Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky
a informatiky

Mgr. Ľudovít Balko

Autoreferát dizertačnej práce

Topológia hladkých variet a fibrácií so zameraním na charakteristický rang Grassmannových variet

na získanie akademického titulu philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia:
9.1.7 Geometria a topológia

Bratislava 2012

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Ľudovít Balko
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Mlynská dolina
842 48 Bratislava 4

Školiteľ: Prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Mlynská dolina
842 48 Bratislava 4

Oponenti:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o ...... h
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ....

v študijnom odbore 9.1.7. geometria a topológia

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava 4.

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava 4

1 Úvod

Pojem charakteristického rangu hladkej variety ako nového číselného homotopického invariantu hladkých variet zaviedol J. Korbaš v článku [17]. Pre hladkú, súvislú, uzavretú d-rozmernú varietu M je jej charakteristický rang definovaný ako najväčšie celé číslo $k \leq d$také, že pre každé nezáporné $j \leq k$ sa každý prvok kohomologickej grupy $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach dotykovej fibrácie variety M. Označujeme ho $\mathrm{charrank}(M)$.

Jedna z motivácií zavedenia tohto pojmu vychádza z teórie fibrácií, konkrétne v [15, Theorem C] Korbaš ukázal, že ak F je hladká, uzavretá, súvislá varieta a stabilné charakteristické triedy dotykovej fibrácie variety F (ktorých príkladom sú aj Stiefelove-Whitneyho triedy tejto variety) generujú kohomologický okruh $H^*(F;R)$, tak pre hladkú, lokálne triviálnu fibráciu $p : E \to B$ s fíbrom F, ktorej totálny priestor E je uzavretá súvislá varieta platí, že inklúzia fíbra $i : F \to E$ indukuje epimorfizmus $i^* : H^*(E;R) \to H^*(F;R)$ kohomologických okruhov s koeficientmi v okruhu R. Inou motiváciou je problém hľadania kohomologickej dĺžky $\mathrm{cup}(M)$ variety M kobordantnej 0, t.j. počtu činiteľov najdlhšieho nenulového súčinu prvkov z kohomologických grúp $H^i(M;\mathbb{Z}_2)$ pre $i \geq 1$ v kohomologického okruhu $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$. V už spomenutom článku [17] Korbaš ukázal, že pre hladkú, súvislú, uzavretú, d-rozmernú varietu M, ktorá je kobordantná 0 v neorientovanom zmysle platí:

$$\mathrm{cup}(M) \leq 1 + \frac{d - z - 1}{r},$$

kde $r < d$ je také, že $\widetilde{H}^r(M;\mathbb{Z}_2)$ je prvá nenulová redukovaná kohomologická grupa variety M a $z < d - 1$ je také celé číslo, že pre každé $j \leq z$ sa každý prvok grupy $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho triedach variety M (poz. [17, Theorem 1.1]). Zrejme najlepší odhad, ktorý týmto spôsobom môžeme dosiahnuť, dostaneme pre $z = \mathrm{charrank}(M)$.

To viedlo k nastoleniu nasledovného problému.

Problém 1.1 [17, Problem 1.1] *Nájsť charakteristický rang všetkých hladkých, súvislých, uzavretých variet.*

V ďalšom texte budeme varietou vždy rozumieť hladkú, súvislú a uzavretú varietu.

2 Známe výsledky a ciele dizertačnej práce

Prvé výsledky v súvislosti s problémom hľadania charakteristického rangu variet dosiahol Korbaš pre niektoré systémy Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,k} = SO(n)/SO(k) \times SO(n-k)$, pozostávajúcich z k-rozmerných orientovaných podpriestorov reálneho euklidovského n-rozmerného priestoru. V prvom rade našiel dolné ohraničenie charakteristického rangu Grassmannových variet orientovaných podpriestorov $\widetilde{G}_{n,k}$ pre n nepárne, konkrétne (poz. [17, odsek po Theorem 1.2])

$$n - k - 1 \leq \mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{n,k}).$$

V tom istom článku ukázal, že pre variety $\widetilde{G}_{2^t-1,3}$, $t \geq 3$, je $\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}) = 2^t-5$, a ak n je párne, tak $\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{n,k}) = 1$ (poz. [17, odsek po Theorem 1.3]).

