DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2025

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
BRATISLAVA 4. – 5. 9. 2025

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
JANA HAVLÍČKOVÁ
EMÍLIA MIŤKOVÁ
PETER VANKÚŠ
MICHAELA VARGOVÁ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons **CC BY-NC-SA 4.0** (vyžaduje sa: povinnosť uvádzať pôvodného autora diela; povinnosť odvodené dielo zdieľať pod rovnakou licenciou ako pôvodné dielo; len nekomerčné použitie odvodeného diela). Viac informácií o licencii a použití diela: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2025

ISBN 978-80-8147-164-3

OBSAH

PREDNÁŠKA 1: HISTORIE MATURITNÍ ZKOUŠKY **9**

DAG HRUBÝ

PREDNÁŠKA 2: GENETICKY KONŠTRUKTIVIZMUS A JEHO SPOJENCI **9**

LADISLAV KVASZ

MATTECOACH V ČESKU: PRVNÍ ROK V PRAXI **10**

ELIŠKA BERÁNKOVÁ. VLADIMÍR VANĚK

SVET TESELÁCIÍ – GEOMETRIA MEDZI PRÍRODOU, UMENÍM A VEDOU **14**

LUCIA CSACHOVÁ

DIGITÁLNE VZDELÁVACIE ÚNIKOVÉ HRY ZAMERANÉ NA KLIMATICKÚ KRÍZU VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY - ECOMYSTERY **19**

KATARÍNA KALUŽNÁ, MÁRIA ČUJDÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ČO JE ALGEBRICKÉ MYSLENIE A PREČO JE DÔLEŽITÉ HO ROZVÍJAŤ? **24**

DUŠAN DANIEL

LETO S WILMOU 2025 ..... **36**

DUŠAN DANIEL, MONIKA DILLINGEROVÁ, JANA HAVLÍČKOVÁ, EMÍLIA MIŤKOVÁ

ROZŠÍRENÁ REALITA V RUKÁCH UČITEĽA **42**

JANA HNATOVÁ

ONLINE VÝUKA MATEMATIKY OČIMA STŘEDOŠKOLSKÝCH ŽÁKŮ **47**

DENISA JAROŠOVÁ

VNÍMÁNÍ PROPORCÍ **52**

MICHAELA KASLOVÁ

GEOMETRIA V POHYBE: ČO SA MENÍ A ČO NIE? **59**

DANIELA KOVALČÍKOVÁ, PATRIK ŠTEIN

O ŠOMRANÍ V RADE **66**

EMÍLIA MIŤKOVÁ

VZDELÁVACIE ÚNIKOVÉ MIESTNOSTI VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY **70**

EMÍLIA MIŤKOVÁ, PETER VANKÚŠ70

CHYBY A NEDOSTATKY ŠTUDENTOV PRVÉHO ROČNÍKA PRI PRÁCI S ALGEBRAICKÝMI VÝRAZMI **74**

KRISTÍNA OVARY BULKOVÁ, IVETA ILAVSKÁ

VÝUČBA STEREOMETRIE POMOCOU 3D PERA 79

BARBORA POKORNÁ

PROJEKTOVÉ VYUČOVANIE NA HODINÁCH MATEMATIKY V KONTEXTE MEDZINÁRODNEJ SPOLUPRÁCE 87

MONIKA POĽANSKÁ

STRATÉGIE GYMNAZISTOV PRI ZOVŠEOBECŇOVANÍ RASTÚCICH GEOMETRICKÝCH VZOROV 96

ENIKŐ SCHNÜRER OVÁ

KLUB UČITEĽOV MATEMATIKY - MATEMATIKA MÁ MOTIVOVAŤ 101

MATEJ SLABÝ, INGRID SEMANIŠINOVÁ, MONIKA KRIŠÁKOVÁ

ARGUMENTAČNÉ VÝZVY V UČEBNICIACH AJ MIMO NICH 108

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ROZVÍJANIE METAKOGNITÍVNYCH SCHOPNOSTÍ ŽIAKOV PRI RIEŠENÍ PROBLÉMOVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH 113

MATÚŠ STÁŇA

MOBILNÝ ČÍSELNÍK A MATEMATIKA 119

VIERA UHERČÍKOVÁ

STREDNÉ HODNOTY 124

MICHAELA VARGOVÁ, PETER VANKÚŠ

Milé kolegyne, milí kolegovia.

