UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY MATEMATIKY

PAEDDR. JANA BLUNÁROVÁ

ARGUMENTÁCIA ŽIAKOV ZŠ V PLANIMETRII

AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE

na získanie vedecko-akademickej hodnosti *philosophiae doctor*
vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2011

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: PaedDr. Jana Blunárová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
842 48 Bratislava

Školiteľ: doc. RNDr. Ivan Trenčanský, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
842 48 Bratislava

Oponenti: ____
____
____
____
____

____
____
____
____
____

____
____
____
____
____

Autoreferát bol rozoslaný dňa ______________

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa ______________ o ______________ hodine pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa ______________ vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, miestnosť ______________.

Predseda spoločnej odborovej komisie:

____
____
____
____
____

Obsah autoreferátu

Úvod....4
1 Argumentácia....5
2 Dôkaz....6
3 Teoretické východiská....7
4 Súčasný stav problematiky....7
5 Didaktický výskum....8
5.1 Formulácia cieľov a hypotéz....8
5.2 Metodológia....8
5.3 Výber experimentálnych úloh....8
5.4 Výber experimentálnych skupín....8
5.5 Výber prípravných úloh....9
5.6 Analýza a priori experimentálnych úloh....9
5.7 Priebeh experimentu....11
5.8 Výsledky výskumu....11
6 Sada neriešených úloh z planimetrie....14
Záver a prínos dizertačnej práce....14
Zoznam publikovaných prác predkladateľa....15
Zoznam použitej literatúry....16
Summary....21

Úvod

Už zo starovekého Egypta a Babylónie sa zachovalo mnoho záznamov, ktoré riešia bežné úlohy a problémy. V starovekej Číne sa rozvíjala logika vďaka nasledovníkom filozofa Mo Tiho, ktorí svoje tvrdenia z teórie poznania logicky dokazovali. Pojem matematický dôkaz má však pôvod až v starovekom Grécku. Najstaršie zachované matematické dôkazy pochádzajú z Euklidových Základov.

Argumentácia a matematický dôkaz sú základnými prvkami matematiky. Nenájde sa nikto, kto by spochybnil ich význam. Táto problematika sa dostáva na popredné miesta aj v oblasti výskumu v didaktike matematiky. Dôležitosť tejto téme prikladal aj americký matematik a vysokoškolský profesor *György Pólya (1887 – 1985).* Viedol učiteľov k tomu, aby nabádali žiakov k usudzovaniu, lebo: *Radosť z objavu je najlepším podnetom pre ďalšiu prácu. Najlepšia cesta, ako sa niečo naučiť, je objaviť to.*

O dôležitosti dôkazu a argumentácie hovorí aj fakt, že organizátori ju v rámci štúdie PISA zaradili medzi jednu z ôsmych matematických kompetencií a sleduje ju vyše pätina úloh štúdie TIMSS. Tieto medzinárodné v*ýskumy poukázali na to, aké významné miesto* v praktickom živote tieto dva pojmy zohrávajú a že spôsobujú žiakom nemalé problémy. Možno preto sú jednou z „najneobľúbenejších“ súčastí vyučovania matematiky.

Táto skutočnosť, naše vlastné skúseností, skúseností kolegov z pedagogickej praxe a štúdium odbornej literatúry nás viedli k tomu, aby sme sa pokúsili eliminovať nechuť žiakov argumentovať a pomocou vyučovania zameraného na prezentovanie vlastných myšlienok a postupov, zdôvodňovania – argumentovania im pomohli zlepšiť vzťah k úlohám tohto charakteru v geometrickom kontexte.

Predkladaná dizertačná práca obsahuje teoretickú (kap. 1 - 6) a praktickú časť (kap. 7 - 9). V teoretickej sa zameriavame na fylogenézu a ontogenézu argumentácie a pojem dôkaz. Ako teoretické východisko pri realizovaných experimentoch nám slúži Teória didaktických situácií, pričom na vyhodnotenie využívame štatistický program CHIC. Venujeme sa aj obsahu učiva planimetrie pred a po školskej reforme a vzdelávaciemu systému Fínska i jeho učebným osnovám, pretože fínski žiaci v testovaní PISA dosahujú už dlhodobo popredné miesta. Zaoberáme sa aj výsledkami dostupných vedeckých prác mnohých autorov. Teoretickú časť práce uzatvára prehľad o úlohách a výsledkoch, ktoré dosiahli slovenskí deviataci v celonárodnom testovaní od roku 2005.

Praktická časť je rozdelená na tri kapitoly. V prvej sa venujeme príprave a realizácii predvýskumu. V druhej časti sme na základe výsledkov predvýskumu pripravili a realizovali výskum v oblasti argumentácie v planimetrii. Tretiu časť tvorí sada neriešených úloh vhodná na použitie vo vyučovaní. Ciele výskumnej časti práce sú nasledovné:

C1 – Pripraviť adidaktickú situáciu pre každú zo zvolených experimentálnych úloh (zameraných na konkrétny poznatok), dôkladne a priori analyzovať úlohy a a posteriori analyzovať ich riešenia.

C2 - Navrhnúť taký spôsob vyučovania, ktorý kladie dôraz na zdôvodňovanie jednotlivých krokov riešenia a aplikovať ho do praxe.

C3 – Pripraviť sadu neriešených úloh, ktorých riešením podporíme u žiakov pokrok v oblasti argumentáci.

Formulovali sme hlavnú hypotézu, ktorú sme rozdelili na štyri čiastkové, pričom sme sa zamerali jednak na *Balacheffovu* klasifikáciu stupňov dokazovania z hľadiska úrovne dokazovania, ako aj na vývin geometrického myslenia podľa manželov *van Hiele*:

H: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky cieľavedome vedie k argumentácii, dosiahnu z hľadiska úrovne dokazovania, resp. vývoja matematického myslenia lepšie výsledky v porovnaní so žiakmi, kde sa vyučovanie realizuje tradične.

H1: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky vedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú (podľa N. Balacheffa) na úroveň „generický príklad“.

H2: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky nevedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú (podľa N. Balacheffa) na úroveň „základná skúsenosť“.

H3: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky vedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú z hľadiska vývinu matematického myslenia (podľa van Hiele) na úroveň „neformálna dedukcia“.

H4: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky nevedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú z hľadiska vývinu matematického myslenia (podľa van Hiele) na úroveň „opisno-analytická“.

Časť dizertačnej práce mohla vzniknúť vďaka Grantu Univerzity Komenského (č. UK/16/2011).

1 Argumentácia

Znamená uvádzanie argumentov pre určité tvrdenie, súhrn dôvodov. Žiaci prechádzajú pri vývoji argumentačného myslenia rôznymi štádiami. *Piaget* popisuje, ako myslenie postupuje od nesystematického k empirickému a nakoniec logicko-deduktívnemu. *D. H. Clements* a *kol.* (1992) popísali tento vývoj v troch stupňoch.

Vývoj matematického myslenia analyzovali aj manželia *van Hiele*. Zaoberali sa špecifickým geometrickým myslením, jeho vývinom cez rôzne stupne pod vplyvom školských osnov. *Gazdová* (2010) podľa *Tall* (2008), *Van de Walle* (2001), *D. H. Clements a kol*. (1992) opísala 5 *van Hiele* úrovní:

1. vizuálna - žiaci uvažujú o geometrický útvaroch na základe ich vzhľadu a vizuálnych transformácií, ktoré vykonávajú na obrazoch týchto tvarov. Nevedia ešte diskutovať o charakteristikách útvarov, sú presvedčení, že tvrdenie je pravdivé, ak vyzerá pravdivo na obrázku. Objektmi myslenia sú tvary a vzhľad. Produktom myslenia sú triedy alebo skupiny podobných, rovnakých tvarov. Príkladom je trojuholník rozpoznávaný ako útvar s tromi stranami, napr. dopravná značka daj prednosť v jazde. Podobne možno rozlíšiť štvoruholník, päťuholník, kruh...

