



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Mgr. Katarína Čárska

Autoreferát dizertačnej práce

Porozumenie pravdepodobnosti pomocou štatistického experimentu na úrovni
základnej a strednej školy

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
9.1.8. Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2017

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty Matematiky, fyziky a informatiky, Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: **Mgr. Katarína Čárska**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Školiteľ: **doc. RNDr. Katarína Bachratá PhD.**
Katedra softvérových technológií
Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina

9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzita
Komenského v Bratislave Mlynská dolina 842 48
Bratislava

Úvod

Predkladaná dizertačná práca popisuje budovanie skúsenostnej štruktúry v oblasti pravdepodobnosti u žiakov prostredníctvom úloh využívajúcich štatistické experimenty.

V dizertačnej práci je popísaný súčasný stav vyučovania pravdepodobnosti na Slovensku prostredníctvom prieskumov overujúcich úroveň poznatkov z pravdepodobnosti a výsledky prieskumu vyučovania pravdepodobnosti na základných, stredných školách a gymnáziách. V práci je popísaný súčasný stav vyučovania pravdepodobnosti z pohľadu Štátneho vzdelávacieho programu a prehľad učebníc venujúcich sa vyučovaniu pravdepodobnosti.

Teoretické zázemie nám poskytla *Teória generického modelu profesora Hejného*. Práca na konkrétnych príkladoch popisuje budovanie pojmu pravdepodobnosti rozkladom do piatich etáp poznávacieho procesu prostredníctvom nami navrhnutých štatistických experimentov so žiakmi základných škôl, so študentmi strednej školy a so študentmi prvého ročníka vysokej školy.

Na základe priameho pozorovania v triedach, rozboru písomných žiackych riešení a štúdiom dostupných vedeckých materiálov sme identifikovali príčiny a možné riešenia problémov pri porozumení pojmu pravdepodobnosť.

Ak chceme žiakov učiť o pravdepodobnosti, nestačí ovládať teóriu. Vychádzajúc z myšlienok Víta Hejného, k efektívnemu učeniu potrebujeme predovšetkým poznať proces, akým sa nové poznatky vo vedomí žiaka budujú:

„Ak chceme naučiť žiakov myslieť, ak chceme akcelerovať ich logické a abstraktné myslenie, potom nestačí poznať produkty takejto činnosti – nádherné (pre matematiku ovšem!) axiomatické stavby atraktívnych disciplín súdobej matematiky. Úspešnosť našej práce závisí predovšetkým od toho, či poznáme zákonitosti, ako vzniká a rastie proces „učenia sa myslieť“, či poznáme spôsoby, ako takýto proces môžeme u žiakov navodiť.“

(Hejný, 1978, strana 3)

Ciele dizertačnej práce a metódy použité k ich dosiahnutiu.

Hlavným cieľom dizertačnej práce je zdokumentovať možnosti využitia štatistických experimentov pri vyučovaní pravdepodobnosti predovšetkým na základných školách. Niektoré z námetov a úloh sú využiteľné aj pre študentov stredných škôl.

Čiastkové ciele dizertačnej práce:

- Vytvorenie námetov a úloh využitelných pri vyučovaní pravdepodobnosti pre žiakov prvého a druhého stupňa základných škôl.
- Praktická realizácia navrhnutých experimentov a ich štatistického spracovania s rôznymi vekovými kategóriami.
- Identifikácia jednotlivých etáp poznávacieho procesu na základe priameho pozorovania v triedach a rozboru písomných riešení žiakov.
- Návrh odporúčaní pre vyučovanie pravdepodobnosti s dôrazom na konštruktivistický spôsob výučby.

V rokoch 2011 až 2016 sme uskutočnili viaceré experimenty s rôznymi vekovými skupinami. Týmto experimentom predchádzalo štúdium a analýza domácich a zahraničných informačných zdrojov a pedagogických dokumentov.

- **Písomné riešenia** sme získali od riešiteľov korešpondenčných seminárov Sezamko (žiaci 5. a 6. ročníka) a Sezam (žiaci 7.-9. ročníka a odpovedajúcich ročníkov OG)¹.
- **Priame pozorovania** sme uskutočnili v triedach prvého a druhého stupňa, v jednej triede strednej priemyselnej školy a v rámci seminára s vysokoškolskými študentmi počas jedného semestra. Okrajovo sme experimentovali aj s deťmi predškolského veku.

