UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Vladislav Banas

Autoreferát dizertačnej práce

METÓDY LIMITOVANIA POSTUPNOSTÍ
$\mathcal{I}$-konvergencia

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.1.9. aplikovaná matematika

Bratislava, 28. 4. 2013

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ:	Mgr. Vladislav Banas Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
Školiteľ:	prof. RNDr. Pavel Kostyrko, DrSc. Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
Oponenti:	....
	....
	....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná .... **o** .... **h** pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie .... 9.1.9. aplikovaná matematika na ....

Predseda odborovej komisie: ....
....
....

Konvergencia postupnosti patrí medzi základné pojmy na ktorých je do veľkej miery postavená tradičná, ale aj moderná matematika. Ak X je metrický priestor a ϱ na ňom definovaná metrika, tak postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvkov priestoru X konverguje ku ξ, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ je množina

$$A(\varepsilon) = \{n : \varrho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\}$$

konečná. Inak povedané, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ je množina $A(\varepsilon)$ malá, pritom celkom intuitívne pod pojmom malá, rozumieme konečná. Tento intuitívny pohľad na konvergenciu postupnosti možno rozšíriť, ak za malé množiny budeme pokladať všetky také $A \subset \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k) = 0,$$

kde $\chi_A(k)$ je charakteristická funkcia množiny A. Číslo $d(A)$ (pokiaľ existuje) sa nazýva asymptotická hustota množiny A a opísaný typ konvergencie štatistická konvergencia. Štúdium štatistickej konvergnecie, uvedenej v päťdesiatich rokoch minulého storočia, sa stalo medzi matematikmi populárnym a nakoniec v prácach slovenských matematikov viedlo k definícii ešte viac zovšeobecneného - abstraktného pojmu konvergencie a síce $\mathcal{I}$-konvergencie. Asymptotická hustota množiny je tu nahradená pojmom ideálu na množine $\mathbb{N}$ (systém všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ s nulovou asymptotickou hustotou tvorí ideál). Systém $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa nazýva ideálom na množine $\mathbb{N}$ ak

a) $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ implikuje $B \in \mathcal{I}$,

b) A, $B \in \mathcal{I}$ implikuje $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Ak $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$, tak $\mathcal{I}$ sa nazýva vlastný a vlastný ideál, ktorý obsahuje všetky jednoprvkové podmnožiny $\mathbb{N}$, sa nazýva prípustný.

Predkladaná dizertačná práca sa zaoberá zovšeobecneniami klasickej konvergencie postupnosti, ktoré sú založené na $\mathcal{I}$-kovergencii, alebo špeciálnych prípadoch tohto typu konvergencie. Pozostáva z dvoch kapitol a dodadku.

V prvej kapitole uvádzame zväčša známe výsledky týkajúce sa $\mathcal{I}$-konvergencie a $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-konvergencie, alebo špeciálnych prípadov týchto typov konvergencií, ktoré tvoria základ danej problematiky. Ozrejmuje sa vzťah $\mathcal{I}$-konvergencie k obvyklej konvergencii. Dá sa ukázať, že $\mathcal{I}$-konvergencia spĺňa všetky axiómy obvyklej konvergencie s výnimkou tej, ktorá hovorí, že každá podpostupnosť postupnosti konvergentnej ku ξ konverguje k tomu istému prvku ξ. Taktiež možno ukázať, že podobne ako je to v prípade obvyklej konvergencie, postupnosť tvorená súčtom prvkov dvoch $\mathcal{I}$-konvergentných postupností konverguje k súčtu ich $\mathcal{I}$-limít a že analogický vzťah platí pre postupnosť tvorenú súčinom prvkov dvoch $\mathcal{I}$-konvergentných postupností. Udávajú sa viaceré príklady ideálov na množine $\mathbb{N}$, príslušných $\mathcal{I}$-konvergencií a porovnania s niektorými typmi metód limitovania. Ďalej sa skúma vzťah $\mathcal{I}$-konvergencie a $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-konvergencie - príbuzných, avšak odlišných zovšeobecnení konvergencie. Nakoľko $\mathcal{I}_f$ (Fréchetov ideál na množine $\mathbb{N}$) je obsiahnutý v každom prípustnom ideále a $\mathcal{I}_f$-konvergencia splýva s $\mathcal{I}$-konvergenciou, uvádzame výsledky, ktoré sa zaoberajú otázkou, do akej miery $\mathcal{I}$-konvergencia rozširuje pojem obvyklej konvergencie, presnejšie topologickými vlastnosťami konvergenčného poľa $F(\mathcal{I})$ v priestore všetkých ohraničených postupností so suprémovou normou ℓ_∞. Dá sa ukázať, že $F(\mathcal{I}^{\mathcal{I}_f})$ je hustou podmnožinou množiny $F(\mathcal{I})$ a tiež, že $F(\mathcal{I})$ (pokiaľ $\mathcal{I}$ nie je maximálny) je vlastný uzavretý lineárny podpriestor priestoru ℓ_∞ a teda $F(\mathcal{I})$ je riedka v ℓ_∞ a naviac, že $F(\mathcal{I})$ je veľmi pórovitá. V prípade, že $\mathcal{I}$ je maximálny, tak $F(\mathcal{I}) = \ell_\infty$. Ďalej sa definujú pojmy $\mathcal{I}$-limes inferior, $\mathcal{I}$-limes superior, $\mathcal{I}$-limitný bod, $\mathcal{I}$-bod uzáveru a poukazuje sa na ich vlastnosti a odlišnosti v porovnaní s pojmami takto definovanými pre obvyklú konvergenciu. Uvádzame tvrdenia o reprezentácii uzavretých množín množinami $\mathcal{I}$-bodov uzáveru postupnosti v metrických priestoroch.