K obohateniu skúmanej problematiky charakteristického rangu prispeli A. Naolekar a A. Thakur, ktorí v článku [21] zovšeobecnili pojem charakteristického rangu variety, keď v definícii charakteristického rangu namiesto Stiefelových-Whitneyho tried variet uvažovali Stiefelove-Whitneyho triedy vektorovej fibrácie ξ nad súvislým bunkovým komplexom X. Zaviedli tak pojem charakteristického rangu vektorovej fibrácie $\mathrm{charrank}_X(\xi)$ a tiež pojem horného charakteristického rangu bunkového komplexu X, $\mathrm{ucharrank}(X)$, ako maxima množiny

$$\{\mathrm{charrank}_X(\xi); \xi \text{ je vektorová fibrácia nad } X\}.$$

V predkladanej práci nadväzujeme na vyššie spomínané výsledky v problematike charakteristického rangu orientovaných podpriestorov Grassmannových variet dosiahnuté Korbašom a v duchu problému 1.1 hľadáme charakteristický rang rôznych všeobecných systémov variet.

3 Stručný prehľad výsledkov dizertačnej práce

V ďalšom texte budeme kohomologické grupy $H^i(X; \mathbb{Z}_2)$ priestoru X s koeficientmi v poli $\mathbb{Z}_2$ kratšie označovať $H^i(X)$. Na začiatok uveďme definíciu charakteristického rangu variety.

Definícia 3.1 [17, odsek po vete 1.1] *Charakteristický rang hladkej, súvislej, uzavretej d-rozmernej variety M je najmenšie nezáporné celé číslo $k \leq d$ také, že pre každé nezáporné $j \leq k$ sa každý prvok grupy $H^j(M)$ dá vyjadriť ako polynóm v Stiefelových-Whitneyho charakteristických triedach variety M. Charakteristický rang variety M budeme označovať* $\mathrm{charrank}(M)$.

Označme $p(S, u, v)$ počet rozkladov kladného celého čísla v na u kladných častí (t.j. $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_u$), z ktorých každá je z množiny S, ktorá je danou podmnožinou množiny kladných celých čísel (poz. [1, str. 7]). Nech $b_i(M) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^i(M))$ je i-te $\mathbb{Z}_2$-Bettiho číslo variety M, a nech $w_i(M) \in H^i(M)$ je i-ta Stiefelova-Whitneyho charakteristická trieda variety M. Pre Bettiho čísla $b_i(M)$ variety M máme nasledujúci odhad.

Veta 2.1.4 *(doteraz nepublikovaná) Nech M je hladká, súvislá, uzavretá varieta taká, že $w_i(M) \neq 0$ pre nejaké $i > 0$. Nech* $\mathrm{charrank}(M) \geq t$ *a nech $w_i(M) = 0$ pre všetky $i \notin \{n = k(1), k(2), \ldots, m\}$, pre nejaké $n = k(1) < k(2) < \cdots < m$. Potom pre všetky $j \in \{1, \ldots, t\}$ máme*

$$b_j(M) \leq \sum_{s=1}^{\left[\frac{j}{n}\right]} p(\{n, k(2), k(3), \ldots, m\}, s, j). \tag{1}$$

Z tejto vety potom dostávame odhad charakteristického rangu variety M.

Dôsledok 2.1.6 *(doteraz nepublikovaný) Nech M je hladká, súvislá, uzavretá varieta taká, že $w_i(M) \neq 0$ pre nejaké $i > 0$, a nech $w_i(M) = 0$ pre všetky $i \notin \{n = k(1), k(2), \ldots, m\}$. Ak*

$$b_j(M) > \sum_{s=1}^{[\frac{j}{n}]} p(\{n, k(2), k(3), \ldots, m\}, s, j),$$

tak $\operatorname{charrank}(M) < j$.

Zaujímavú geometrickú interpretáciu špeciálneho prípadu vety 2.1.4 dostaneme, keď v úlohe množiny $\{n, k(2), k(3), \ldots, m\}$ vezmeme vo vete 2.1.4 množinu $\{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$.

Dôsledok 2.1.8 *(doteraz nepublikovaný) Nech M je hladká, súvislá, uzavretá varieta dimenzie d taká, že $w_i(M) \neq 0$ pre nejaké $i > 0$. Nech $n \geq 1$ je také, že $w_i(M) = 0$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a nech $q \geq n$ je také, že $w_i(M) = 0$ pre $i \in \{q+1, q+2, \ldots\}$. Ak* $\operatorname{charrank}(M) \geq j$, *tak*

$$b_j(M) \leq \sum_{x=1}^{[\frac{j}{n}]} b_{j-nx}(G_{m-n+x,x}),$$

kde $m = \min(j, q)$ a $G_{a,b} = O(a)/O(b) \times O(a-b)$ je Grassmannova varieta všetkých b-rozmerných vektorových podpriestorov v $\mathbb{R}^a$.