Dosiahnuté výsledky

Počas našich pozorovaní sa nám podarilo u žiakov v zadaných úlohách identifikovať jednotlivé etapy poznávacieho procesu a zdokumentovať tak budovanie nového poznatku pravdepodobnosti v súlade s Teóriou generického modelu.

Pri samostatnom budovaní (nielen) pojmu pravdepodobnosti sa nám ako veľmi dôležitá ukázala spolupráca a diskusia v skupine. Diskusia je cesta k hlbšiemu porozumeniu riešeného problému.

Na základe štúdia dostupnej vedeckej literatúry a realizovaných experimentov so žiakmi sme identifikovali niektoré príčiny problémov porozumenia pojmu pravdepodobnosti, ktoré popisujeme v nasledujúcom texte.

¹-korešpondenčné matematické semináre SEZAM a SEZAMKO organizuje JSMF Žilina a Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity.

1. Narušený poznávací proces

Deformovaný poznávací proces je jednou z hlavných príčin problémov s porozumením pravdepodobnosti. Poznávací proces, ako ho popisuje Milan Hejný (Hejný, 2014), obsahuje fázy:

- motivácie
- etapu izolovaných modelov
- etapu generického modelu
- abstrakčný zdvih
- etapu kryštalizácie

Narušením tohto procesu dochádza k neporozumeniam, mylným predstavám a nedostatočnému ukotveniu vedomostí, ktoré nie sú trváce a hlboké. Najčastejšie je poznávací proces deformovaný absenciou izolovaných modelov, prípadne je táto etapa nedostatočná. Zbieraniu elementárnych skúseností nie je venovaný dostatok času a prechádza sa priamo na transmisívne odovzdávanie vedomostí, vzťahov, postupov a vzorcov. Často sa stáva, že na utužovanie poznatku neostane dostatok času, nasleduje písomné preverenie vedomostí a prechádza sa rovno k ďalšiemu tematickému celku.

„Znalost, která není opřena o žádný izolovaný model, o žádnou konkrétní představu, je obvykle silně formální.“

(Hejný, Kuřina 2015, str. 131)

Riešením tejto situácie je rešpektovanie poznávacieho procesu žiaka, dostatok izolovaných modelov v podobe náhodných experimentov a diskusia v triedach.

2. Nezájem žiakov, strata motivácie

V súčasnej dobe sa čoraz viac prejavuje nezájem žiakov o školské učivo, neochota učiť sa a zhoršujúca sa úroveň vedomostí, na ktorú upozorňujú aj inštitúcie venujúce sa vzdelávaniu. Na druhej strane pre deti je túžba objavovania nových vecí a spoznávanie zákonitostí sveta prirodzená. Mala by byť jednou zo základných hnacích síl ich rozvoja a rastu. Táto potreba je zakódovaná v našich génoch. Bez túžby skúmať a objavovať nové veci by človek nebol schopný prežiť.

Problém straty vnútornej motivácie sa čoraz častejšie presúva do nižších ročníkov. Týka sa študentov vysokých aj stredných škôl, žiakov na druhom stupni základných škôl, no objavuje sa už aj u žiakov krátko po začatí školskej dochádzky.

Pri výučbe pravdepodobnosti je pravdepodobne hlavnou príčinou straty motivácie nevhodný spôsob sprostredkovania vedomostí, ktorý prebieha predovšetkým prostredníctvom výkladu (Vrábelová, Knejpová, 2009).

Riešením tejto situácie je ponúknuť žiakom neštandardné zaujímavé úlohy, ktoré sa dajú riešiť s pomocou štatistických experimentov a skupinovej spolupráce a vedú k samostatnému porozumeniu pojmu pravdepodobnosti. Pamäťové učenie je vhodné obmedziť na minimum.

3. Sociálno-kultúrne aspekty chápania náhody, kauzálny prístup, intuícia

Žiaci už prichádzajú do školy s vlastnou predstavou a vierou v „náhodu“ a „šancu“, ovplyvnení výchovou, náboženstvom, či kultúrou prostredia, v ktorom žijú. Nie vždy sú ich skúsenosti a intuície v škole vypočítané. Za dverami školy tvrdo narážajú na „školskú pravdepodobnosť“, ktorá v ich očiach nemá nič spoločné s reálnym životom. Ak sa pridá ešte „jazyková bariéra“², utvárajú sa tak dva svety – reálny svet a svet školskej pravdepodobnosti, kde platia len naučené (väčšinou formálne) pravidlá, vzorce a vzťahy.

