validitu uznateľnú v rámci akceptovanej paradigmatickej metodológie.



## ZÁVERY

Pri hodnotení výsledkov experimentálneho didaktického výskumu treba mať vždy na pamäti, že didaktická veda je svojimi najhlbšími základmi veda empirická, ktorej zákony majú induktívny charakter a ich uplatňovanie je rázu pravdepodobnostného. Z toho hľadiska treba posudzovať aj výsledky experimentálneho výskumu opísaného v dizertácii a potvrdzujúceho všeobecné kvalitatívne zistenie mnohých predchádzajúcich výskumníkov. Význam práce tkvie v potvrdení predchádzajúcich poznatkov inými konkrétnymi postupmi, konkretizáciou; rozšírením obzorov poznania v rozšírení oblasti konkrétnych činností, ktorými sa môže aplikácia zistených zákonitostí pozitívne využívať. Otvoreným problémom, na výskume ktorého sa bude v najbližšej aj v dlhodobej etape intenzívne výskumne aj teoreticky pracovať, je problém využitia potenciálne efektívnych odlišností rôznych kultúr v multikultúrnom prostredí na obojstranný prospech zúčastnených strán. Široký medzinárodný výskum za účasti mnohých špičkových pracovísk Ázie, Severnej Ameriky a Európy svedčí o význame problému a je zárukou postupných úspešných riešení v zblížovaní kultúr a vo zvyšovaní kvality školského vzdelávania v matematike.

## ZOZNAM PRÁC UCHÁDZAČA, KTORÉ SÚVISIA SO SKÚMANOU PROBLEMATIKOU

### Books

1. Spagnolo F., Di Paola B., *European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching Mathematics*. Springer, Studies in Computational Intelligence, 2010 (ISBN: 978-3-642-11679-7; ISSN 1860-940X)

### Papers

1. Di Paola B., Spagnolo F., *Argumentation and Proving in Multicultural classes: A didactical experience with Chinese and Italian students*. In: Journal of Mathematics Education, 2009, Vol. 2, No 1, pp. 1 – 14. Annually in hard copy (ISSN 1945-7502), online (ISSN 1945-7448)
2. Di Paola B., Spagnolo F., *I sistemi indeterminati nei nove Capitoli cinesi, elemento di novita?* In: Quaderni di Ricerca in Didattica, G.R.I.M., Palermo, 2009, N. 19
3. Di Paola B., *La argumentaciòn y la demostraciòn en un context multicultural*. UNO, 2010, Vol. 54, pp. 94 – 102 (ISSN: 1133-9853)
4. Spagnolo F., Di Paola B., *Il fumetto può aiutare nei processi di insegnamento/apprendimento delle Matematiche?* In: Vita Scolastica, Giunti Editore, 2010, N. 18
5. Di Paola B., *Perché gli studenti cinesi risolvono più facilmente I problemi di Matematica?* In: Vita Scolastica, Giunti editore, 2010, N. 18
6. Di Paola B., Spagnolo, F., *European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching/Learning Mathematics*. Journal of Mathematics Education, December 2010, Vol. 3, No. 2, pp. 139 – 153. Annually in hard copy (ISSN: 1945-7502; online ISSN 1945-7448)
7. Di Paola B., Spagnolo F., *Quali le coordinate culturali e quali gli usi nell'insegnamento/apprendimento della Matematiche nella relazione Cina-Europa*. MatePristem: 2011, <http://matematica.unibocconi.it/>
8. Di Paola B., Marino T., *Ontogenesis and phylogenesis in the passage from arithmetic to algebraic thought*. In: Quaderni di Ricerca in Didattica, G.R.I.M., Palermo, 2012, n. 22, pp. 45 – 55 (<http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno22.htm>) ISSN on-line 1592-4424

9. Spagnolo F., Di Paola B., *European and Chinese cognitive styles and their impact on teaching/learning mathematics*. Chinese National Mathematics Teacher Education Conference, Hangzhou, Zhejiang, China, 2010
10. Di Paola B., Spagnolo F., *Teaching/learning mathematics in different cultural environments: some experimental considerations with Chinese and European students*. Chinese National Mathematics Teacher Education Conference, Hangzhou, Zhejiang, China, 2010
11. Di Paola B., *La formazione degli insegnanti di Matematica in un'ottica interculturale*. In: Proceedings del convegno dedicato a Francesco Speranza, La formazione degli insegnanti di matematica: I tempi, I modi, I luoghi – Università degli studi di Bari “A. Moro”, 24 – 25 Febbraio, 2012