Nech E, B a F sú variety. Nech r_E (resp. r_B, resp. r_F) označuje najmenšie celé číslo, pre ktoré je redukovaná kohomologická grupa $\widetilde{H}^{r_E}(E;\mathbb{Z}_2)$ (resp. $\widetilde{H}^{r_B}(B;\mathbb{Z}_2)$, resp. $\widetilde{H}^{r_F}(F;\mathbb{Z}_2)$) nenulová. Ak varieta E je totálnym priestorom lokálne triviálnej fibrácie s fíbrom F, ktorý je úplne nehomologický nule, tak informácia o charakteristickom rangu fíbra nám dáva informáciu o charakteristickom rangu totálneho priestoru nasledujúcim spôsobom.

Veta 2.2.2 *(publikovaná v* [4, Theorem 2.1]*) Nech $p : E \to B$ je hladká, lokálne triviálna fibrácia s fíbrom F úplne nehomologickým nule. Potom pre totálny priestor E taký, že* $\operatorname{charrank}(E) \leq \dim(F)$ *máme*

$$\min\{r_B, r_F\} - 1 = r_E - 1 \leq \operatorname{charrank}(E) \leq \operatorname{charrank}(F).$$

Ak varieta E navyše je kobordantná nule (t.j. je hranicou nejakej hladkej, súvislej, kompaktnej variety), tak máme nasledovnú vetu.

Veta 2.2.5 *(publikovaná v* [4, Theorem 2.2]*) Nech $p : E \to B$ je hladká, lokálne triviálna fibrácia s totálnym priestorom E kobordantným nule a fíbrom F úplne nehomologickým nule, pričom nech* $\operatorname{charrank}(E) \leq \dim(F)$. *Potom máme*

$$\min\{r_B, r_F\} - 1 = r_E - 1 \leq \operatorname{charrank}(E) \leq \min\{u_{B,F}, \operatorname{charrank}(F)\},$$

kde $u_{B,F} = \dim(B) + \dim(F) - 1 - \min\{r_B, r_F\}(\mathrm{cup}B + \mathrm{cup}F - 1)$.

Všeobecne pre variety kobordantné nule máme nasledujúci odhad ich charakteristického rangu.

Veta 2.3.1 *(doteraz nepublikovaná) Nech M je hladká, súvislá, uzavretá n-rozmerná varieta kobordantná nule. Nech $t \leq \frac{n}{2}$ je najväčšie také celé číslo, že $H^t(M) \neq 0$. Potom*

$$\mathrm{charrank}(M) \leq n - t - 1.$$

Použitím tejto vety vieme napríklad nájsť presnú hodnotu charakteristického rangu Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,2}$ dvojrozmerných podpriestorov priestoru $\mathbb{R}^n$ pre nepárne n.

Veta 2.3.2 *(doteraz nepublikovaná) Ak n je nepárne, tak*

$$\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{n,2}) = n - 2.$$

Využitím vety 2.3.1 a racionálneho Poincarého polynómu Grassmannových variet $\widetilde{G}_{n,k}$ pre n nepárne dostávame všeobecný odhad charakteristického rangu týchto Grassmannových variet.

Veta 3.1.2 *(doteraz nepublikovaná) Nech r a s sú kladné celé čísla. Potom*

$$\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{2r+1+2s,2r+1}) \leq \begin{cases} s(2r+1) - 1, & \text{ak } s \equiv 0 \pmod 4, \\ s(2r+1) + 1, & \text{ak } s \equiv 2 \pmod 4, \\ s(2r+1), & \text{ak } s \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Informáciu o charakteristickom rangu Grassmannových variet orientovaných podpriestorov $\widetilde{G}_{n,k}$ je možné tiež získať zo znalosti Bettiho čísel Grassmannových variet neorientovaných podpriestorov, o čom hovorí nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 3.3.1 *(doteraz nepublikované) Ak $b_j(G_{n,k}) - b_{j-1}(G_{n,k}) > 0$, tak $b_j(\widetilde{G}_{n,k}) \neq 0$.*

Veta 2.3.1 potom opäť dáva horný odhad charakteristického rangu $\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{n,k})$.

Na výpočet Bettiho čísel Grassmannových variet orientovaných podpriestorov sa dá tiež použiť nasledujúca veta.