Rozvoj intuitívneho chápania istoty a neistoty škola často potláča a ignoruje. Buduje tým iný svet „školskej“ pravdepodobnosti, v ktorom sa väčšina úloh nedá vyriešiť bez kombinatorického prístupu. Intuícii nie je dobré ignorovať aj z dôvodu, že môže byť nesprávna. V takýchto prípadoch je potrebné postarať sa o nápravu predstáv detí.

Kultúra, kauzálna výchova, či náboženstvo môžu ovplyvniť neformálne vedomosti z pravdepodobnosti. U niektorých žiakov sa môže prejavovať kauzálny prístup a ignorácia faktora náhody. Náhodné udalosti môžu byť u niektorých žiakov pripisované Božej vôli. Chassapis a Chatzivasileiou (Chassapis a Chatzivasileiou, 2008) popisujú teologickú interpretáciu náhody ako Božiu vôľu, ktorú nemá zmysel predpovedať, nakoľko nevieme s akou pravdepodobnosťou udalosť nastane.

Problémy s pochopením pravdepodobnostných pojmov a vzťahov môžu mať pôvod aj v mylných predstavách žiakov. Časť žiakov bola pri našich experimentoch presvedčená, že nič sa nedeje náhodou a nemá zmysel riešiť úlohy týkajúce sa pravdepodobnosti.

Pri experimentovaní sme sa stretli so žiakmi, ktorí boli presvedčení, že dokážu ovplyvniť výsledky náhodných pokusov (napríklad výsledok hodu kockou), ale aj so žiakmi, ktorí boli presvedčení, že „záleží na tom, kto hádže“. K mylným predstavám patrí aj predsudok rovnako pravdepodobných udalostí – equiprobability bias, popísaný v odseku 4.1.

² V bežnom jazyku spojenie „Pravdepodobne prídem,“ znamená, že prídem v veľkou šancou, s vysokou pravdepodobnosťou. Naproti tomu v matematickej terminológii toto slovné spojenie neposkytuje žiadnu informáciu o pravdepodobnosti javu – „prídem“.

4. Problémy na strane učiteľov

Časť problémov treba hľadať aj na strane učiteľov, či už v nedostatočných vedomostiach a skúsenostiach s vyučovaním pravdepodobnosti alebo v tendencií „učiť tak, ako boli učení“ (Estepa, 2008). Učitelia by mali poznať etapy vývoja pojmu pravdepodobnosti u detí, aby ich v objavovaní mohli povzbudzovať, prípadne vhodne reagovať na mylné predstavy a neporozumenia. Učivo pravdepodobnosti a štatistiky je často krát odsúvané do doby, kedy sú už ostatné tematické celky prebrané a na pravdepodobnosť a štatistiku ostalo málo času. Nie je však výnimkou, že dostatok času neostalo, učivo sa „preletí“, žiakom sa v rýchlosti ukáže pár príkladov riešených učiteľom na tabuli a tým sa táto kapitola uzavrie. Zo strany žiakov často nasleduje reakcia v podobe nezájmu. A pritom by možno stačilo málo – aktívne zapojiť žiakov do vyučovacieho procesu, umožniť im vyberať si témy podľa vlastných záujmov, samostatne zbierať a vyhodnocovať získané údaje.

Pri formálnom spôsobe vyučovania žiaci nie sú schopní aplikovať nadobudnuté vedomosti na problémy bežného života. Zmysel vyučovania tejto časti matematiky sa redukuje len na naučenie sa vzorcov, definícií a úspešné zvládnutie testovania na konci tematického celku. Joan Garfield a Andrew Ahlgren vo svojej štúdií (Garfield a Ahlgren, 1988) venujúcej sa ťažkostiam pri učení základných pojmov pravdepodobnosti a štatistiky, píše:

„Študenti sú schopní zapamätať si vzorce a postupy zreteľne definovaných problémov, ale len zriedka objavujú ich hlbší význam. Následne nie sú schopní aplikovať získané vedomosti na nové situácie. Vedomosti, ktoré sa študenti naučili rýchlo miznú. Mnoho študentov v úvodných kurzoch pravdepodobnosti a štatistiky na vysokých školách neporozumie pojmom, ktoré študujú.“

(Garfield a Ahlgren, 1988, strana 46)

5. Nedostatočné porozumenie pojmov súvisiacich so zlomkami, percentami a desatinnými číslami, problémy s pojmami kombinatoriky