Na Fakulte matematiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave sme zorganizovali už desiaty, jubilejný, ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky. Teší nás, že sa k nám každý rok pridávajú nové tváre, a zároveň, že sa mnohí z vás radi vraciate – či už ako autori príspevkov, alebo ako účastníci so záujmom o diskusiu a výmenu skúseností. Táto konferencia sa za uplynulé roky stala miestom, kde sa stretávajú učitelia, výskumníci a študenti so spoločným záujmom o rozvoj výučby matematiky a tiež výskumu v didaktike matematiky. Tak sa nám darí napĺňať pôvodný zámer - vytvárať priestor na zdieľanie skúseností, inšpiratívnych prístupov a aktuálnych výsledkov práce v oblasti didaktiky matematiky.

V zborníku, ktorý držíte v rukách, nájdete príspevky reflektujúce rozmanité témy – od výskumných štúdií až po praktické skúsenosti z vyučovania. Veríme, že publikované texty podnietia nové diskusie, prinesú inšpiráciu pre výučbu a podporia spoluprácu medzi jednotlivými členmi našej odbornej komunity.

V mene programového a organizačného výboru srdečne ďakujem všetkým, ktorí sa podieľali na príprave a priebehu konferencie. Osobitné poďakovanie patrí študentkám a študentom našej fakulty, ktorí svojou pomocou významne prispeli k jej hladkému priebehu.

Ďakujeme tiež projektu **KEGA č. 076UK-4/2024** za podporu, ako aj kolegom z Oddelenia propagácie fakulty za obrazovú dokumentáciu a videozáznamy pozvaných prednášok. Tie si budete môcť postupne pozrieť na **YouTube kanáli FMFI UK**.

Tešíme sa na opätovné stretnutie v septembri 2026 na jedenástom ročníku konferencie Dva dni s didaktikou matematiky!

za programový a organizačný výbor želá
Mária Slavíčková

PREDNÁŠKA 1: HISTORIE MATURITNÍ ZKOUŠKY

DAG HRUBÝ

V úvodu přednášky byla zmíněna historie gymnázií do 16. do 19. století a podány informace o zavedení maturitní zkoušky v některých zemích Evropy. Hlavní pozornost byla věnována historii maturitní zkoušky na území Čech a Moravy v době od roku 1849 do roku 2011. Byly uvedeny ukázky maturitních úloh z matematiky z různých historických období. Závěr přednášky byl věnován maturitním zkouškám z matematiky v zahraničí.

RNDr. Dag Hrubý, PhD.
Gymnázium Jevíčko
Česká Republika
Email: hruby@gymjev.cz.

PREDNÁŠKA 2: GENETICKY KONŠTRUKTIVIZMUS A JEHO SPOJENCI

LADISLAV KVASZ

Genetický konštruktivizmus označovaný aj ako Hejného metóda sa mnohým javí ako marginálna iniciatíva skupinky nadšencov. Cieľom prednášky bude ukázať, že takýto dojem vzniká v dôsledku obmedzenosti horizontu, na ktorom je genetický konštruktivizmus často posudzovaný. Keď sa na genetický konštruktivizmus pozrieme v širšom kontexte reforiem vyučovania matematiky v západnej Európe a USA, zistíme, že je v súlade s hlavným trendom týchto reforiem. Podobne keď genetický konštruktivizmus zasadíme do širšieho teoretického rámca kognitívnych vied, zistíme, že je v súlade s trendmi v kognitívnych vedách. Cieľom prednášky bude načrtnúť širší historický kontext v rámci ktorého je možné genetický konštruktivizmus vnímať ako súčasť hlavného prúdu reformných snažení v oblasti didaktiky matematiky. Veríme, že zasadenie genetického konštruktivizmu do tohto širšieho kontextu pomôže prekonať animozitu, s ktorou je v niektorých kruhoch konfrontovaný.