V druhej časti úvádzame výsledky vedeckých prác, ktoré boli impulzom pre vlastný vedecký výskum. Definuje a skúma sa tu pojem $\mathcal{I}$-spojitosti reálnej funkcie. Ide o rozšírenie Heineho definície spojitosti o pojem $\mathcal{I}$-konvergencie. Tento pojem je preskúmaný s ohľadom na obvyklú spojitosť reálnej funkcie a s ohľadom na typy ideálov použitých v definícii $\mathcal{I}$-spojistosti. Ďalej sa pojem $\mathcal{I}$-konvergencie a následne $\mathcal{I}$-spojitosti rozširuje na topologické priestory a skúmajú sa triedy topologických priestorov, pre ktoré sú $\mathcal{I}$-spojitosť a spojitosť ekvivalentné. Kľúčovú úlohu tu zohrávajú sekvenčné topologické priestory, alebo inak priestory, ktorých vlastnosti možno plne opísať pomocou konvergencie postupnosti.

Tretia časť dizertačnej práce obsahuje práce, ktoré chcú byť prínosom k danej problematike.

V prvej definujeme a skúmame vlastnosti derivácie reálnej funckie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ založenej na pojme $\mathcal{I}$-konvergencie. Ukazuje sa, že v prípade prípustných ideálov tieto pojmy splývajú, pokiaľ použijeme rovnaký ideál pre $\mathcal{I}$-konvergenciu na množine vzorov aj obrazov funkcie f. Ak sú použité odlišné ideály, tak za určitých podmienok (ideál použitý na $\mathcal{I}$-konvergenciu na množine vzorov obsahuje naviac nekonečnú množinu) $\mathcal{I}$-derivácia stráca lokálny význam ako je to v prípade obvyklej derivácie a pre f v ľubovoľnom bode existuje vtedy a len vtedy, keď je lineárna.

Druhá práca vychádza z postrehu, že rozdiely získané použitím $\mathcal{I}$-konvergencie na predefinovanie niektorých pojmov úzko spätých so spojitosťou, ako je to napríklad aj v prípade derivácie, alebo niektorých zovšeobecnení spojitosti sa prirodzeným spôsobom prenášajú z $\mathcal{I}$-spojitosti na takto definované pojmy v prípade, že existuje priame spojenie so spojitosťou v bode. Z toho dôvodu sme sa rozhodli podrobne preskúmať ekvivalenciu medzi $\mathcal{I}$-spojitosťou a spojitosťou v bode v topologických priestoroch. Dôležitú úlohu tu opäť hrajú sekvenčné a Fréchetove topologické priestory.

Summary

In the thesis we made a review of the known facts presented in scientific works on $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-convergence and we tried to answer questions we asked in the dissertation thesis project. We studied a new notion of derivative based on the notion of $\mathcal{I}$-convergence and also equivalence between continuity and $\mathcal{I}$-continuity at a point in topological spaces. It can be said that virtually all these notions with only few exceptions are equivalent with notions from which they were derived using $\mathcal{I}$-convergence. These exceptions are for instance cases: in Heine's definition of continuity extended with $\mathcal{I}$-convergence for a map $f : X \to Y$ we use different ideals for $\mathcal{I}$-convergence in the set X and for $\mathcal{I}$-convergence in the set Y (this difference is transposed naturally also onto other notions predefined via $\mathcal{I}$-convergence and tightly connected with continuity); the study of $\mathcal{I}$-continuity for maps in specific topological spaces, where equivalence does not hold even between classical Heine's definition of continuity and continuity defined by using pre-images of open sets.

Zoznam prác dizertanta

[A1] Banas, V.: *$\mathcal{I}$-derivative*, Submitted.

[A2] Banas, V.: *On $\mathcal{I}$-continuity*, Submitted.

Zoznam použitej literatúry

[1] Fast, H.: *Sur la convergence statistique*, Colloq. Math. **2** (1951), 241-244.

[2] Schoenberg, I. J.: *The intergrability of certain functions nad related summability methods*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361-375.

[3] Kostyrko, P. – Šalát, T. – Wilczyński, W.: *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange **26(2)** (2000-2001), 669-686.