V mnohých prípadoch sa vyučovanie pravdepodobnosti využíva na precvičenie početových úkonov so zlomkami, percentami, desatinnými číslami a pomermi. Veľa žiakov má problémy s porozumením učivu pravdepodobnosti a štatistiky, hoci ich ťažkosti v skutočnosti pramenia v nedostatočnom porozumení práve pojmov súvisiacich so zlomkami, percentami a desatinnými číslami. Dôvodom je fakt, že ťažisko „školskej“ pravdepodobnosti je postavené na týchto pojmoch a operáciách s nimi. Pravdepodobnostné myslenie sa však dá úspešne

rozvíjať už u detí predškolského veku (Fischbein, 1984), ktoré ešte nemajú rozvinuté proporcionálne uvažovanie a nie sú ani schopné porozumieť a pracovať so zlomkami.

Práve zlomky, percentá a pomery sú hnacím motorom „školskej pravdepodobnosti“. Žiak, ktorý nemá dostatočne ukotvené a zautomatizované počítanie so zlomkami, percentami a desatinnými číslami, nemá šancu uspieť ani pri riešení úloh z počtu pravdepodobnosti a štatistiky a už vopred je odsúdený na neúspech.

Ďalším pôvodcom ťažkostí súvisiacich s vyučovaním pravdepodobnosti je kombinatorika. Prikladá sa jej dôležitá úloha, hoci sama je len pomocným nástrojom. Kombinatorika priamo neprispieva k porozumeniu pojmu pravdepodobnosti. Autori Fischer, Malle a Burger tvrdia: „Kombinatorika v rámci stochastiky³ stojí na okraji. Na zistenie hodnôt kombinačných čísel sa dajú využiť kalkulačky a tabuľky.“

(Fischer, Malle a Burger, 1992)

6. Deduktívny prístup v matematike

Klasický prístup používaný v matematike je založený na deduktívnom (apriori) myslení. Teda na postupnosti následných krokov:

definícia → veta → dôkaz → príklad

Štatistické myslenie je induktívne (a posteriori), čo má za následok vznik problémov pri vyučovaní. Induktívny spôsob, typický pre prírodné vedy, je založený na postupnosti:

pozorovanie → vytvorenie modelu → skúmanie modelu → formulácia záveru → testovanie pozorovaním

7. Testovanie pravdepodobnostných vedomostí

Jednou z príčin vznikajúcich ťažkostí môže byť prílišná orientácia nášho školského systému na ľahko merateľné výstupy – percentuálnu úspešnosť pri testovaní, či úspech na prijímacích pohovoroch.

Záver

Hlavným cieľom dizertačnej práce bolo zdokumentovať možnosti využitia náhodných experimentov pri vyučovaní pravdepodobnosti.

Využitie štatistických experimentov pri vyučovaní pravdepodobnosti sa ukázalo nápomocné pri:

³ stochastika je spojenie počtu pravdepodobnosti a štatistiky

- Osvojovanie a budovanie základných pojmov teórie pravdepodobnosti (jav, šanca, istý, nemožný, možný, neistý jav). Mladší žiaci k pomenovaniu javov a procesov používali svoj vlastný jazyk.
- Zlepšovanie praktických zručností pri štatistickom zbere, spracovaní a vyhodnocovaní dát.

S narastajúcimi skúsenosťami získavali žiaci schopnosť porovnávať šance náhodných javov (napríklad pri hode dvomi kockami padne častejšie súčet čísel 7 než súčet 3). Porovnávanie šancí by malo postupne smerovať k číselnému ohodnoteniu šancí (napríklad hod čísla 6 na kocke sa ohodnotí zlomkom $1/6$ alebo pomerom 1:5). V ideálnom prípade by mohol nastať objav číselného významu pravdepodobnosti spontánne, v skupine spolužiakov. Pri našich experimentoch sme k tejto fáze poznávacieho procesu so žiakmi nedospeli. Mladší žiaci prvého stupňa neboli na objav číselného ohodnotenia šancí pripravení a žiaci druhého stupňa, s ktorými sme pracovali, tento poznatok dostali sprostredkovaný transmisívne už v minulosti.

Na základe zistených skutočností sa nám experimentálny prístup v počiatočných budovania pojmu pravdepodobnosti na základných školách javí ako jediný vhodný. Pri experimentálnom prístupe k vyučovaniu pravdepodobnosti, predovšetkým na základných školách, žiaci poznatky aktívne objavujú, nielen pasívne prijímajú.