Text článku je dostupný v časopise Pedagogická Orientace na
https://journals.muni.cz/pedor/article/view/41066

prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Česká Republika
e-mail:

MATTECOACH V ČESKU: PRVNÍ ROK V PRAXI

ELIŠKA BERÁNKOVÁ. VLADIMÍR VANĚK

ABSTRAKT. *Mattecoach je online platforma, kde studenti učitelství pomáhají žákům s matematikou prostřednictvím textového chatu. Projekt, původem ze Švédska, byl v roce 2024 spuštěn i v České republice. Příspěvek shrnuje zkušenosti a výsledky z prvního roku fungování a ukazuje, jak může peer-to-peer přístup podporovat porozumění matematice.*

O Mattecoachi

Matematika je neodmyslitelnou součástí základního a středního vzdělávání, přičemž často představuje výzvu nejen pro žáky, ale i pro učitele. Právě proto je zásadní hledat efektivní způsoby, jak tuto výzvu překonat a podpořit žáky v jejich rozvoji. Aplikace Mattecoach přináší moderní řešení pro efektivní doučování, které je dostupné, flexibilní a anonymní. Projekt si klade za cíl zpřístupnit kvalitní matematické doučování široké skupině žáků.

Aplikace Mattecoach byla spuštěna v roce 2009 ve Švédsku s cílem poskytnout online podporu v matematice žákům základních a středních škol. Projekt je výsledkem spolupráce tří švédských univerzit: Linköping University, KTH Royal Institute of Technology (Stockholm) a Chalmers University of Technology (Göteborg). V roce 2023 byla aplikace spuštěna také ve Skotsku, kde je realizována na University of Edinburgh. Vznik anglické verze umožnil zpřístupnit aplikaci studentům po celém světě. V roce 2024 byla navázána spolupráce mezi švédskými univerzitami a Univerzitou Palackého v Olomouci, díky čemuž se projekt rozšířil do České republiky a nabízí žákům základních a středních škol podporu při studiu matematiky v češtině. Česká verze aplikace byla spuštěna v říjnu 2024 a je dostupná na webových stránkách mattecoach.upol.cz.

Stejně jako ve Švédsku, i v Česku aplikace poskytuje služby zdarma. Tento přístup reflektuje základní filozofii projektu: zajištění rovného přístupu ke vzdělání bez ohledu na socioekonomické podmínky studentů. Česká verze aplikace funguje od pondělí do čtvrtka v časovém rozmezí 17:00–20:00 podle švédského modelu, který se osvědčil jako efektivní.

Aplikace Mattecoach je určena žákům základních a středních škol, kteří chtějí zlepšit své dovednosti v matematice. Žáci mohou aplikaci využít k opakování na test, k řešení konkrétního příkladu nebo i v případě, že chtějí probrat celou kapitolu, se kterou si neví rady nebo na ni ve škole chyběli. Bez ohledu na to, zda mají pocit, že jsou pozadu a potřebují pomoci, nebo zda míří na nejvyšší známky anebo je zajímá nějaká kapitola, kterou ve škole ještě neprobírali. V této souvislosti může být Mattecoach i nástrojem a příležitostí pro podporu matematicky nadaných žáků, kteří mohou aplikaci využít k prozkoumání nových témat ve spolupráci s kouči.

Samotné doučování probíhá prostřednictvím chatu a interaktivní tabule, což nabízí možnost anonymní a personalizované pomoci. Používání chatu a sdílené tabule také umožňuje flexibilitu při poskytování pomoci s matematikou odkudkoli, kde ji žáci potřebují. Využití chatu nabízí koučům možnost komunikovat s více žáky najednou a každý žák tak může pracovat vlastním tempem. K textu v chatu a na tabuli se mohou žáci během konverzace vracet a díky tomu se více orientují v probíraném tématu. Platforma je dostupná na všech zařízeních s webovým prohlížečem.

Jedním z klíčových rysů aplikace Mattecoach je její flexibilita a uživatelská přívětivost. Žáci mohou anonymně a jednoduše vstoupit do systému. Stačí zadat své jméno (může být

i smyšlené), ročník, lokalitu a téma, které potřebují konzultovat. Následně jsou propojeni s koučem, který jim prostřednictvím chatu a sdílené tabule pomáhá porozumět zadanému problému. Tento model umožňuje efektivní a personalizovanou výuku v bezpečném online prostředí.