2. opisno-analytická - žiaci uvažujú experimentálne, stanovujú vlastnosti tvarov pozorovaním, meraním, kreslením a realizáciou modelov. Identifikujú tvary nie ako vizuálne celky, ale na základe ich vlastností. Nerozoznávajú ešte vzťahy medzi charakteristikami útvarov. Sú presvedčení, že všetky útvary podobného typu majú rovnakú vlastnosť. Ak ju overia odmeraním na pár príkladoch alebo vyrobia model, nemajú potrebu pre verifikáciu prostriedkami dedukcie. Objektmi myslenia sú už triedy útvarov. Produktom myslenia sú vlastnosti útvarov. Príkladom je trojuholník tvorený tromi čiarami, podobne štvorec má štyri rovnaké strany a pravé uhly, podobne obdĺžnik...

3. neformálna dedukcia - žiaci uvažujú logicky, vedia formulovať abstraktné definície. Vedia rozlišovať medzi nutnou a postačujúcou podmienkou pre pojem, rozumejú a niekedy vytvárajú logické argumenty. Vedia hierarchicky klasifikovať tvary na základe analýzy ich vlastností a podať neformálne argumenty na zdôvodnenie ich klasifikácie. Vidia, že deduktívne zdôvodňovanie môže byť vhodné pre vysvetlenie vzťahov, ktoré nie sú zrejmé, ale nevidia potrebu využitia dedukcie pre verifikáciu. Objektmi myslenia sú vlastnosti útvarov. Produktom myslenia sú vzťahy medzi vlastnosťami geometrických objektov. Napríklad rozlišujú triedy a hierarchiu útvarov: štvoruholníky zahŕňajú aj rovnobežníky, kam patria aj pravouholníky, ktorých podskupinou sú štvorce... podobne každý štvorec je aj kosoštvorec a každý lichobežník nie je rovnobežník, ale je štvoruholník.

4. formálna dedukcia - žiaci si uvedomujú, že čo sa javí ako zrejmé, môže byť nepravdivé. Argumentujú formálne logickou interpretáciou geometrických tvrdení, axióm, definícií a viet. Sú schopní tvoriť dôkazy vytváraním postupnosti tvrdení, ktoré logicky zdôvodňujú výsledok ako dôsledok daného, rozumejú vzájomným vzťahom medzi nedefinovanými pojmami, postulátmi, definíciami, vetami a formálnym dôkazom, uvedomujú si ich úlohu v deduktívnom systéme, vidia, že rôzne dôkazy jedného tvrdenia môžu byť platné. Objektmi myslenia sú vzťahy medzi vlastnosťami geometrických objektov. Produktom myslenia sú deduktívne axiomatické systémy v geometrii.

5. dogmaticko-metamatematická - žiaci argumentujú o matematickom systéme, vedia analyzovať dôsledky manipulácie s axiómami a definíciami, vedia že pravdivosť tvrdenia závisí na deduktívnom systéme. Vedia porovnávať rôzne systémy napr. euklidovské a neeuklidovské geometrie. Objektmi myslenia sú deduktívne axiomatické systémy v geometrii. Produktom myslenia je porovnanie a rozdiely medzi rôznymi axiomatickými systémami v geometrii.

2 Dôkaz

Na pojem *dôkaz* neexistujú jednotné predstavy. Zo sociálneho hľadiska ho môžme považovať za *presvedčenie o pravdivosti výroku*.

N. Balacheff (1998) vytvoril klasifikáciu stupňov procesu dokazovania. Dôkaz rozdelil na dva hlavné typy so štyrmi druhmi dôkazov.

V nasledujúcich riadkoch sme z hľadiska úrovne dokazovania overili tvrdenia:

1. *Ukážte, že súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo*.
2. *Ukážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je priamy uhol*.

Pragmatický dôkaz je založený na konkrétnych príkladoch a činnosti, preto sa odporúča na použitie vo vyučovaní matematiky na základných školách. Môžme rozlíšiť:

1. Naivný empirizmus - tvrdenie potvrdené iba na niekoľkých príkladoch.

Tvrdenie 1: žiak vyskúša niekoľko párov nepárnych čísel: 5 + 11 = 16, 15 + 31 = 46, 35 + 27 = 62, teda súčet je vždy párny.

Tvrdenie 2: žiak presne odmeria veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka, sčíta ich. Ak rysoval presne, vyjde mu 180°.

2. Základná skúsenosť - je potvrdenie vhodne vybratým príkladom, umožňuje rozhodnúť sa medzi dvoma hypotézami.

Tvrdenie 1: žiak overí rôzne typy dvojíc, niektoré s malými číslami 1 + 3 = 4, iné s veľkými číslami 415 + 273 = 688, ďalšie s rovnakými číslami 15 + 15 = 30 a nakoniec s prvočíslami 13 + 31 = 44.

Tvrdenie 2: žiak zopakuje svoje merania na rôznych typoch trojuholníkov, na rovnostrannom, rovnoramennom, pravouhlom, ostrouhlom, tupouhlom. Pri presnom meraní by znova malo vyjsť 180°.

3. Generický príklad - je potvrdenie založené na príklade, ktorý je charakteristickým reprezentantom nejakej triedy.

Tvrdenie 1: žiak počíta: 15 + 21 = (2.7 + 1) + (2.10 + 1) = 2.7 + 2.10 + 2 = = 2.(7 + 10 + 1) = 18, čo je párne číslo. Toto môžme urobiť so všetkými nepárnymi číslami.

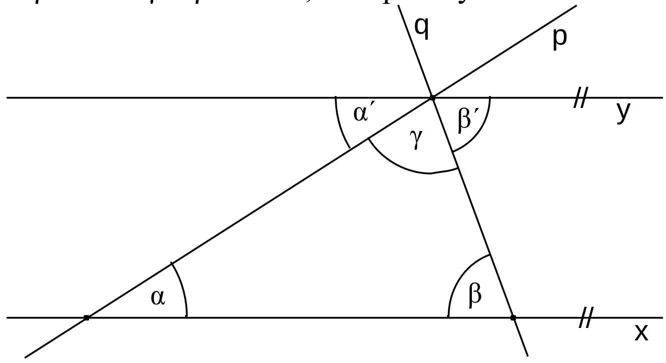
Tvrdenie 2: žiak zistí, že trojuholník nebol iba náhodne vybratý z množiny trojuholníkov, ale že je to reprezentant, ktorý zastupuje každý trojuholník, čiže súčet je 180°.

Intelektuálny dôkaz je založený na abstraktnej formulácií vlastností a vzťahov medzi nimi. Znalosť sa stane objektom premýšľania až diskusie.

4. Duševný pokus - zvnútornenie činností, oddelenie od špecifických príkladov, symbolické výpočty, žiaden experiment, využitie formálnych, symbolických vyjadrení.

Tvrdenie1: žiak môže žiak nepárne číslo zapísať v tvare 2n +1, súčet dvoch nepárnych čísel možno teda vyjadriť ako (2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1) = 2k, kde 2k je párne číslo.

Tvrdenie 2: priamky x, y sú rovnobežné, priamky p, q s nimi rôznobežné, prechádzajúce vrcholom C trojuholníka. Žiak využije vlastnosti striedavých uhlov: $\acute{\alpha} = \alpha$, $\beta = \beta'$. Potom $\acute{\alpha} + \gamma + \beta' = \alpha + \gamma + \beta = 180°$, teda priamy uhol.



Obr. 2.2.1: Súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka

Medzi prvými dvoma a nasledujúcimi dvoma je základný rozdiel. Generický príklad duševný pokus už nemajú za cieľ „ukázať", že veta je pravdivá, pretože „to funguje", ale uviesť dôvody, na základe ktorých bude stanovená jej platnosť. Medzi týmito druhmi čiastkových dôkazov existuje istá hierarchia. Pre prechod od generického príkladu duševnému pokusu je potrebný presun od praktickej činnosti k myšlienkovej, a tiež vyčlenenie z kontextu, ktoré je znakom rozhodujúceho pokroku pri tvorbe vedomostí. Toto poukazuje na neodlučiteľnú spätosť vývoja prostriedkov dokazovania s vývojom vedomostí a jazykových prostriedkov.

3 Teoretické východiská

Kľúčovou bude pre nás **Teória didaktických situácií** (TDS), ktorej zakladateľmi boli *Guy Brousseau* a *Yves Chevallard*. Kapitola je spracovaná na základe prác autorov: *H. Bereková a kol.* (2001, 2003), *G. Brousseau* (1998), *I. Kohanová* (2006, 2008), *E. Kupková* (2000), *M. Regecová* (2005), *M. Tisoň* (2009), *I. Trenčanský* (1998, 2001), *I. Trenčanský a kol.* (2007).