Pri transmisívnom spôsobe výučby, kedy sa žiakom predkladajú hotové poznatky v podobe formálnych informácií, je poznávací proces výrazne narušený absenciou izolovaných modelov – náhodných experimentov. Aj v takejto situácii vidíme prínos náhodných experimentov a ich štatistického spracovania ako vhodného spôsobu doplnenia chýbajúcich častí poznávacieho procesu a dobudovania prepojení medzi existujúcimi formálnymi poznatkami a vlastnými skúsenosťami žiakov.

Dôležitým cieľom vyučovania pravdepodobnosti má byť tiež poznanie, že náhoda sa správa podľa určitých pravidiel len pri veľmi veľkom počte opakovaní. Pri jednotlivých pokusoch nám informácia o veľkosti pravdepodobnosti náhodnej udalosti nehovorí takmer nič. Ani pravdepodobnosť 99% neznamená istotu, že daný jav pri nasledujúcom náhodnom pokuse nastane. Inými slovami nevieme, či nasledujúci pokus bude jedným z 99 priaznivých alebo to bude práve ten nepriaznivý stý.

Pri vyučovaní pravdepodobnosti je potrebné žiakom ponúknuť zaujímavé problémy a úlohy zodpovedajúce úrovni ich vedomostí. Predovšetkým pri starších žiakoch je vhodné

využiť neštandardné úlohy a zaujímavé problémy (napríklad (Dunn,2005) alebo (Plocki, 2001)).

Návrh a priebeh realizácie náhodných experimentov je vhodné v čo najväčšej miere ponechať v réžii samotných žiakov. Skúsenosti sú omnoho cennejšie než pasívne prijaté vedomosti.

Okrem náhodných experimentov je veľmi dôležitá diskusia a spolupráca, ktorá v triede pri riešení problémov prebieha. Práve diskusia je cestou k hlbokému porozumeniu pojmu pravdepodobnosti (a nielen tohto pojmu). Žiaci prostredníctvom diskusie konfrontujú svoje nápady a výsledky náhodných experimentov so spolužiakmi. Vďaka spolupráci sa pri našich experimentoch výrazne zvýšil počet dostupných výsledkov náhodných experimentov.

V konečnom dôsledku sa experimentálny prístup s využitím štatistického experimentu pri vyučovaní pravdepodobnosti javí pre život vhodnejší než prístup klasický. Náhodné experimenty orientujú vyučovanie na schopnosti žiakov, učiteľ je pri ich realizácii v úzadí ako pozorovateľ.

Náhodné experimenty a ich štatistické spracovanie by mali určite predchádzať výpočtovým úlohám. Žiaci si s ich pomocou dokážu intuitívne osvojiť zákony pravdepodobnosti. Na týchto základoch sa dá neskôr budovať klasická teória pravdepodobnosti. Počiatočné skúsenosti s náhodou by mali žiaci nadobudnúť už na prvom stupni základných škôl, pred stretnutím sa s klasickou definíciou pravdepodobnosti.

Zoznam bibliografických odkazov

- Ácsová, S. (2004), Kedy a ako vyučovať pravdepodobnosť a štatistiku na ZŠ a SŠ. In *Matematika v škole dnes a zajtra*. Ružomberok: KU
- Ahlgreen, A., Garfield, J. (1988), Difficulties in basic concept of probability, *Journal for research in Mathematics Education*, Volume 19, 44-63
- Al-Hajjar, S. (2008), Improving Probability Education Through Statistical Experiments, *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, ISSN: 1109-2769, 7:382-390
- Amit, M. a Jan, I. (2006), Autodidactic learning of probabilistic concepts through games. In: J. Novotná, T. Moravová, H. Krátká a N. Stehlíková), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Charles University, Prague, Vol. II., s. 49–56. ISSN 0771-100X
- Andrew, L. (2009), Experimental Probability in Elementary School. *Teaching Statistics*, 31: 34–36
- Bachratý, H., Grendár, M. a Bachratá, K. (2010), *Ako sa počíta pravdepodobnosť?* Žilinská univerzita, Žilina, ISBN 978-80-554-0226-0