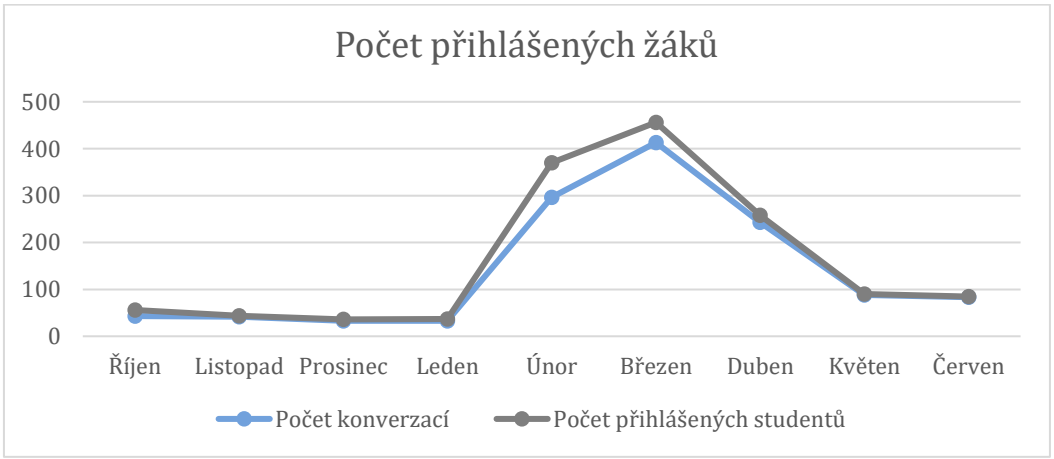
Způsob práce s žáky vychází z peer-to-peer přístupu, kdy se studenti učitelství matematiky stávají průvodci žáků při řešení úloh. Koučové dbají na to, aby žák aktivně přemýšlel a postupně si osvojil postup řešení. Nesnaží se úlohu vyřešit za něj, ale kladou důraz na zjištění, čemu žák již rozumí a kde nastal problém. Poté ho vedou k tomu, aby si na správný postup přišel sám. Takový přístup pomáhá žákům lépe porozumět matematickým konceptům a rozvíjet schopnost samostatně řešit problémy.

Služby doučování zajišťují vysokoškolští studenti učitelství matematiky Přírodovědecké a Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, kteří kombinují odborné znalosti s didaktickými dovednostmi získanými během svého studia. Koučové také procházejí speciálním školením zaměřeným na online výuku matematiky a koučování, což zaručuje vysokou kvalitu poskytovaných služeb. Koučové jsou připraveni řešit úlohy všech úrovní obtížnosti, od jednoduchých rovnic po komplexní matematické koncepty a rádi žákům pomohou s jakýmkoli matematickým problémem.

Projekt Mattecoach sleduje tři klíčové cíle. Prvním je podpora žáků prostřednictvím kvalifikované a dostupné pomoci v matematice pro žáky základních a středních škol. Druhým cílem je rozvoj budoucích učitelů, kterým projekt nabízí příležitost rozvíjet své didaktické i odborné kompetence v prostředí online výuky. Třetí oblastí je výzkum online výuky matematiky, jenž umožňuje sledovat a analyzovat nové formy komunikace, přístupy k učení i efektivitu peer-to-peer podpory v matematice.