### **Papers in press**

1. Di Paola B., Spagnolo F., *Epistemic and didactic values of the demonstrative process in different cultures: a case study in Geometry with Chinese and Italian students*. (POSTER), CIEAEM 63, 2011
2. Lo Cicero M. L., Di Paola B., *Graphical perception: a case study at the university level* (POSTER). Proceedings International Conference CIAEM-64. Commission internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, 7/2012, Rhodes
3. Di Paola B., *The training of Mathematics teachers in an intercultural perspective: innovative work in the mathematics classroom with Italian and Chinese students*. Proceedings international conference East meets West, International Congress and Exhibition on Innovation and Entrepreneurship 2012, CONGRESS Conference Session MEDCONF 2012: 7<sup>th</sup> Mediterranean Conf. on Mathematics Education, 9/2012, Cyprus
4. Di Paola B. et alli. *Chess and mathematics...*. Metacognition proceedings book with ISBN code, 5<sup>th</sup> biennial meeting of the EARLI Special Interest Group 16 – Metacognition, 9/2012, Milan (Italy)
5. Di Paola B., *Mathematics classroom with Italian and Chinese students: metacognitive experiences in an intercultural perspective*. Metacognition proceedings book with ISBN code, 5<sup>th</sup> biennial meeting of the EARLI Special Interest Group 16 – Metacognition, 9/2012, Milan (Italy)

## VÝBER ZO ZOZNAMU POUŽITEJ LITERATÚRY

- Ajello M., Spagnolo F., Xiaogui Z., *Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non-scholastic environments*. In: Mediterranean Journal for Mathematics Education, Cyprus Mathematical Society, 2005, 4 (2), 27 – 65 (ISSN 1450-1104)
- Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G., *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico del C.N.R. Pavia: Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Quaderno 1994, 6
- Bagni G. T., D'Amore B., *Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale*. In: La matematica e la sua didattica, 2005, 1, 73 – 89
- Bardini C., Radford L. & Sabena C., *Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics*. Proceedings of the 29<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia, 2005, Vol. 2, 129 – 136
- Betti R., *Dalle equazioni a Cardano. Da Cardano All'algebra. La lunga storia delle equazioni algebriche*. Lettera Pristem, 2001, 41
- Bourbaki N., *Elementos de historia de las Matematicas*. Madrid: 1976 [Ed. orig.: *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris: Hermann, 1969]
- Boyer C. B., *Storia della Matematica*. Milano: Mondadori, 1982 [edizione originale: *A History of Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1968]
- Brousseau G., *Problemes de didactique des decimaux*. In : Recherches en Didactiques des Mathematiques, 1981, Vol. 2, n. 1
- Brousseau G., *Theory of didactical situations in mathematics*. Edited and translated by Balacheff, Kluwer academic publishers, 1997
- Brousseau G., Warfield V. M., *The case of Gaël. The study of a child with mathematical difficulties*. In: The journal of mathematical behaviour, 1999, Vol. 18, n. 1
- Cai J., Hwang S., *Generalized and Generative Thinking in U.S. and Chinese Students' Mathematical Problem Solving and Problem Posing*. In: Journal of Mathematical Behaviour, 2002, 21, 401 – 421
- Cajori F., *History of Elementary Mathematics*. New York: Macmillan, 1986
- Cajori F., *A history of mathematical notation I, II*. New York: Dover Publications, 1993

- Cao Zhong-Jun, Bishop A., *Chinese students' approaches to learning of mathematics*. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong: Faculty of Education, University of Hong Kong, 2002, 20 – 25
- Chemla K., *I Nove capitoli sui procedimenti matematici: la costituzione di un canone nella matematica*. Storia della Scienza: Cina, India, Americhe, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S. p. a., 2001a, 133 – 153
- Chemla K., *I Nove capitoli sui procedimenti matematici: la costituzione di un canone nella matematica (The Nine Chapters on Mathematical Procedures, the constitution of a Canon in mathematics)*. In “La scienza in Cina”, edited by K. Chemla, with: F. Bray, Fu Daiwie, Huang Yi-Long, G. M'etailie, 2001b
- Chemla K., *Generality above abstraction. The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in ancient China*. Science in Context, 2003, 16, 413 – 458
- Chevallard, Y., *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985
- Čižmár J., *The origins and development of mathematical notations (A historical outline)*. Quaderni di ricerca in didattica, Palermo: G.R.I.M., 2000, 9, 105 – 124
- D'Ambrosio U., *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora Editrice, 2002
- D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice, 2000
- D'Amore B., *Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya)*. In: For the learning of mathematics, 2005, 25(2), 26 – 32
- Di Paola B., Marino T., *Se e quando si arriva al pensiero algebrico*. Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo: G.R.I.M., 2007, 17, 202 – 215, <http://dipmat.math.unipa.it/~G.R.I.M./quaderno17.htm> ISSN on-line 1592-4424
- Di Paola B., Spagnolo, F., *A-didactical situations in multicultural primary school*. ICME11, The International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico, 2008a, <http://tsg.icme11.org/document/get/787>
- Di Paola B., Spagnolo, F., *Different procedures in argumentation and conjecturation in primary school: an experience with Chinese students*. Conference of five cities: “Research in mathematics education”, Cyprus, 2008b
- Di Paola B., Scimone A., *On the formalization of a number theory problem by pupils*. In: Kolektiv autoru: Matematika a didaktika matematiky VI, editor J. Novotná, Pedagogická fakulta MU, Vydavatelství MU, Brno: 2008c, 27 – 39, ISBN 978-80-210-4772-3