- Bachratá, K., Uramová, J. a Bachratý, H. (2007), Pravdepodobnosť a štatistika môže byť obľúbený predmet pre žiakov aj učiteľov, *Letná škola vyučovania matematiky Pytagoras*, s. 64-70
- Bavoľár J. (2007) Subjektívna pravdepodobnosť v staršom školskom veku, *Sborník příspěvků 10. ročníku konference na Téma Sociální procesy a osobnost*, MSD Brno, ISBN 978-80-7392-016-6
- Bennie, K. (1998), The "slippery" concept of probability: Reflections on possible teaching approaches. *Proceedings of the Fourth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*, Pietersburg: University of the North, p. 53-67
- Bero, P. a Berová, Z. (2008), *Pomocník z matematiky pre 9. ročník ZŠ*, Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, ISBN: 9788071588535
- Z. Berová, P. Bero (2014), *Matematika pre 8.ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava
- Cañizares M. J., Batanero c., Serrano I. and Ortiz j. J. (2003), Children's Understanding Of Fair Games, *European research in mathematics education 3*, Bellaria
- Chassapis, D. and Chatzivasileiou, E. (2008), Socio-cultural influences on children's conceptions of chance and probability, *5th International Conference on Mathematics Education and Society*, Albufeira, Portugal, 20.6.2012 dostupné na http://www.ecd.uoa.gr/~dchaspapis/papers/MES5_Chassapis_Chatzivasileiou.pdf
- Čárska, K. (2012) Módny salón pre hadov (využitie štatistického experimentu pri vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky), In: *Jak učiť matematice žáky ve věku 10-16 let*, Vydavateľský servis Plzeň, str. 91-97
- Dunn, P. K., (2005), We Can Still Learn About Probability By Rolling Dice And Tossing Coins, *Teaching Statistics*, 27: 37-41
- Estepa, A., (2008) *The training of primary school teachers in stochastics and in stochastic education in Europe*, dostupné 20.6.2012 na internete http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T3P6_Estepa.pdf
- Fisher, R., Gunter, M. a Burger H. (1992): *Človek a matematika*, Bratislava: SPN
- Fischbein E. a Gazit A. (1984): Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: *Educational Studies in Mathematics* 15: 1-24
- Garfield J. a Ahlgren A. (1988): Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19:44-63
- Garuti R., Orlandoni A., Ricci R. (2008) Which probability do we have to meet ...? *A case study about statistical and classical approach to probability in students' behaviour*, In C Batanero, G.Burrill, C.Reading & A. Rossman (2008), ICMI/IASE Dostupné na internete 31.3.2017: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publication
- Gauvrit N., Morsanyi K. (2014), The equiprobability Bias from a Mathematical and psychological Perspective, *Advanced in Cognitive Psychology*; 10(4): 119–130, ISSN 1895-1171
- Gelman, A. a Nolan, D. (2002): *Teaching Statistics*. Oxford University Press, Oxford. ISBN 0198572247

- Gelman, A. a Nolan, D. (2002), You can load a die, but you can't bias a coin, *The American Statistician*, 56: 308-311
- Green D. (1997) : *Recognising Randomness, Teaching Statistics*, 19:36–39
- Green D. (1989) School pupils' understanding of randomness, *Studies in mathematics education, The teaching of statistics*, UNESCO, Paříž, Volume 7, 19 - 27
- Hawkins Anne S, Kapadia R. (1984) Children's conceptions of probability — A psychological and pedagogical review, *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, ISSN: 0013-1954, Volume 15, 349-377
- Hecht, T. a kol. (2001), *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ – Pravdepodobnosť Štatistika*, Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, ISBN 80-7158-314-6
- Hejný, M. a kol.(1989), *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava: SPN
- Hejný, V. a Hejný, M. (1978), Prečo je matematika taká ťažká?, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Praha Ročník XXIII číslo 2
- Hejný M., Kuřina F., (2015), *Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování*, Portál, Praha, ISBN 978-80-262-0901-0
- Hejný M.(2014), *Vyučování matematice orientované na budování schémat:aritmetika I.stupně*, Univerzita Karlova v Praze, ISBN 978-80-7290-776-2
- Kafousi, S. (2004), Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks?, *Statistics Education Research Journal*, 3:29-39
- Kopřiva, K., Nováčková, J., Nevolová, D. a Kopřivová, T. (2008), *Respektovat a být respektován*, Kroměříž: Spirála, ISBN 978-80-904030-0-0
- Kubáček, Z., Černek, P., Žabka, J.(2008), *Matematika a svet okolo nás*, Bratislava: Mgr. Pavol Cibulka, ISBN 978-80-969950-1-1
- Kubáček, Z. (2010), *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom (2. časť)*, Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, ISBN 978-80-7158-984-6
- Kvaszová, M.(2009), Proč nám nerozumějí, *Bulletin České statistické společnosti* 2: 10-18
- Kvaszová, M. (2011), *Didaktika statistiky*, dizertačná práca, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Prahe
- Lecoutre, M. P., Durand J.L. a Cordier J (1990), A Study of two Biases in Probabilistic Judgments: Representativeness and Equiprobability, *Advanced in Psychology*, 68: 563–575
- Lendelová, K. (2003), O jednom experimente so žiakmi, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok: KU
- Major, M. a Nawolska, B. (2002), Gra strategiczno-losowa jako środek aktywizacji matematycznej uczniów, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok: KU
- Major, M. a Nawolska, B. (2003), Gry Penneya jako źródło pojęć probabilistycznych dla uczniów, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok: KU
- Masaryk, I. (2010), Pravdepodobnostné myslenie žiakov na základnej škole. *Dizertačná práca*, FMFI Univerzita Komenského v Bratislave
- Matthews, R., Stones F. (1998), Coincidences: the truth is out there. *Teaching Statistics*, 20:17-19