Výsledky za první rok fungování

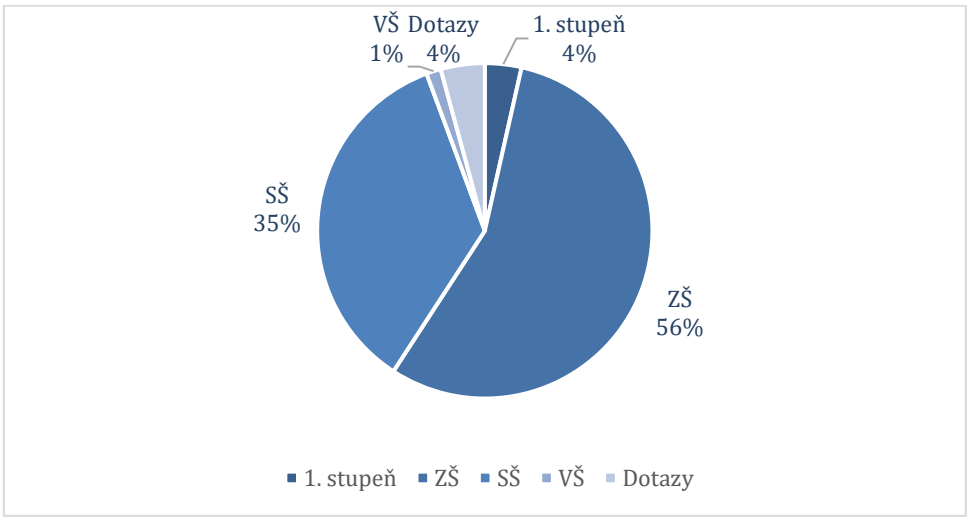
Aplikace Mattecoach byla v České republice spuštěna 14. října 2024 a během prvního roku se do jejího fungování se zapojilo 22 koučů, kteří uskutečnili celkem 1274 konverzací s žáky. Celkově studenti odkoučovali 1831 hodin. Během školního roku se Mattecoach postupně dostal do povědomí veřejnosti díky propagaci na základních a středních školách, na dnech otevřených dveří PřF UP i prostřednictvím médií – v periodikách, rozhlase a televizi.



Graf 1

Na Univerzitě Palackého byl zároveň vytvořen vysokoškolský předmět Mattecoach (2 kredity), který studentům poskytuje teoretické zázemí online výuky, praktický výcvik koučování a prostor pro analýzu a reflexi reálných chatů.

Graf 1 ukazuje průběh počtu konverzací v jednotlivých měsících. Mattecoach byl nejvíce využíván v obdobích, kdy žáci pociťují větší potřebu podpory a opakování učiva – především od února do dubna, kdy se žáci připravují na přijímací zkoušky a maturitu. Graf zároveň odráží efekt propagace v médiích, která proběhla v únoru.



Graf 2

Z grafu 2 vidíme, že nejvíce dotazů pocházelo od žáků základních škol, i když dotazů od středoškoláků bylo také značné množství. Ojediněle se na nás obraceli i vysokoškolští studenti nebo žáci s dotazy z jiných předmětů než matematiky. Pokud je to v našich možnostech, snažíme se pomáhat i s úlohami z fyziky či jiných oblastí, případně žáky odkazujeme na vhodnou podporu.

Mezi nejčastějšími tématy u žáků základních škol dominovaly přijímací zkoušky, algebraické výrazy, aritmetika a slovní úlohy. Středoškolští studenti se nejčastěji ptali na rovnice, nerovnice a funkce, přičemž výrazně převažovala témata exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a funkcí.

Z těchto výsledků vyplývá, že Mattecoach nejčastěji využívají žáci druhého stupně ZŠ (zejména 8. a 9. třídy) a studenti prvních dvou ročníků SŠ. Tento trend odpovídá skutečnosti, že právě v tomto období se žáci setkávají s náročnějšími matematickými tématy a Mattecoach tak přirozeně pokrývá přechodové období mezi základní a střední školou, kde bývá potřeba podpory největší.

První rok fungování potvrdil, že Mattecoach dokáže efektivně propojit podporu žáků s rozvojem studentů učitelství. Aplikace přináší moderní způsob doučování založený na peer-to-peer přístupu, který rozvíjí aktivní myšlení, samostatnost a porozumění matematice u žáků i koučů. Projekt tak otevírá nové možnosti pro inkluzivní, dostupné a smysluplné učení matematiky v online prostředí.

Grantová podpora

Tento článek vznikl za podpory projektů IGA_PrF_2025_008 a fondu F – Projekt na podporu navýšení kapacit vysokoškolského vzdělávání v učitelských studijních programech.

LITERATURA

[1] Årsrapport för Mattecoach på nätet 2022. [online] [cit. 2025-10-30]. Dostupné z: https://cdn.prod.website-files.com/649064a96e06ca6b51520649/64f77fb5d8507bc28f172f89_A%CC%8Arsrapport%202022%20Mattecoach%20pa%CC%8A%20na%CC%88tet.