Veta 3.3.2 [8, výraz (4.1)] *(doteraz nepublikovaná) Pre všetky $j = 0, 1, \ldots, k(n-k)$ máme*

$$b_j(\tilde{G}_{n,k}) = 2b_j(G_{n,k}) - \dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{Im}(\cup w_1 : H^{j-1} \to H^j)) - \\ - \dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{Im}(\cup w_1 : H^j \to H^{j+1})),$$

pričom H^j označuje kohomologickú grupu $H^j(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$.

Iný spôsob výpočtu Bettiho čísel Grassmannových variet orientovaných podpriestorov je založený na Jungkindovej metóde [14] výpočtu homologických grúp s koeficientmi v $\mathbb{Z}$ Grassmannových variet orientovaných podpriestorov. Z nich potom použitím vety o univerzálnych koeficientoch pre kohomológie určíme ich kohomologické grupy s koeficientmi v $\mathbb{Z}_2$, a teda aj ich Bettiho čísla.

Pomocou vety 3.3.2 vieme tiež odhadnúť charakteristický rang istého systému Grassmannových variet trojrozmerných orientovaných podpriestorov.

Dôsledok 3.3.4 *(doteraz nepublikovaný) Pre $r \geq 2$*

$$\mathrm{charrank}(\tilde{G}_{\frac{2^{2r+1}+7}{3},3}) \leq 2^{2r} - 2.$$

Použitím niektorých výsledkov teórie rozkladov kladných celých čísel [2] a využitím tvrdenia 3.3.1 a vety 2.3.1 sme našli ďalší odhad charakteristického rangu niektorých Grassmannových variet trojrozmerných orientovaných podpriestorov.

Veta 3.4.4 *(doteraz nepublikovaná) Pre $s \geq 1$ máme*

$$\mathrm{charrank}(\widetilde{G}_{4s+3,3}) \leq 6s - 1.$$

4 Summary

Characteristic rank of a smooth connected closed manifold M, charrank(M), is a new numerical homotopy invariant of smooth manifolds; it was defined by Korbaš in [17]. It is the least $k \geq 0$ such that for all j, $0 \leq j \leq k \leq \dim(M)$, all elements in the cohomology groups $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ can be expressed as polynomials in the Stiefel-Whitney classes of (the tangent bundle of) M.

A motivation for the notion of characteristic rank comes from the theory of fibrations (fibre bundles). In [15, Theorem C] Korbaš proved that, if F is a smooth closed connected manifold and some stable characteristic classes of the tangent bundle of F (e.g. Stiefel-Whitney classes of F) generate the cohomology ring $H^*(F;R)$, then for any smooth fibre bundle $p : E \to B$ with fiber F and with a smooth closed connected manifold E as total space, the fiber inclusion $i : F \to E$ induces an epimorphism $i^* : H^*(E;R) \to H^*(F;R)$, of cohomology rings with coefficients in a ring R.

In [17], Korbaš proved that for a smooth connected closed zero-cobordant d-dimensional manifold M, the cup-length of M, cup(M), has the following upper bound:

$$\mathrm{cup}(M) \leq 1 + \frac{d - z - 1}{r}.$$

Here $r < d$ is such that $\widetilde{H}^r(M;\mathbb{Z}_2)$ is the first non-zero reduced cohomology group and z $(< d - 1)$ is an integer such that for all $j \leq z$ all elements of $H^j(M;\mathbb{Z}_2)$ can

be expressed as polynomias in the Stiefel-Whitney classes of M. This is another motivation for defining the characteristic rang. In addition, in the cited article Korbaš formulated the following problem.

Problem 4.1 *Find the characteristic rank of all smooth closed connected manifolds.*

He also gave some first results for the characteristic rank of a certain family of the Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{n,k} = SO(n)/SO(k) \times SO(n-k)$ of oriented k-subspaces of n-dimensional Euclidean space. In particular, he proved that

$$\text{charrank}(\widetilde{G}_{2^s-1,3}) = 2^s - 5,$$

and for even n

$$\text{charrank}(\widetilde{G}_{n,k}) = 1.$$

In the thesis we present new results on Problem 4.1. We find some new upper bounds for the characteristic rank of smooth closed connected manifolds, as well as of manifolds that are total spaces of fibre bundles with fiber totally non-homologous to zero, and of zero-cobordant manifolds (some of these results were published in [4]). Then we apply some of these general results to obtain bounds or exact values for the characteristic rank of certain families of oriented Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{n,k}$ with odd n.