TDS je východiskom pre analýzu úloh. Rozlišujeme dva typy: *analýzu a priori* a *analýzu a posteriori*. Vychádzajú z usporiadania jednotlivých hladín prostredí a situácií. Vzájomné interakcie subjektu s prostredím vytvárajú *hladiny didaktických situácií* s príslušnými typmi didaktického prostredia, na ktoré sme sa v analýza a priori zamerali.

Štatistický program CHIC ponúka porovnanie podobnosti didaktických premenných stanovených v dôkladnej analýze a priori, poukazuje na vzťahy kohézie medzi premennými a percentom pravdepodobnosti ich realizácie vyjadruje aj pravdepodobnosť uskutočnených implikácií medzi premennými. Softvér sleduje aj vzťahy medzi niekoľkými kategóriami a inými premennými, čím predstavuje prepojenie medzi kvantitatívnou a kvalitatívnou analýzou a posteriori. Jeho výstupom sú tri typy grafov a to strom podobnosti, kohezívny strom a implikatívny graf. Ich význam je bližšie opísaný v dizertačnej práci.

4 Súčasný stav problematiky

Vzdelanie sa stalo kľúčom k úspechu nielen pre jednotlivca, ale aj celé krajiny. Je dôležité, aby sa celá spoločnosť venovala tak dôležitej téme, akou bezpochyby je školský systém. Ten slovenský začína monitorovať výsledky vzdelávania nielen v rámci medzinárodných výskumov a štúdií (*PISA*, *TIMSS*), ale aj domácimi národnými meraniami ako napr. *Testovanie 9*. Štúdia PISA zisťuje, ako žiaci dokážu využiť to, čo sa v škole naučili a nie to, či vedia zreprodukovať naučené. Zameriava na medzinárodné porovnanie vedomostí a zručností aj v oblasti matematickej gramotnosti. Hlavným cieľom štúdie TIMSS je skúmať podstatu, príčiny a vplyv rozdielov vo výsledkoch vzdelávania v medzinárodnom meradle. Výsledky slovenských žiakov v oblasti argumentácie a planimetrie uvádzame v dizertačnej práci.

Problematikou argumentácie a dokazovania sa zaoberalo množstvo autorov, napr. *J. Balážová* (2007, 2008 – I, 2008 - II) , *J. Blunárová* (2010, 2011), *M. Bestrová* (2009) *E. Betková* (2002), *T. Danková* (2002), *M. Florková* (2007), *Z. Gazdová* (2010), *T. Hopková* (2003), *Kublihová* (1996), *M. Machníková* (2000), *L. Mäsiarová* (1999), *M. Mokriš* (2006), *I. Závadová* (1998, 2003).

5 Didaktický výskum

Vychádza z teoretickej časti tejto práce a zaoberá sa výberom i implementáciou úloh zameraných na rozvoj argumentácie v planimetrii do vyučovacieho procesu a následnou analýzou výsledkov prác žiakov základnej školy.

5.1 Formulácia cieľov a hypotéz

Pre potreby nášho výskumu je prospešné začať so štúdiom historickej i súčasnej odbornej literatúry, pedagogickými dokumentami, ako sú „predreformné“ učebné osnovy, plány a vzdelávacie štandardy, „poreformný“ štátny vzdelávací program a „staré“ i „nové“ učebnice matematiky pre základné školy.

Stanovené ciele a formulované hypotézy pre výskumnú časť práce sú uvedené v úvode tohto autoreferátu.

5.2 Metodológia

Za naše metódy skúmania sme si v súlade s Teóriou didaktických situácii a cieľmi našej práce zvolili *klinické pozorovanie* a *analýzu a posteriori* podľa G. Brousseaua. V podmienkach nášho výskumu to znamená pozorovať žiakov základnej školy počas adidaktickej situácie pri riešení prípravných úloh a analyzovať a posteriori písomné práce žiakov s dôrazom na argumentáciu.

5.3 Výber experimentálnych úloh

Realizácii analýzy a priori predchádzala analýza štátneho vzdelávacieho programu, rámcových učebných osnov, vzdelávacieho štandardu z matematiky, kľúčových kompetencií a súčasne platných učebníc matematiky. Cieľom bolo vybrať vhodné úlohy, ktorými dokážeme čo najadekvátnejšie overiť formulované hypotézy.

Aby sme predišli možným problémom s neporozumením daných experimentálnych úloh, zamerali sme sa na úlohy s matematickým kontextom. Úlohy mali byť určené pre žiakov ôsmeho alebo deviateho ročníka základných škôl. To z dôvodu, že žiaci už preberali učivo o uhloch a táto téma sa nám javí ako vhodná na rozvíjanie schopností žiakov argumentovať. Zadanie sme volili tak, aby žiaci pri svojom riešení nesmeli používať uhlomer a boli teda nútení zdôvodňovať kroky riešení.

5.4 Výber experimentálnych skupín

Zaoberali sme sa aj problémom výberu skupín, resp. tried žiakov, ktoré budú participovať na našom didaktickom výskume. Hlavným kritériom bolo, aby mali žiaci prebrané učivo o uhloch (typy uhlov - susedné, vrcholové, pravé, priame, plné, grafické sčítavanie veľkostí uhlov, konštrukcia osi uhla), o rovnostranných trojuholníkoch, ďalej ochota učiteľa spolupracovať a rôznorodosť žiakov z hľadiska nadobudnutých poznatkov. Požadovali sme dve paralelné triedy rovnakého ročníka, ktoré vyučuje ten istý učiteľ a ďalšiu triedu. Na základe analýzy a priori v kapitole 8.8.2 sme posúdili, že úloha je vhodná pre žiakov 8. a 9. ročníka ZŠ. Didaktického výskumu sa zúčastnilo 28 žiakov ôsmeho a 21 žiakov deviateho ročníka, spolu 49 žiakov. Podľa slov p. učiteľky, ktorá v týchto skupinách vyučuje matematiku, vedomosti žiakov oboch skupín C a D sú porovnateľné, žiaci skupiny C sú „mierne slabší“.

C skupina – tvorilo ju 13 žiakov A triedy ôsmeho ročníka ZŠ vo veku 13 – 14 rokov. Priemerná úspešnosť štvrťročných písomných prác z matematiky v školskom roku 2010/2011 bola 58%. Keďže žiaci dosahovali „mierne slabšie výsledky“ v porovnaní so skupinou D, rozhodli sme sa vyučovanie realizovať s experimentálnou zmenou, v didaktickej aj adidaktickej situácii sme vyžadovali zdôvodňovanie jednotlivých krokov riešenia.

D skupina – tvorilo ju 14 žiakov B triedy ôsmeho ročníka tej istej ZŠ vo veku 13 – 14 rokov. Priemerná úspešnosť štvrťročných písomných prác z matematiky v školskom roku 2010/2011 bola 65%. Keďže ide o skupinu s „mierne lepšími výsledkami“, vyučovanie prebiehalo klasicky a v didaktickej situácii sme nevyžadovali argumentáciu. Zamerali sme sa na riešenie úloh tak, ako boli žiaci zvyknutí na hodinách matematiky.

E skupina – pozostávala z 21 žiakov deviateho ročníka rovnakej ZŠ vo veku 14 – 15 rokov. V tejto skupine sme neriešili prípravné úlohy. Experimentálne úlohy sme riešili na jednej hodine formou písomnej prácu, ktorú však považujeme za didaktickú situáciu z dôvodu, že žiakov mohol učiteľ v rámci sociálnej zložky materiálneho prostredia naviesť vhodnými otázkami k riešeniu tak, že ich nabádal k zdôvodňovaniu.

5.5 Výber prípravných úloh

Aby sme v pripravovanej adidaktickej situácii predišli častým chybám a ukázali žiakom, akým spôsobom sa dá argumentovať pri riešení úloh podobného charakteru, zostavili sme prípravné úlohy P1 – P5. V tejto didaktickej situácii je potrebné určité **materiálne prostredie**, ktorého súčasťou sú zložky: ***materiálna*** - papier so zadaním úloh, pero, ceruzka, kružidlo, pravítko, školská tabuľa; ***kognitívna*** - vedomosti a poznatky na rôznej úrovni (susedné, vrcholové, striedavé, priame, plné uhly, rovnostranný trojuholník, štvorec, grafické sčítavanie veľkostí uhlov, os uhla...); ***sociálna*** - učiteľka a žiaci prítomní na hodine matematiky. Kognitívna zložka materiálneho prostredia je podrobne opísaná v prílohe T.

