

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme dvoma základnými problémami extremálnej teórie grafov: Problémom kliebok a Problémom existencie expandujúcich grafov. V *Probléme kliebok* hľadáme pre každé $k \geq 3$ a $g \geq 3$ (k, g) -graf, (t.j. k -regulárny graf obvodu g) najmenšieho možného rádu, nazývaný *klietka*. *Problém existencie expandujúcich grafov* na druhej strane zahŕňa problém vytváranie tried vysoko súvislých, ale zároveň riedkych grafov.

V práci skúmame konštrukčné techniky a štrukturálne vlastnosti (k, g) -grafov a kliebok, s osobitným zameraním na potrebu rekurzívneho vytvárania $(k, g + 1)$ -grafov z (k, g) -grafov. Ukážeme, že takáto rekurzívna konštrukcia, ktorej výsledkom by boli väčšie a väčšie grafy s konštantným koeficientom zväčšovania, pre párne g nie je možná. Napriek tomu predstavíme novú rekurzívnu metódu na konštrukciu $(k + 1, 6)$ -grafov z $(k, 6)$ -grafov. Pri skúmaní štrukturálnych vlastností (k, g) -grafov a kliebok uvažujeme širšiu perspektívu skúmaním spektier rádov (k, g) -grafov, ktoré sú definované ako množiny všetkých možných rádov (k, g) -grafov pre dané parametre k a g . Pomocou teoretických aj výpočtových prístupov určujeme kompletne spektrá rádov pre rôzne páry (k, g) a prezentujeme čiastkové výsledky pre parametre, pre ktoré spektrá zatiaľ zostávajú neúplné.

Následne študujeme $(k, g, g + 1)$ -grafy, čo sú (k, g) -grafy neobsahujúce cykly dĺžky $g + 1$. Predstavíme nový spodný odhad na rády týchto grafov a identifikujeme niekoľko $(k, g, g + 1)$ -kliebok. Ďalej dokážeme Campbellovu hypotézu o jedinečnosti najmenšieho $(3, 6, \overline{7})$ -grafu s nepárnym obvodom 11.

V závere skúmame Problém existencie expandujúcich grafov a skúmame potenciálne súvislosti medzi kliebkami a expandujúcimi grafmi. Predstavíme možné prepojenie medzi kliebkami a expandujúcimi grafmi zavedením troch vzájomne prepojených variantov Bermondovej a Bollobásovej hypotézy, pôvodne formulovanej v roku 1981 v kontexte Problému stupňov/priemerov. Pôvodnú hypotézu prispôbujeme kliebkam, pričom najrobustnejší variant je sformulovaný nasledovne: *Existuje konštanta c taká, že pre každý pár parametrov k, g existuje k -regulárny graf obvodu g a rádu nepresahujúceho $M(k, g) + c$; kde $M(k, g)$ označuje hodnotu takzvaného Mooreovho odhadu pre kliebky*. Ukážeme, že kladná odpoveď na ktorýkoľvek z troch variantov Bermondovej a Bollobásovej hypotézy sformulovanej pre kliebky v tejto práci by vynútila existenciu expandujúcich grafov (nekonečnej postupnosti expandujúcich grafov); čím vytvoríme fundamentálne prepojenie medzi kliebkami a expandujúcimi grafmi.