[4] Nuray, F. – Ruckle, W. H.: *Generalized statistical convergence and convergence free spaces*, J. Math. Anal. Appl. **245(2)** (2000), 513-527.

[5] Kostyrko, P. – Mačaj, M. – Šalát, T.: *Statistical convergence and $\mathcal{I}$-convergence*, Unbublished,
http://thales.doa.fmph.uniba.sk/macaj/ICON.pdf (1999).

[6] Mačaj, M. – Sleziak, M.: *$\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-convergence*, Real Anal. Exchange **36(1)** (2010-2011), 177-194.

[7] Baláž, V. – Červeňanský, J. – Kostyrko, P. – Šalát, T.: *I-convergence and I- continuity of real functions*, Acta Mathematica, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University Nitra **5** (2002), 43-50.

[8] Sleziak, M.: *$\mathcal{I}$-continuity in topological spaces*, Acta Mathematica, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University Nitra **6** (2003), 115-122.

[9] Lahiri, B. K. – Das, P.: *I and I^* convergence in topological spaces*, Math. Bohem. **2** (2005), 153-160.

[10] Lahiri, B. K. – Das, P.: *I-convergence and I^*-convergence of nets*, Real Anal. Exchange **33(2)** (2007), 431-442.

[11] Letavaj, P.: *$\mathcal{I}$-convergence to a set*, Acta Math. Univ. Comenianae **80(1)** (2011), 103-106.

[12] Das, P. – Kostyrko, P. – Malik, P. – Wilczyński, W.: *I and I^*-convergence of double sequences*, Math. Slovaca **58(5)** (2008), 605-620.

[13] Demirci, K.: *$\mathcal{I}$-limit superior and limit inferior*, Math. Commun. **6** (2001), 165-172.

[14] Dems, K.: *On $\mathcal{I}$-cauchy sequences*, Real Anal. Exchange **30(1)** (2004), 123-128.

[15] Bhardwaj, V. K. – Rani, A.: *Weak ideal convergence in ℓ_p spaces*, Int. J. Pure Appl. Math. **75(2)** (2011), 247-256.

[16] Gezer, F. – Karakus, S.: *$\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ convergent function sequences*, Math. Commun. **10** (2005), 71-80.

[17] Jasiński, J. – Recław, I.: *Ideal convergence of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), 3511-3518.

[18] Kostyrko, P. – Mačaj, M. – Sleziak, M. – Šalát, T.: *$\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points*, Math. Slovaca **55(4)** (2005), 443-464.

[19] Cartan, H.: *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 777-779.

[20] Katětov, M.: *Products of filters*, Comment. Math. Univ. Carolin. **9** (1968), 173-189.

[21] Robinson, A.: *On generalized limits and linear functionals*, Pacif. J. Math. **14(1)** (1964), 269-283.

[22] Bernstein, A. R.: *A new kind of compactness for topological space*, Fund. Math. **66** (1970), 185-193.

[23] Bourbaki, N.: *Elements of Mathematics - General Topology, Chapter I-IV*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[24] Engelking, R.: *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989. Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6.

[25] Kuratowski, K.: *Topologie I*, PWN , Warsawa, 1968.

[26] Šalát, T.: *Nekonečné rady*, Akademia, Praha, 1974.

[27] Mikusiński, P.: *Axiomathic theory of convergence, (in Polish)*, Uniw. Śląski Prace Nauk. Prace Matem. **12** (1982), 13-21.

[28] Šalát, T.: *On statistically convergent sequences of real numbers*, Math. Slovaca **30(2)** (1980), 139-150.

[29] Kostyrko, P. – Mačaj, M. – Šalát, T. – Strauch, O.: *On statistical limit points*, Proc. Amer. Math. Soc. **129(9)** (2000), 2647-2654.

[30] Švec, M. – Šalát, T. – Neubrunn, T.: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*, Alfa, Bratislava, 1987.

[31] Zajíček, L.: *Porosity and σ-porosity*, Real Anal. Exchange **12** (1988), 314-350.

[32] Niven, I.: *The asymptotic density of sequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **57** (1951), 420-434.

[33] Fridy, J. A. – Orhan, C.: *Statistical limit superior and limit inferior*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3625-3631.

[34] Antoni, J.: *On A-continuity of real functions II*, Math. Slovaca **36** (1986), 283-288.

[35] Červeňanský, J.: *Statistical convergence and statistical continuity*, Vedecké práce MtF STU (Trnava) **6** (1998), 207-211.

[36] Franklin, S.P.: *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. **57** (1965), 107-115.

[37] Franklin, S.P. – Rajagopalan, M.: *On subsequencial spaces*, Topology Appl. **35** (1990), 1-19.

[38] Červeňanský, J. – Šalát, T. – Toma, V.: *Remarks on statistical and I-convergence on series*, Mathematica Bohemica **130(2)** (2005), 177–184.

[39] Thomson, B. S.: *Symmetric Properties of Real Functions*, Marcel Dekker, New York, 1994.

[40] van Roij, A. C. M. – Schikhof, W. H.: *A Second Course on Real Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.