Argumentáciu v riešeniach prípravných úloh môžme podľa *N. Balacheffa* z hľadiska úrovne dokazovania zaradiť do kategórie *pragmatický dôkaz*, pretože dokazovanie na základnej škole je založené na konkrétnych príkladoch a činnostiach, špeciálne argumentáciu v prípravných úlohách považujeme za *generický príklad*. Podľa vývinu geometrického myslenia, tak ako ho klasifikovali manželia van Hiele, je daná argumentácia považovaná za *neformálnu dedukciu*. Žiaci uvažujú logicky, formulujú, niekedy dokonca vytvárajú logické argumenty. Z hľadiska jazyka dokazovania považujeme všetky riešenia prípravných úloh za *neformálne*, presnejšie *geometrické dôkazy*.

5.6 Analýza a priori experimentálnych úloh

Zostupná analýza a priori umožňuje pochopiť predovšetkým hľadisko učiteľa. Vychádza z noosférickej situácie S_3 a ústi do situácie učenia S_{-1}.

Prostredie **noosférickej situácie S_3** je konštrukčným prostredím M_3. Pre potreby nášho experimentu ho tvorila tak analýza úlohy zadanej v predvýskume, analýza štátneho vzdelávacieho programu, rámcových učebných osnov a plánov, odporúčaných vzdelávacích štandardov, ako aj nových učebníc pre piaty a šiesty ročník (ďalšie doposiaľ neboli vydané). Učiteľ P_3, didaktik, bol v interakcii s tým, čo o svojej triede vedel, čo sa žiakov snažil naučiť.

Východiskom pre prostredie **konštrukčnej situácie S_2**, projekčné prostredie M_2, bola jedna hlavná a štyri čiastkové hypotézy, ktoré sme už sformulovali v úvode.

V tejto fáze sme mohli začať overovať validáciu stanovených hypotéz. V konštrukčnej situácii sa učiteľ P_2, konštruktér, zameral na výber experimentálnych úloh pre ďalšiu výskumnú činnosť v didaktike matematiky.

V **projektovej situácii S_1** navrhol učiteľ P_1, projektant, formuláciu dvoch úloh pre uvažujúceho žiaka E_1. Učiteľ predvídal jednotlivé stratégie riešenia úlohy (kap. 8.7 dizertačnej práce), chyby, ktorých sa žiak mohol dopustiť a ťažkosti, s ktorými sa mohol žiak stretnúť. Keďže predvýskum prebiehal na základnej škole, očakávali sme viaceré možné riešenia experimenálnej úlohy č. 1 a 2. Aby sme predišli chybám a deklarovali žiakom, ako postupovať pri riešení a argumentovaní, použili sme v didaktickej situácii osvojovania prípravné úlohy, ktoré mali verifikovať staré poznatky potrebné k ich riešeniu.

Keďže naším cieľom bola realizácia samostatnej písomnej práce (riešenie experimentálnych úloh), v tejto fáze sa prelínala **didaktická situácia S_0** so **situáciou učenia S_{-1}**. Učiteľ P_0 vystupoval len na začiatku hodiny, oboznámil žiakov E_0 s pravidlami a usmernil priebeh vyučovacieho procesu. V ďalšej fáze vystupoval učiteľ v role pozorovateľa P_{-1}. Žiak vystupoval ako poznávajúci žiak E_{-1}, bol riešiteľom problému, uvažoval, formuloval, zdôvodňoval. Toto prostredie situácie učenia S_{-1} sme označili ako modelové prostredie M_{-1}.

V tejto úrovni sa stretávajú zostupná a vzostupná analýza a priori.

Hľadisko žiaka nám umožňuje pochopiť **vzostupná analýza a priori**. Tá vychádza z cieľovej situácie S_{-3} a zasahuje až po projektovú situáciu S_1.

Prostredie **cieľovej situácie S_{-3}**, ***materiálne prostredie***, vytvárajú tri zložky. Súčasťou ***materiálnej zložky*** sú bežné školské potreby ako papier, pravítko s ryskou, pero, ceruzka a pri experimenálnej úlohe 1 navyše kružidlo. Žiaci pri riešení nesmeli používať *uhlomer*. ***Sociálna zložka*** bola minimalizovaná, pretože v tejto didaktickej situácii sme nepredpokladali žiaden zásah iných aktérov, samozrejme okrem cieľového žiaka E_{-3}. ***Kognitívnu zložku*** tvorili vedomosti a poznatky žiaka základnej školy. Podľa učebných osnov a učebníc matematiky pre piaty a šiesty ročník ZŠ (*O. Šedivý a kol.*, 1997, 1998, 1999) spred školskej reformy, by tieto úlohy zvládol žiak šiesteho ročníka základnej školy. Keďže reforma v tomto školskom roku (2010/2011) prebieha tretí rok, úlohy by zvládli žiaci nezreformovaných ročníkov, teda ôsmeho a deviateho. Pre zreformované ročníky ZŠ boli doteraz boli vydané len učebnice pre piaty a šiesty ročník ZŠ (*J. Žabka a kol.*, 2009, 2010), siedmaci sa učia bez nových učebníc (nielen) matematiky a neexistujú ani nové učebnice pre ôsmy a deviaty ročník ZŠ. To značne komplikuje uvedenie kognitívnej zložky žiakov zreformovaných ročníkov. Podľa ŠVP sa v 7. ročníku planimetria vôbec nevyučuje, hoci podľa úvodu k novej učebnici pre 6. ročník sa žiaci vrátia k triedeniu uhlov a vete o súčte uhlov v trojuholníku v súlade so ŠVP v 7. a 8. ročníku. Keďže 8. ročník postupuje podľa starých učebných osnov, podrobnú kognitívnu zložku po reforme sme ukončili vedomosťami žiakov 6. ročníka a len heslovite sme ju doplnili podľa ŠVP. Po "novom" sa žiaci naučia vlastnosti rovnostranného trojuholníka, ktoré sú potrebné na vyriešenie experimentálnych úloh, až v 8. ročníku. V prílohe T uvádzame kognitívnu zložku žiakov pred a po reforme. Jednotlivé body kognitívnej zložky pred reformou sú uvedené tak, ako ich uvádzajú učebnice. Body 1 - 12 kognitívnej zložky po reforme sú tiež uvedené tak, ako v učebniciach. V siedmom ročníku sa planimetria nevyučuje. Body 13 - 16 sú uvedené tak, ako *odporúčané pojmy* v rámci *odporúčaného obsahového štandardu ŠVP*, keďže ani tieto učebnice zatiaľ neexistujú. Doposiaľ neexistuje ani *Odporúčaný vzdelávací štandard z matematiky pre 9. ročník ZŠ*.

Potom, ako sa žiak E_{-3} zoznámil s materiálnym prostredím, posunul sa na úroveň aktívneho žiaka E_{-2} do **modelovej situácie S_{-2}**. Teraz sa už nachádzal v cieľovom prostredí M_{-2}, kde pri riešení problému využíval všetky známe vlastnosti, postupy... Žiak zatiaľ len skúmal, použitú argumentáciu nemusel nevyhnutne popisovať alebo vysvetľovať.

V experimente sme sa zaoberali samostatným riešením žiakov, nebolo vyhovujúce, aby sa do vyučovacieho procesu zapájal učiteľ. Preto nedošlo **k didaktickej situácii S_0**, učiteľ vystupoval maximálne na úrovni pozorovateľa P_{-1} a žiak na úrovni poznávajúceho žiaka E_{-1} v

situácii učenia S_1. V tejto fáze žiak napísal svoje riešenia, pričom sme vyžadovali, aby ich aj zdôvodnil, na čo bol upozornený na začiatku vyučovacej hodiny.