- Melrose, J. (1998), A Probability Game. *Teaching Statistics*, 20:53-54
- Odvárko, O. a Kadleček, J. (2006), *Matematika a její aplikace* (Knížka pro učitele ke školnímu vzdělávacímu programu na 2. stupni ZŠ), Prometheus Praha
- Ojeda, A.M. (1998), The research of ideas of probability in the elementary level of education, *Learning Mathematics* 18: 41-46
- Pereira-Mendoza, I.(1995), Graphing in the Primary School: Algorithm versus Comprehension. *Teaching Statistics*, 17: 2-6
- Piaget, J. a Inhelder, B.(1975) *The Origin of the idea of chance in children*, Routledge &Kegan Paul, ISBN 0710082002
- Płocki, A. (2001), Stochastické paradoxy ako prostriedok aktivizácie žiakov, *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok: KU
- Płocki, A.(1997), *Stochastyka I*. Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków
- Płocki, A., Muzyczka, Z. (2010) Geometrická pravdepodobnosť v matematike pre každého. In: *MIF 36, XIX. ročník*, Prešov. ISSN 1335-7794, s. 68
- Płocki, A. (2004), *Pravdepodobnosť okolo nás*, Katolícka univerzita, Ružomberok
- Płocki, A. (1982), O náhode a pravdepodobnosti, *ŠMM 50*, ÚV OM, Mladá Fronta
- Repáš V. a kol.(2002), *Matematika pre 8. ročník ZŠ, 2. diel*, Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, ISBN 80-7158-313-8
- Rogers, C. (1998), *Sloboda učiť sa*, Modra: Persona 1998
- Saxl, I. (2005): Statistické myšlení a jeho výuka. In: *Pravděpodobnost a statistika na střední škole*. Sborník prací didaktického semináře na MFF UK v Praze. Matfyzpress, Praha, s. 1-16. ISBN 80-86732-23-1
- Šedivý O. a kol.(1998), *Matematika pre 8. ročník ZŠ, 2. časť*, Bratislava: SPN
- Šedivý O. a kol.(2002), *Matematika pre 9. ročník ZŠ, 2. časť*, Bratislava: SPN
- Šotr, B. (1967), *Populárne o počte pravdepodobnosti*, STVL, Bratislava
- Špinklová, M. (2007), Přítomná historie výuky pravděpodobnosti a statistiky, 28. *Mezinárodní konference historie matematiky*, Jevíčko,100-103
- Švihurová, M. (2009) Objavovanie zákonov pravdepodobnosti v dejinách, *Seminárna práca*, Ružomberok: KU
- Utts, J.M. a Heckard, R.F. (2007), *Mind on Statistics*, Belmont
- Vrábelová M., Knejpová E. (2009), Prieskum vyučovania pravdepodobnosti na ZŠ, SOŠ a gymnáziách, Zborník zo VII.nitrianskej matematickej konferencie, *Acta Mathematica* 12, str. 299
- Watson, J.M., Collis, K.F. a Moritz, J.B. (1995), Children's Understanding of Luck, *Atweh & Flavel MERGA* 18: 550-556, 12. 6 2012 dostupné na internete
http://www.merga.net.au/documents/RP_Watson_Collis_Moritz_1995.pdf
- Way, J. (2003), The development of children's reason strategies in probability tasks. *26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

Žabka, J. a Černek, P.(2012), *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom (2. časť)*, Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, ISBN: 9788081201257