5 Zoznam recenzovaných prác dizertanta a ich citácie

Článok:

[BK] Ľ. Balko, J. Korbaš: *A note on the characteristic rank of a smooth manifold*, J. Korbaš (ed.) et al., Group actions and homogeneous spaces. Proceedings of the international conference, Bratislava topology symposium "Group actions and homogeneous spaces", Bratislava, Slovakia, September 7–11. 2009. Bratislava: Univ. Komenského, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky. 7-11 (2010), Zentralblatt MATH 1222.57024.

Ohlasy na článok:

[NT] A. C. Naolekar, A. S. Thakur: *Characteristic rank of vector bundles over Stiefel manifolds*, preprint, Indian Statistical Institute, Bangalore Centre, 8th Mile Mysore Road, Bangalore, 560059 India; isibang/ms/2012/2, January 20th, 2012.

[NTh] A. C. Naolekar, A. S. Thakur: *Note on the characteristic rank of vector bundles*, preprint, Indian Statistical Institute, Bangalore Centre, 8th Mile Mysore Road, Bangalore, 560059 India; isibang/ms/2012/1, January 20th, 2012.

6 Zoznam použitej literatúry

[1] G. Andrews, *Partitions Yesterday and Today*, The New Zealand Math. Soc., Wellington, New Zealand 1979.

[2] G. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley, Reading 1979.

[3] Ľ. Balko, J. Korbaš: *A note on the characteristic rank of null-cobordant manifolds*, v príprave 2011/2012.

[4] Ľ. Balko, J. Korbaš: *A note on the characteristic rank of a smooth manifold*, J. Korbaš (ed.) et al., Group actions and homogeneous spaces. Proceedings of the international conference, Bratislava topology symposium "Group actions and homogeneous spaces", Bratislava, Slovakia, September 7–11. 2009. Bratislava: Univ. Komenského, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky. 7-11 (2010). (Zbl 1222.57024)

[5] V. Bartík, J. Korbaš, *Stiefel-Whitney characteristic classes and parallelizability of Grassmann manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo **2** (1984), no. 33 (Suppl. 6), 19-29.

[6] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *Coverings of fibrations*, Compositio Mathematica **26** (1973), no. 2, 119-128.

[7] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York 1993.

[8] S. Chern, E. Spanier, *The homology structure of sphere bundles*, Proc. N. A. S. **36** (1950), 248-255.

[9] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, New York 1976.

[10] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[11] Ľ. Horanská, J. Korbaš, *On cup product in some manifolds*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin (2000), no. 8, 119-130.

[12] W. Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*, Springer, Berlin 1975.

[13] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Third edition, Springer Verlag, New York 1994.

[14] S. J. Jungkind, *Some computations of the homology of real Grassmann manifolds*, Master's thesis, The University of British Columbia 1979.

[15] J. Korbaš, *On fibrations with Grassmannian fibers*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin (2001), no. 8, 119-130.

[16] J. Korbaš, *Bounds for the cup-length of Poincaré spaces and their applications*, Topology Appl. (2006), no. 153, 2976-2986.

[17] J. Korbaš, *The cup-length of the oriented Grassmannians vs a new bound for zero-cobordant manifods*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin (2010), no. 17, 69-81.

[18] S. Lang, *Algebra*, Revised third ed., Springer-Verlag, New-York 2005.

[19] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1974.

[20] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie Groups. Part I*, Translations of Math. Monographs 91, American Mathematical Society, 1991.

[21] A. C. Naolekar, A. S. Thakur, *Note on the characteristic rank of vector bundles*, preprint, Indian Statistical Institute, Bangalore Centre, 8th Mile Mysore Road, Bangalore, 560059 India; isibang/ms/2012/1, January 20th, 2012.

[22] C. Rader, *The Betti numbers of Grassmannians*, Proceedings of the Twelfth Brazilian Mathematical Colloquium, Vol. I, II, Cons. Nac. Deselvovimento Ci. Tec., Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro 1981, pp. 347-378.

[23] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

[24] R. E. Stong, *Cup product in Grassmannians*, Topology Appl. **13** (1982), no. 2, 103-113.

[25] F. W. Warner, *Foudations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York 1993.

[26] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[27] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc. (1949), no. 55, 213-245.

[28] M. Zisman, *Fibre Bundles, Fibre Maps*, I. M. James (ed.), History of Topology, Amsterdam: Elsevier, 605-629 (1999).