5.7 Priebeh experimentu

Didaktický výskum prebiehal na základnej škole v Bratislave. Výskumnú vzorku tvorilo 28 respondentov z ôsmeho ročníka – skupiny C, D a 21 žiakov deviateho ročníka – skupina E. Experiment sme rozdelili do troch častí:

- v prvej časti sme sa zaoberali priebehom *didaktickej situácie* – riešením prípravných úloh v skupinách C, D a experimentálnych úloh v skupine E;
- v druhej časti *adidaktickou situáciou* – samostatným riešením experimentálnych úloh v skupinách C a D;
- v tretej časti *vyhodnotením experimentu*, teda jeho analýzou a posteriori.

5.8 Výsledky výskumu

Niektoré z cieľov, ktoré sme si stanovili v predvýskumnej časti tejto dizertačnej práce, sme naplnili v kapitole 7 a vyhodnotili v jej závere. Týkali sa najmä historického prehľadu literatúry o vývoji argumentácie a dôkazu, pedagogických dokumentov, učebníc, výsledkov medzinárodných štúdií... Tiež sme získali vlastné skúsenosti z vyučovania na základných školách. Pripravili a realizovali sme predexperiment s detailnou analýzou a priori i a aposteriori.

Na základe výsledkov predvýskumu sme si stanovili ciele pre výskumnú časť dizertačnej práce a v súvislosti s ňou i ciele experimentu. Dospeli sme k nasledovným záverom:

V dizertačnej práci sme formulovali dve úlohy, ktoré sa nám javili ako vhodné pre adidaktickú situáciu. Tieto experimentálne úlohy E1 a E2 sme analyzovali a priori vzostupne i zostupne, pričom súčasťou analýzy a priori sú predpokladané stratégie riešenia žiakov. Kvôli prehľadnosti sme ich zaradili do samostatnej kapitoly. Kvalitatívnu i kvantitatívnu analýzu a posteriori sme vykonali nielen podľa experimentálnych skupín, ale aj na základe stanovených didaktických premenných pomocou štatistického programu CHIC. Priebeh experimentu v didaktickej i adidaktickej situácie sme podrobne zaznamenali. Táto časť nám umožnila konštatovať, že cieľ ***C1 – Pripraviť adidaktickú situáciu pre každú zo zvolených experimentálnych úloh (zameraných na konkrétny poznatok), dôkladne a priori analyzovať úlohy a a posteriori analyzovať ich riešenia*** bol splnený.

Druhým cieľom bolo navrhnúť a zrealizovať taký spôsob vyučovania, ktorý je zameraný na argumentáciu, teda zdôvodňovanie žiackych riešení. Formulovali sme päť prípravných úloh P1 – P5. Zaradili sme ich do vyučovacieho procesu na jednej základnej škole. Úlohy boli formulované tak, aby žiaci považovali za potrebné zdôvodňovať každý krok riešenia úlohy a naznačili im, akým spôsobom sa môže argumentovať. Cieľ ***C2 – Navrhnúť taký spôsob vyučovania, ktorý kladie dôraz na zdôvodňovanie jednotlivých krokov riešenia a aplikovať ho do praxe*** považujeme takto za splnený.

V nasledujúcich riadkoch verifikujeme platnosť hlavnej hypotézy H. K tomu využívame pomocné hypotézy, ktoré vychádzajú jednak z Balacheffovej klasifikácie stupňov dokazovania z hľadiska úrovne dokazovania (H1, H2), ale i z vysvetľovania geometrického myslenia podľa van Hiele (H3, H4).

Pri vyhodnotení je potrebné zohľadňovať jednotlivé experimentálne skupiny. Sústredili sme sa na 27 žiakov skupín C a D, ktorí navštevovali 8. ročník základnej školy. Podľa vyučujúcej, ktorá žiakov učí matematiku, sú vedomosti žiakov porovnateľné. Žiaci skupiny C, v ktorej sme požadovali používanie argumentácie sa vyskytli žiaci, ktorí boli mierne podpriemerní. Rozdiel medzi riešením prípravných úloh bol, že žiakov skupiny C sme v rámci didaktickej situácie viedli k argumentácii, ukázali sme im spôsob zdôvodňovania.

Žiaci skupiny D úlohy riešili tradične. Z dôvodu počtu hodín, ktoré sme mali k dispozícii na vykonanie experimentu, sme sa rozhodli, že v skupine C budeme počas adidaktickej situácie na hodine prítomní a žiakom skupiny D zadáme úlohy E1 a E2 v rámci domácej úlohy, ktorú nám nasledujúci deň odovzdajú.

Aby sme mohli overiť platnosť hypotéz, v nasledujúcom texte sa podrobnejšie zameriame na vyhodnotenie riešení a argumentáciu žiakov, ktorí sa zúčastnili experimentu a to na základe vykonanej analýzy a posteriori (kap. 8.9). Keďže šlo o žiakov základnej školy, nepredpokladali sme podľa Balacheffovej klasifikácie najvyššiu úroveň: *intelektuálny dôkaz,* resp. *duševný pokus*, ani geometrické myslenie podľa van Hiele na vyšších úrovniach: *formálnu dedukcie* alebo *dogmaticko-matematickú*.

V úvode didaktickej situácie mali žiaci skupiny C problém s pokynom: „Zdôvodňujte!“. Úlohu P1 začali riešiť klasickým spôsobom bez argumentácie. Po doplňujúcich otázkach žiaci prišli na to, že pri riešení je potrebné odvolať na známe *vlastnosti* a *poučky*. Žiaci začali používať kognitívnu zložku materiálneho prostredia, napr.: *každý vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka má veľkosť 60°, každý vnútorný uhol obdĺžnika má 90°, os uhla delí uhol na dva rovnako veľké uhly, uhly sú zhodné, lebo sú vrcholové, priamy uhol má veľkosť 180°, plný 360°* a mnohé ďalšie.

V adidaktickej situácii v skupine C sme sa zamerali na zdôvodnenia žiakov pri riešení experimentálnych úloh. Ako sme uviedli v analýze a posteriori, úspešnosť pri argumentovaní krokov riešenia úlohy E1 dosiahla až 55%. Žiaci sa pri riešení odvolávali na známe vlastnosti. Tí, ktorí sa úlohu E1 rozhodli riešiť spôsobom E1-1, dosiahli v prvom kroku úspešnosť až 100%, v druhom až siedmom 72%. Strom podobnosti 4 poukazuje na významné podobnosti pri argumentovaní jednotlivých krokov zvolených stratégií v skupine C. Žiaci, ktorí úlohu E2 riešili spôsobom E2-1, dosiahli pri argumentovaní úspešnosť až 62%, dokonca pri prvom kroku riešenia až 67%. Len 17% svoj postup nezdôvodnilo. Význačné uzly v strome podobnosti 7 poukazujú na podobnosti medzi použitou argumentáciou v úlohe E2. Ako vidno zo stromov programu CHIC, žiaci využívali rôzne kroky riešenia s rôznou podobnosťou, niektoré vlastnosti potvrdili viacerými spôsobmi. Napríklad v úlohe E2 zdôvodnili veľkosť uhla β nielen z pravouhlého lichobežníka ABCD, ale súčasne aj pomocou vlastností o plnom uhle a vrcholových uhloch v bode C.

Výskumu sa zúčastnilo aj 21 žiakov deviateho ročníka tej istej základnej školy. V skupine E sme experiment vykonali odlišne ako v skupine C. K dispozícii sme mali jednu vyučovaciu hodinu. Zaujímalo nás, ako sa žiaci 9. ročníka dokážu vysporiadať počas riešenia úloh E1 a E2 s požiadavkou na zdôvodňovanie bez akejkoľvek skúsenosti s riešením úloh zameraných na argumentáciu v planimetrii.

V úlohe E1 program CHIC vyhodnotil niekoľko podobností medzi zdôvodnením jednotlivých krokov riešenia. Najsilnejšia podobnosť vznikla medzi voľbou stratégie, zdôvodnením potreby konštruovať rovnostranné trojuholníky a zdôvodnením narysovať os uhla, vyznačiť uhol polovičnej veľkosti. 86% žiakov úplne správne zdôvodnilo každý krok prvej stratégie riešenia tejto úlohy, jedna žiačka nezdôvodnila správne jediný krok.