Internetové zdroje

Goliáš P., Mikuláš R. (2006), Aké sú dôsledky zlyhaní, ktoré odhalila PISA v našom školstve, INEKO, dostupné na internete 28.2.2017: <http://www.ineko.sk/clanky/ake-su-dosledky-zlyhani-ktore-odhalila-pisa-v-nasom-skolstve>

Štátny pedagogický ústav, *Štátny vzdelávací program MATEMATIKA, Príloha ISCED 1, 2.* upravená verzia pre 1. až 4. ročník ZŠ, Bratislava: Štátny pedagogický ústav 2009, dostupné na internete 6.9.2012:

https://www.iedu.sk/vyucovanie_a_studium/vyucovacie_predmety/xKatalog_Dokumenty/Matematika%20ISCED%201.pdf

Štátny pedagogický ústav, *Štátny vzdelávací program MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 2*, Bratislava: Štátny pedagogický ústav 2010, dostupné na internete 6.9.2012:

http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isc_ed2.pdf

Štátny pedagogický ústav, *Štátny vzdelávací program MATEMATIKA, Príloha ISCED 3A, 2.* upravená verzia, Bratislava: Štátny pedagogický ústav 2009, dostupné na internete 6.9.2012:

https://www.iedu.sk/vyucovanie_a_studium/vyucovacie_predmety/xKatalog_Dokumenty/Matematika%20ISCED%203A.pdf

Abstrakt

Predkladaná dizertačná práca popisuje možnosti využitia štatistických experimentov pri vyučovaní pravdepodobnosti na základných a stredných školách. Prostredníctvom priamych pozorovaní na hodinách a rozboru písomných žiackych riešení sa nám podarilo popísať budovanie matematického pojmu pravdepodobnosť v súlade s *Teóriou generického modelu prof. Milana Hejného*, ktorá poznávací proces žiaka rozkladá do viacerých etáp. Vďaka možnostiam diagnostiky matematických predstáv žiaka, ktoré táto metóda umožňuje, sme identifikovali najčastejšie miesta narušenia poznávacieho procesu a popísali možnosti nápravy tohto stavu. V práci sú vypracované analýzy experimentov vykonaných so žiakmi základných škôl a študentmi stredných škôl, na základe ktorých je možné orientovať sa v zostavenom didaktickom materiáli a s porozumením ho použiť pri práci s deťmi.

Abstract

The submitted dissertation thesis describes the possibilities of using statistical experiments in teaching of probability at the primary and secondary school level. Using direct observations of lessons and analysis of pupils' written solutions, we describe building of the mathematical concept of probability in accordance to *prof. Milan Hejný's Theory of generic models*, which recognizes several stages of the pupil's learning process. Since this method enables diagnostics of the pupils' mathematical thinking, we were able to identify the most problematic spots in the learning process and describe the possible corrections. The thesis includes analyses of experiments performed with primary school pupils and secondary school students, which help in orienting the reader in the created didactic materials and in using them with understanding in the work with children.

Publikované práce autora

AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

AFD01 Čárska, Katarína [UKOMFKAGDMd] (100%) : The use of statistical experiment in teaching of probability in elementary school
Lit. 2 zázň., 3 obr.
In: MiST 2016 : Mathematics in Science and Technologies. - [North Charleston] : CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. - nestr. [5 s.]. - ISBN 978-1533605665
[MiST 2016 : Mathematics in Science and Technologies : Conference. Fačkovské sedlo, Kľak, 2.-7.1.2016]

AFH Abstrakty príspevkov z domácich vedeckých konferencií

AFH01 Čárska, Katarína [UKOMFKAGDMd] (100%) : Hracie kocky - hlavný či pomocný nástroj
In: 43. konferencia slovenských matematikov. - Žilina : EDIS, 2011. - S. 26. - ISBN 978-80-554-0454-7
[Konferencia slovenských matematikov 2011. 43., Jasná pod Chopkom, 1.-4.12.2011]

BEC Odborné práce v zahraničných recenzovaných zborníkoch (konferenčných aj nekonferenčných)

BEC01 Čárska, Katarína [UKOMFKAGDMd] (100%) : Módny salón pre hadov : (využitie štatistického experimentu pri vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky)
3 obr.
In: Jak učít matematice žáky ve věku 10 - 16 let. - Plzeň : Vydavatelský servis, 2012. - S. 91-96. - ISBN 978-80-86843-34-6
[Jak učít matematice žáky ve věku 10 - 16 let : celostátní konference. Litomyšl, 20.-22.10.2011]