- Diofant, *Arifmetika*. Moscow: Nauka, 1974
- Doerger D. W., *The Teacher as Taoist*. Retrieved on July 28, 2008 from [www.usca.edu/essays/vol92004/doerger.pdf](http://www.usca.edu/essays/vol92004/doerger.pdf)
- Duval, R., *Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques*. In: J. C. Rauscher (Ed.), Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM, Strasbourg: IREM, 2006
- Eco U., *Kant and the Platypus. Essays on Language and Cognition*. San Diego/New York/London: Harcourt, 1999
- Fan L., Wong N. Y., Cai J., Li S., *How Chinese Learn Mathematics. Perspectives from Insiders*. World Scientific Pub. Co. Inc., 2004
- Granet M., *La pensée chinoise*. Paris : Editions Albin Michel, 1988
- Gras R., *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Rennes I, 1979
- Ilyenkov E., *The concept of the ideal. Philosophy in the USSR. Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers, 1977
- Karlgren B., *Sound and Simbol in Chinese*, New York: Ronald, 1923, p. 63
- Lapointe A. E., Mead N. A. and Askew J. W., *The International Assessment of Educational Progress Report No. 22-CAEP-01: Learning Mathematics*. New Jersey: The Centre for the Assessment of Educational Progress, Educational Testing Service, 1992
- Lerman I. C. et Azé J., *Indice probabiliste discriminant (de vraisemblance du lien) d'une règle d'association en cas de « très grosses » données, Mesures de qualité pour la fouille de données*. RNTI-E-1, 2004, 69 – 94
- Lerman I. C., *Classification et analyse ordinale des données*. Paris: Dunod, 1981
- Lerman I. C., Gras R. et Rostam H., *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaries*. I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1981, 74, 5 – 35 et 75, 5 – 47
- Leung F. K. S., *An Exploration into the Reasons for the High Achievement of East Asian Students*. Paper presented at the International Conference on Mathematics Education, History of Mathematics and Cultural History of Mathematics, Informatics and Learning Obstacles, Beijing: 2000, July