Ak upriamime pozornosť na zdôvodňovanie v skupine E, zistíme, že žiaci argumentovali v druhej úlohe s úspešnosťou 54%, prvý krok riešenia s úspešnosťou až 70%. Tí, ktorí vedeli zdôvodniť veľkosť uhla γ, zdôvodnili aj veľkosť uhlov α i β. Zo stromov podobnosti, ktoré hovoria o podobnosti medzi argumentáciou žiakov všetkých skupín, jasne vyplýva väzba medzi skupinami C a E v oboch úlohách. Kohezívne stromy vyjadrili pomocou implikácií a ekvivalencií medzi jednotlivými premennými ich súdržnosť (kap. 8.9.2.3 a 8.9.2.6). To, ako žiak postupoval pri argumentovaní jednotlivých krokov úlohy, uvádza implikatívny graf aj s informáciou o intenzite pravdepodobnosti vzniku implikácií v porovnaní s kohezívnym stromom.

Z grafov a stromov programu CHIC, kvantitatívnej analýzy a posteriori, klinického pozorovania a spätnej väzby od žiakov skupín C a D sme dospeli k vyhodnoteniu hypotéz H1 a H3. Žiaci skupiny C (i skupiny E) postupne k záveru (počas) didaktickej situácie a v adidaktickej situácii uvažujú logicky, vytvárajú argumenty, vysvetľujú vzťahy... Zamýšľajú sa nad zdôvodnením, nad platnosťou jednotlivých vlastností, čím rozvíjajú svoju argumentačnú schopnosť. Tým, že zdôvodňujú kroky svojho riešenia použitím viacerých vlastností (uvedené sú v kognitívnej zložke materiálneho prostredia analýzy a priori úloh E1 a E2) zo *základnej skúsenosti* sa u nich stáva *generický príklad* a z úrovne *opisno-analytickej* vzniká *neformálna dedukcia*. Žiaci teda z hľadiska úrovne dokazovania i vývinu geometrického myslenia napredujú napriek tomu, že s týmto spôsobom vyučovania sa doteraz nestretli a my sme ich k nemu viedli len na 2 hodinách matematiky v skupine C, resp. na 1 hodine v skupine E.

Hypotézy

H1: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky vedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú (podľa N. Balacheffa) na úroveň „generický príklad";

H3: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky vedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú z hľadiska vývinu matematického myslenia (podľa van Hiele) na úroveň „neformálna dedukcia";

považujeme teda v podmienkach nášho výskumu za overené a platné.

Žiaci skupiny D pri riešení úloh používali prevažne obrázok, do ktorého zaznamenávali výsledky. Vyskytli sa žiaci, ktorí napísali k riešeniu „nejaké slovo" alebo následnosť riešenia úlohy. Ani jeden žiak sa však neodvolal na známe vlastnosti, napr. prečo sú vyznačené uhly zhodné, prečo dané uhly tvoria spolu uhol s veľkosťou 180°, 360°... Existujú isté podobnosti v riešení úloh medzi skupinami C, D, E. Z pohľadu argumentácie žiaci skupiny D zaostávajú za svojimi spolužiakmi zo skupín D a E. Tento fakt je spôsobený tým, že sa s odôvodňovaním nikdy nestretli. Je teda pochopiteľné, že sami od seba nebudú používať niečo, čo sa od nich na hodinách (matematiky) nevyžaduje. Žiaci tejto skupiny síce uvažujú experimentálne, merajú, kreslia, ale nevyužívajú na zdôvodnenie argumenty, nemajú potrebu overovať na základe platných „pravidiel", ktoré budú neskôr nazývať axiómami, tvrdeniami, vetami...

Preto môžme hypotézy

H2: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky nevedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú (podľa N. Balacheffa) na úroveň „základná skúsenosť";

H4: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky nevedie k argumentácii, sa pri riešení úloh dostanú z hľadiska vývinu matematického myslenia (podľa van Hiele) na úroveň „opisno-analytická";

označiť v našom experimente za overené a platné.

Náš experiment síce bol realizovaný na štatisticky pomerne malom súbore žiakov (48), poukázal však na opodstatnenosť formulovaných čiastkových výskumných hypotéz H1 – H4 a tým aj hlavnej výskumnej hypotézy H. Na základe klinického pozorovania realizovaného počas didaktickej i adidaktickej situácie, dôkladnej analýzy a posteriori adidaktickej situácie a spätnej väzby od žiakov môžme potvrdiť hlavnú hypotézu

H: Žiaci, ktorých učiteľ pri vyučovaní matematiky cieľavedome vedie k argumentácii, dosiahnu z hľadiska úrovne dokazovania, resp. vývoja matematického myslenia lepšie výsledky v porovnaní so žiakmi, kde sa vyučovanie realizuje tradične.

Výsledky nášho výskumu nám potvrdili predpoklad, že problematika rozvoja argumentácie u žiakov nie je až tak náročná. Stačí niekoľko hodín matematiky a žiaci preukazujú mierny pokrok v tejto oblasti. Sústavná požiadavka na zdôvodňovanie jednotlivých krokov riešenia aj nematematických úloh zo strany učiteľa a časté otázky typu: „Prečo?", môžu priniesť progres a v budúcnosti možno aj lepšie medzinárodné výsledky v rámci testovania PISA a TIMSS. Tejto téme sa však nevenuje dostatočná pozornosť. Pritom začať sa dá už od prvého nástupu detí do školských lavíc...

6 Sada neriešených úloh z planimetrie

V poslednej kapitole dizertačnej práce sme zostavili sadu neriešených úloh z planimetrie. Špeciálne sme sa zamerali na učivo o uhloch, ktoré sa nám javí ako vhodné na rozvíjanie matematickej kompetencie argumentácie.

Záver a prínos dizertačnej práce

V závere chceme zdôrazniť aj prínos pre Teóriu didaktických situácii. Domnievame sa, že význam spočíva aj:

- v aplikáciách didaktickej transpozície a jej rozšírení na dôkazové úlohy, resp. argumentačné úlohy v elementárnej geometrii na základnej škole,
- v realizácii predexperimentu a experimentu v didaktike matematiky podľa zásad Teórie didaktických situácií,
- v aplikáciách vzostupnej i zostupnej analýzy a priori,
- v klinickom pozorovaní a analýze a posteriori takéhoto typu pozorovania – ako prostriedkom na zistenie výsledkov predexperimentu a experimentu,
- v aplikácii štatistického programu CHIC pri vyhodnotení predexperimentu a experimentu v didaktike matematiky.

Pasáž o splnení cieľov a vyhodnotení hypotéz sme uviedli v závere kapitol o didaktickom predvýskume resp. didaktickom výskume.

Snahou o príspevok k skvalitneniu výuky argumentácie a dôkazov je priložená skromná zbierka úloh. Je zameraná na učivo o uhloch, ktorú možno reálne využiť pri vyučovaní matematiky na základných (i stredných) školách v rámci príslušnej témy, ako i na opakovanie a prehlbovanie učiva a potrebu používania správnej argumentácie a dôkazov nielen pre matematiku, ale aj pre mnohé životné situácie. Na základe výsledkov experimentu riešenie týchto úloh prispeje k zlepšeniu výsledkov žiakov z príslušného tematického celku. Teda cieľ ***C3 – Pripraviť návrh učebného textu, ktorého riešením podporíme u žiakov pokrok v oblasti argumentácie*** možno takto považovať za splnený.

Aby sme dosiahli všeobecnú verifikáciu našich hypotéz v rámci slovenských základných škôl, bolo by vhodné zopakovať výskum na väčšej vzorke respondentov. Stále aktuálna problematika argumentácie a dokazovania ponúka viaceré možnosti výskumu. Zaujímavé by bolo sledovať nielen vývoj argumentačného myslenia žiakov počas celej základnej školy, ale i postoj študentov učiteľstva matematiky a samotných učiteľov k tejto téme. Do budúcnosti by bolo vhodné realizovať semináre pre budúcich učiteľov a učiteľov z praxe v rámci celoživotného vzdelávania, aby pochopili význam potreby zdôvodňovať, aplikovali ho vo vyučovaní a tým podporili u žiakov rozvoj matematickej kompetencie argumentácie.

Zoznam publikovaných prác predkladateľa

1. **BLUNÁROVÁ, J.:** *Rozvoj argumentácie žiakov ZŠ – príprava didaktického výskumu.* Zborník Bratislavského seminára z Teórie vyučovania matematiky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2011 (v tlači)
2. **BLUNÁROVÁ, J.:** *Zostupná a vzostupná analýza a priori adidaktickej situácie zamerenej na rozvoj argumentácie žiakov ZŠ.* Zborník príspevkov z 42. konferencie slovenských matematikov. EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity. Žilina 2010
3. **BALÁŽOVÁ, J.:** *Argumentácia žiakov základných škôl v planimetrii.* Rigorózna práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2008
4. **BALÁŽOVÁ, J.:** *Argumentácia žiakov základných škôl v geometrii.* II. zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043. Centrum projektovej podpory Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2008
5. **TRENČANSKÝ, I., BALÁŽOVÁ, J., BESTROVÁ, M., ČERŇANOVÁ, V., FOLČAN, M., GAZDOVÁ, Z., KAŇUKOVÁ, K., MIKÓCZYOVÁ, D., NEUHOLD, E., ŠIŠKOVÁ, J., TISOŇ, M., ŽIDOVÁ, D.:** *Akcia, formulácia a validácia podľa teórie didaktických situácií v matematike.* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského V rámci projektu ESF JPD 3 BA – 2005/1 - 063. Bratislava 2007
6. **BALÁŽOVÁ, J.:** *Geometria trojuholníka.* Písomná časť dizertačnej skúšky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2007.
7. **BALÁŽOVÁ, J.:** *Information Technologies (Equation Grapher) In Teaching of Linear and Quadratic Functions.* Acta Didactica Universitatis Comenianae, Mathematics. Issue 7. Bratislava 2007
8. **BALÁŽOVÁ, J.:** *Communication in Mathematics Supported By Information Technologies.* Matematyka XII. Prace naukowe. Akademia im. Jana Dlugosza w Czestochowie. Czestochowa 2007

Zoznam použitej literatúry[1]

1. **Balacheff, N., Laborde, C.:** Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique: une approche socio-cognitive. In: G. Mugny (Ed.) *Psychologie sociale du développement cognitif*. Berne: Ed. P. Lang. 1985
2. **Balacheff, N.:** *Aspects of proof in pupil´s practice of school mathematics.* Mathematics, teachers and children. Hodden and Stoughton, London, 1988
3. **Balážová, J.:** *Geometria trojuholníka.* Písomná časť dizertačnej skúšky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2007.
4. **Balážová, J.:** *Argumentácia žiakov základných škôl v planimetrii.* Rigorózna práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2008 – I.
5. **Balážová, J.:** *Argumentácia žiakov základných škôl v geometrii.* II. zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043. Centrum projektovej podpory Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2008 – II.
6. **Bereková, H., Földesiová L., Hríbiková I., Regecová M., Trenčanský I.:** Slovník teórie didaktických situácií. 1. časť. Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava, 2001
7. **Bereková, H., Földesiová, L., Regecová, M., Kremžárová, L., Slávičková, M., Trenčanský, I., Vankúš, P., Zámožíková, Z.:** *Slovník teórie didaktických situácií.* 2. časť. Zborník 5 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky. Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava, 2003
8. **Bero, P.:** *Dôkazy matematickou indukciou na gymnáziu.* Matematiky a fyzika v škole 10, 1979/1980
9. **Bestrová, M.:** *Argumentácia a dôkaz pri riešení úloh.* Dizertačná práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2009
10. **Betková, E.:** *Argumentácia žiakov na základných školách.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2002
11. **Blunárová, J.:** *Rozvoj argumentácie žiakov ZŠ – príprava didaktického výskumu.* Zborník bratislavského seminára z Teórie vyučovania matematiky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 2011
12. **Blunárová, J.:** *Zostupná a vzostupná analýza a priori adidaktickej situácie zameranej na rozvoj argumentácie žiakov ZŠ.* Zborník príspevkov z 42. konferencie slovenských matematikov. EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity. Žilina 2010
13. **Blundenová, C.:** *Svět Číny.* Knižní klub, Praha, 1997
14. **Bourbaki, N.:** *Elements of the History of Mathematics.* Springer – Verlag 1998
15. **Brousseau, G.:** *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1998
16. **Burjan, V., Maxian, M.:** *Matematika. Opakovanie pre gymnáziá s triedami zameranými na matematiku.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1989
17. **Burjan, V.:** *Metodický rozbor matematickej úlohy (zo zákulisia práce učiteľa).* Matematické obzory č. 40. Bratislava, 1993
18. **Clements, D. H, Battista, M. T.:** *Geometry and spatial reasoning*. In: Grouws, D. Handbook of research on mathematics teaching and learning. MacMillan, N.York, USA, 1992
19. **Couturier, R., Bodin, A., Gras, R.:** *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*. Pomocník k programu CHIC 4.1. 2007

[1] Z dôvodu veľkého počtu použitej literatúry sme si dovolili neuviesť v autoreferáte 23 správ NÚCEM a ŠPÚ, ktoré sa týkali medzinárodného i národného testovania žiakov a 18 odkazov na pedagogické dokumenty (učebné osnovy, vzdelávací štandard, Štátny vzdelávací program).

20. **DANKOVÁ, T.:** *Získavanie poznatkov z planimetrie pomocou série úloh.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2002
21. **DILLINGEROVÁ, M.:** *Problémové vyučovanie. Tvorba a realizácia problémových úloh so zameraním na geometriu základnej školy.* Dizertačná práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2004
22. **DRÁBEKOVÁ, J.:** *Mathematics Visualization Using Software Geogebra*. Zborník príspevkov z medinárodného vedeckého seminára Informačné a technológie v riadení a vzdelávaní. Slovenská poľnohospodárska univerzita Nitre, 2010
23. **FLORKOVÁ, M.:** *Miesto matematiky v Montessori škole.* Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník 7. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou. Ružomberok, 2007
24. **GERA, M., ĎURIKOVIČ, V.:** *Matematická analýza.* Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1990
25. **GAZDOVÁ, Z.:** *Didaktická analýza dôkazov*. Dizertačná práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2010
26. **HANNA, G., DE VILLIERS, M. A KOL.:** *Icmi study 19: proof and proving in mathematics education: discussion document.* In: Lin, F.-L., Hsieh, F. –J. (Eds.) Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in MathematicsEducation. Taipei, Taiwan, 2009
27. **HEJNÝ, M. A KOL.:** *Teória vyučovania matematiky 2.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1989
28. **HOPKOVÁ, T.:** *Netradičné vyučovanie dôkazov.* Diplomová práca. Bratislava, Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského v Bratislave, 2003
29. **IVANOVÁ-ŠALINGOVÁ, M., MANÍKOVÁ, Z.:** *Slovník cudzích slov.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990
30. **JUŠKEVIČ, A. P.:** *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha, Nakladatelství československé akademie věd, 1978
31. **KAČALA, J. A KOL.:** *Krátky slovník slovenského jazyka*. Jazykovedný ústav Ľudovíta Štúra Slovenskej akadémie vied a Veda, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1987
32. **KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M.:** *Matematika pre štúdium technických vied.* I. diel. Slovenské vydavaeľstvo technickej literatúry, Bratislava 1959
33. **KOHANOVÁ, I.:** *Didactical situation in specific conditions.* Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 6, Comenius University Bratislava, 2006
34. **KOHANOVÁ, I.:** *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky.* Acta mathematica 13. Zväzok 2. Fakulta prírodných vied. Univerzita Konštantína Filozofa Nitra, 2010
35. **KOHANOVÁ, I.:** *Teoretické rámce vo výskumoch v didaktike matematiky.* 2. zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043. Knižničné a edičné centrum FMFI UK Bratislava, 2008
36. **KORŠŇÁKOVÁ, P.:** *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) Do Countries Paying Teachers Higher Relative Salaries Have Higher Student Mathematics Achievement?* In: Pedagogika.sk, slovenský časopis pre pedagogické vedy. Slovenská pedagogická spoločnosť. Ročník 1, č. 4. Trnava, 2010
37. **KUBÁČEK, Z., VALÁŠEK, J.:** *Cvičenia z matematickej analýzy I.* Vysokoškolské skriptá. Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského v Bratislave. Bratislava, 1992
38. **KUPKOVÁ, E.:** *Analýza problému v teórii didaktických situácií.* Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava, 2000
39. **KURAJ, J.:** *Výsledky žiakov z matematiky v rámci medzinárodnej štúdie TIMSS 2003.* Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník 6. ročníka konferencie s medzinárodnou