- Malara N., Navarra G., *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking*. Bologna: Pitagora Editrice, 2003
- Martzloff J. C., *A History of Chinese Mathematics*. Berlin / Heidelberg: Springer, **1997**  
[Edizione originale francese: *Histoire des Mathématiques chinoises*, Paris: Masson, 1987]
- Miller K. F., Smith C. M., Zhu J., Zhang H., *Pre-school origins of cross-national differences in mathematical competence: The role of number-naming systems*. In: *Psychological Science*, 1995, 6, 56 – 60
- Nasr S. H., *Scienza e civiltà nell'Islam*. Milano: Feltrinelli, 1977
- Needham J., *Science and civilization in China*. Vol. 4: Physics and physical technology, Cambridge: Cambridge University Press, 1962
- Needham J., *Scienza e civiltà in Cina, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia*. Torino: Einaudi, **1985** [edizione originale: *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press 1959]
- Nisbett R. E., *Il TAO e Aristotele: Perché asiatici e occidentali pensano in modo diverso*. Rizzoli, 2007
- Nisbett R. E., Peng K., Choi I. & Norenzayan A., *Culture and systems of thought: Holistic vs. analytic cognition*. In: *Psychological Review*, 2001, 108, 291 – 310
- Radford L., *The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective*. In: N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1996, 39 – 53
- Radford L., *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*. In: *For the Learning of Mathematics*, 1997, 17 (1), 26 – 33
- Radford L., *On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance*. *Educational Studies in Mathematics*, 2003a, 52(2), 123 – 150
- Radford L., *The Cultural-Epistemological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism*. Plenary Lecture presented at History and Pedagogy of Mathematics Conference, Uppsala, 2004a (also: <http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML>)
- Radford L., *Algebraic thinking and generalization of patterns: a semiotic perspective*. In: *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mérida (México): Universidad Pedagógica Nacional, 2006
- Robitaille D. F. and Garden R. A., *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics*. Oxford: Pergamon Press, 1989
- Sfard A., Prusak, A., *Telling identities: The missing link between culture and learning mathematics*. In: Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, H. L. Chick and J. L. Vincent, Melbourne, 2005, 1, 37 – 52
- Spagnolo F., *The role of history of mathematics in research in Mathematics Education. Proceeding*, In: "The Mathematics Education into the 21st Century Project", Amman (Jordan), 2000 (<http://math.unipa.it/~G.R.I.M./21project.htm>)
- Spagnolo F., *History and Ethno-Mathematics in the Interpretation of the process of learning/teaching*. 13° ICMI Comparative Study Conference, University of Hong Kong, 2002 (In: <http://dipmat.math.unipa.it/~G.R.I.M./articles.htm>)
- Spagnolo F., *La modélisation dans la recherche en didactiques des mathématiques: les obstacles épistémologiques*. R.D.M. (Recherches en Didactiques des Mathématiques), Grenoble: La Pensée Sauvage Edition, 2006, 26/3, 337 – 380, ISSN 0246-9367
- Spagnolo F., M. Ajello, *Schemi di ragionamento in culture differenti : i paradossi logico-linguistici nella cultura europea e cinese*. Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), 2008, 18, 163 – 182 (in: <http://math.unipa.it/~G.R.I.M./quaderno18.htm>), ISSN 1592-4424
- Spagnolo F. & Di Paola B., *European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching Mathematics*. Springer, Studies in Computational Intelligence, 2010, ISBN 978-3-642-11679-7, ISSN 1860-949X
- Stevenson H. W., Lummis, M., Lee, S. & Stigler, J., *Making the Grade in Mathematics: Chinese, Japanese and American Children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990
- Storia della Scienza, *Cina, Indie, Americhe*, Istituto della Enciclopedia Italiana, Treccani, 2001, Vol. II.
- Struik, D. J., *Matematica: un profilo storico*. Bologna: Il Mulino, 1981 [Edizione originale: A Concise History of Mathematics, New York: Dover, 1948]



- Tan L. H., Liu H. L., Perfetti C. A., Spinks J. A., Fox P. T., Gao J. H., *The Neural System Underlying Chinese Logograph Reading*. In: *NeuroImage*, 2001, 13, 836 – 846, doi:10.1006/nimg.2001.0749, available online at <http://www.idealibrary.com> on
- Trattato d'Algebra*, (Manoscritto anonimo del XIV secolo) A cura e con l'introduzione di R. Franci e M. Pancanti, Siena: Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale, 1988, 18
- Van der Waerden B. L., *A history of Algebra. From Al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlin: Springer, 1985
- Vygotsky L. S., *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri, 1987
- Wagner D. B., *A proof of the Pythagorean Theorem by Liu Hui*. In: *Historia mathematica*, 1985, 12, 71 – 73
- Wartofsky M., *Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology*. In: *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel Publishing Company, 1979, 188 – 209
- Xie X., *The Cultivation of Problem-Solving and Reason in NCTM and Chinese National Standards*. In: *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Plymouth: Centre for Innovation in Mathematics Teaching, 2004  
<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/xuehuixie.pdf>.
- Yang K. S., *Social Orientation and Individual Modernity among Chinese Students in Taiwan*. In: *Journal of Social Psychology*, 1981, 113, 159 – 170
- Youschkevitch A. P., *Istorija matematiki v srednich vekach*. Moscow: Gosudarstvennoje izdatelstvo fiziko-matematičeskoj literatury, 1961 [English translation: *History of Mathematics in the Middle Ages*. Moscow: ZDM, Analyses 23, 2005, 37(1)]

## ANNOTATION

The main aim of this thesis is both an experimental investigation and theoretical evaluation of the transition from the arithmetic thought to the algebraic one in the instruction of mathematics at secondary schools, especially at its lower level. Particularly a great attention was paid to the research of analogies and differences of this process in the distinct milieu of Chinese and Italian pupils attending secondary schools in Palermo. The research was coming out from a wide amount of papers published on this topic. A generalization of published results and own experience have carried new evidences on a greater ability of Chinese pupils towards a theoretical and abstract thinking with a strong tendency to create algorithmic schemes of thought. This ability is caused undoubtedly in a decisive measure by personal skills based on the command of specific style of Chinese writing system.

**Key words:** arithmetical language and arithmetical thought, algebraic language and algebraic thought, concept of a variable and an unknown, Chinese ideographic system of writing