účasťou. Ružomberok, 2006
40. **KURAJOVÁ STOPKOVÁ, J.:** *Vybrané testové položky z výskumnej domény matematika v medzinárodnej štúdii TIMSS 2003.* Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník 6. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou. Ružomberok, 2006
41. **MACHNÍKOVÁ, M.:** *Dôkazy v geometrii na stredných školách.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2000
42. **MÄSIAROVÁ, L.:** *Dôkazy v obrázkoch.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 1999
43. **MIHÁLIKOVÁ, B., ONDOVČÍKOVÁ, D., SEMANIŠINOVÁ, I.:** *Úlohy matematickej olympiády základnej školy.* Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2004
44. **MOKRIŠ, M.:** *Inovácie stratégie riešenia – geometria bez kružidla.* Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník 6. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou. Ružomberok, 2006
45. **PIJÁK, V., ŠEDIVÝ, O., GRAJCAR, M., ZAŤKO, V.:** *Konštrukčná geometria pre matematicko-fyzikálne a pedagogické fakulty.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1985
46. **REGECOVÁ, M.:** *Analytická geometria a vektorový počet vo vyučovaní matematiky na strednej škole.* Dizertačná práca. Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univezity Komenského v Bratislave, 2005
47. **REHÁKOVÁ, J.:** *Dôkazy v matematike a problem solving.* Diplomová práca. Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského v Bratislave. Bratislava, 1996
48. **RUMANOVÁ, L.:** *Vector calculus and solid geometry at teaching of mathematics at secondary school.* Dizertačná práca. Bratislava, Fakultamatematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2005
49. **SEKERÁK, J.:** *Kľúčové kompetencie v matematickom vzdelávaní.* In: MIF 29, XV. ročník, Prešov, 2006
50. **STRUIK, D. J.:** *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha, 1963
51. **ŠALÁT, T., BOSÁK, J., ČIŽMÁR, J., DUCHOŇ, M., FICKER, V., GRAJCIAR, M., GREGUŠ, J., KAUCKÝ, J., KOTZIG, A., MAMRILLA, J., NEUBRUNN, T., ROSA, A., ŠAJDA, J., ŠEDA, V., ZAŤKO, V.:** *Malá encyklopédia matematiky.* Obzor, Bratislava, 1967
52. **ŠVEJDAR, V.:** *Logika, neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002
53. **ŠEDIVÝ, J.:** *O modernizácii školskej matematiky.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1972
54. **TAKÁCSOVÁ, K.:** *Dôkazy vo vyučovaní matematiky.* Projekt dizertačnej práce. Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského v Bratislave. Bratislava, 1999
55. **TARÁBEK, J., KRČÍK, J., ZAJÍČKOVÁ, A.:** *Geometria v príkladoch.* Zbierka úloh pre 6. - 9. ročník ZŠ, príprava na SŠ s prehľadom učiva a riešenými príkladmi. Didaktis. Bratislava, 2003
56. **TRENČANSKÝ, I.:** *Hladiny didaktických prostredí a kognitívne funkcie.* Zborník príspevkov seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava 1998
57. **TRENČANSKÝ, I.:** *Možnosti teórie didaktických situácií na zefektívnenie učenia.* Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava 2001
58. **TRENČANSKÝ, I., BALÁŽOVÁ, J., BESTROVÁ, M., ČERŇANOVÁ, V., FOLČAN, M., GAZDOVÁ, Z., KAŇUKOVÁ, K., MIKÓCZYOVÁ, D., NEUHOLD, E., ŠIŠKOVÁ, J., TISOŇ, M., ŽIDOVÁ, D.:** *Akcia, formulácia a validácia podľa teórie didaktických situácií v matematike.* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského V rámci projektu ESF JPD 3 BA – 2005/1 - 063. Bratislava 2007
59. **VOPĚNKA, P.:** *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989

60. **VOPĚNKA, P.:** *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky. Souborné vydání Rozprav o teorii množin.* Práh, Praha 2004
61. **VÝBORNÝ, R.:** *Matematická indukce.* Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelsství Mladá fronta, Praha 1963
62. **ZÁVADOVÁ, I.:** *Čo sa dá naučiť za 5 rokov.* Zborník 5 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave. Bratislava 2003
63. **ZÁVADOVÁ, I.:** *Návody v dôkazových úlohách z planimetrie.* Dizertačná práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave 1998
64. **ZNÁM, Š. A KOL.:** *Pohľad do dejín matematiky.* Alfa, Bratislava 1986

Internetové zdroje:

65. **EXAM TESTING** – história (02/2008): http://www.exam.sk/rodicia/monitor9/rodicia_historia.php
66. **EXAM TESTING** – Čo je testovanie 9 (02/2008): http://www.exam.sk/rodicia/monitor9/ rodicia_co_je_monitor9.php
67. **FINNISH MINISTRY OF EDUCATION AND CULTURY** (september 2010)**:** http://www.minedu.fi/ OPM/Koulutus /koulutus jaerjestelmae/?lang=en,
68. **FINNISH NATIONAL BOARD OF EDUCATION** (09/2010)**:** http://www.oph.fi/english/education/basic_education/pupil_assesment
69. **FINNISH NATIONAL CORE CURRICULUM FOR BASIC EDUCATION 2004** (09/2010)**:** http://www.oph.fi /english/publications/2009/national_core_curricula
70. **HOSPODÁRSKE NOVINY:** *Fínsko - najúspešnejší školský systém krajín OECD.* http://hnonline.sk/c1-22426695-finsko-najuspesnejsi-skolsky-system-krajin-oecd
71. **INEKO** (09/2008): http://www.ineko.sk/ostatne/matematicka-gramotnost
72. **INFOVEK** (11/2007): http://www.infovek.sk/predmety/matem/mater/cd/cdikt/aplety/jap1.htm #kruzop
73. **LEXIKÓN** (01/2007)**:** http://lexikon.sk.sweb.cz
74. **MŠ SR –** vykonávací projekt (02/2008): http://www.minedu.sk/index.php?lang=sk&rootId =1342
75. **STRÁNKA JANY FIŠEROVEJ** (11/2007): http://www.janafise.szm.sk/Aplety.htm
76. **UNIVERSITÄT WIEN** (11/2007)**:** http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie.html http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fvd/dokaz.html

Učebnice:

77. **ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M.:** *Matematika pre 5. ročník základných škôl, 1. časť.* Bratislava, SPN, 1997
78. **ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M.:** *Matematika pre 5. ročník základných škôl, 2. časť.* Bratislava, SPN, 1998
79. **ŠEDIVÝ, O., BÁLINT, Ľ., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M.:** *Matematika pre 6. ročník základných škôl, 1. časť.* Bratislava, SPN, 1998
80. **ŠEDIVÝ, O., ČERETKOVÁ, S., MALPEROVÁ, M., BÁLINT, Ľ.:** *Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť.* Bratislava, SPN, 1999
81. **ŽABKA, J., ČERNEK, P.:** *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 1. časť.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2009
82. **ŽABKA, J., ČERNEK, P.:** *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 2. časť.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010

83. **ŽABKA, J., ČERNEK, P.:** *Matematika pre 6. ročník ZŠ, 1. časť.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010
84. **ŽABKA, J., ČERNEK, P.:** *Matematika pre 6. ročník ZŠ, 2. časť.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010

Summary

Fact, that the issue of argumentation and proof is getting to top positions in area of research in Didactics of Mathematics The importance, speaks, how important it is. Educators include this topic in the international PISA and TIMSS tests. This fact, our own experiences, experiences of colleagues in teaching practice and study of literature has led us to the fact that we have tried to eliminate the aversion of students to argue.

The main objective of our dissertation thesis is prepare and implement the experiment, which is focuse on presenting pupil´s ideas to justify – to argue. We elaborate in detail analysis a priori, which is formed by levels of didactical situations from teacher´s point of view (from noosferic situation to situation of learning) and from pupil´s point of view (from objective situation to project situation). Subsequently on the basis of knowledges of the Theory of didactics situations and using the statistical software CHIC we evaluate the thorough analysis a posteriori of pupils´ exams.

In conclusion, we assess the fulfillment of ours research objectives and we verify formulated hypotheses. We create a set of unsolved exercise for use in teaching for primary (and secondary) schools. We introduce the contribution of this thesis in the field of Didactics of Mathematics and we find suggestions for further research in this area.