[2] LÄTHÉN, Sara, 2024. Maths Coach Online – university students help with maths. LiU Magazine [online]. Linköping: Linköping University, 2024. [cit. 2025-10-29]. Dostupné z: https://liu.se/en/news-item/maths-coach-online-

[3] https://www.mattecoach.se

[4] https://mattecoach.upol.cz/

[5] https://www.mathscoach.scot/

Mgr. Eliška Beránková, Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.
Univerzita Palacké v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie
17. listopadu 1192/12
CZ – 779 00 Olomouc
e-mail: eliska.berankova01@upol.cz
vladimir.vanek@upol.cz

SVET TESELÁCIÍ – GEOMETRIA MEDZI PRÍRODOU, UMENÍM A VEDOU

LUCIA CSACHOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku sa pozrieme na to, čo všetko môžeme chápať ako teselácie a prečo sú vhodné pre školskú matematiku. Zameriame sa nielen na ich matematickú podstatu, ale aj na estetickú hodnotu a využitie v architektúre, prírodných vedách či umeleckej tvorbe.*

Teselácie

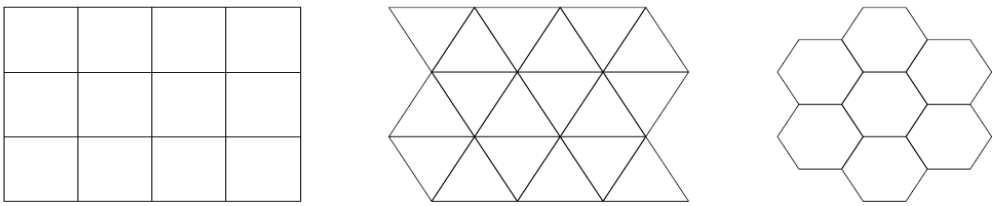
Pod *rovinnou teseláciou* rozumieme pokrytie roviny útvarmi bez medzier a prekrytí. Napriek tomu, že reálna tesel ácia neexistuje (medzery medzi reálnymi útvarmi majú nenulovú šírku), teselácie slúžia ako model pre rôzne situácie zo sveta umenia, prírody či vedy (Csachová, 2010).

Podľa nového štátneho vzdelávacieho programu je vhodné využívať rovinné teselácie pre zhodné a podobné zobrazenia v rovine v 2. a 3. cykle vzdelávania (NIVAM, 2023). Teselácie sú ale vhodné už aj v predprimárnom vzdelávaní a 1. cykle základnej školy nielen na propedeutické budovanie základných poznatkov o zobrazeniach, ale i na zoznamovanie sa s mnohouholníkmi vytvárajúcimi teselácie. Dôležitá je pritom manipulácia s útvarmi a objavovanie pravidiel, podľa ktorých je možné vytvoriť teseláciu vyznačujúcu sa pravidelnosťou v usporiadaní útvarov či ich farebnosti (Callingham, 2004; Csachová, 2010; Swoboda, 2006).

Príspevok sa venuje stručnému opisu rovinných tesel ácií vyznačujúcich sa pravidelnosťou v usporiadaní a školskej matematike ukrytej v nich. Vychádza najmä z prác (Csachová, 2010) a (Csachová, Zastková, 2024), kde sú zhrnuté informácie aj o ďalších typoch rovinných tesel ácií.

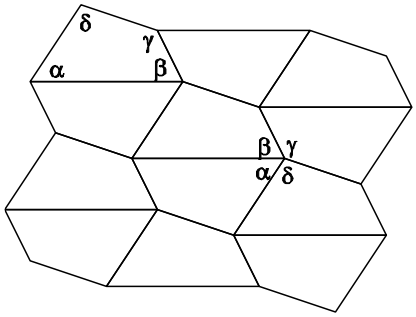
Mnohouholníkové teselácie

Teselácie vytvorené opakovaním iba jedného typu pravidelného mnohouholníka sú tri – Obr. 1. Štvorec, rovnostranný trojuholník a pravidelný šesťuholník môžeme použiť ako opakujúci sa útvar v rovine bez medzier a prekrytí. Dôvodom je, že veľkosť vnútorného uhla týchto mnohouholníkov určuje počet zhodných útvarov, ktoré sa môžu „stretnúť“ v jednom vrchole ($4 \cdot 90° = 360°$, $6 \cdot 60° = 360°$, $3 \cdot 120° = 360°$). Žiaden ďalší pravidelný mnohouholník tejto podmienke nevyhovuje.

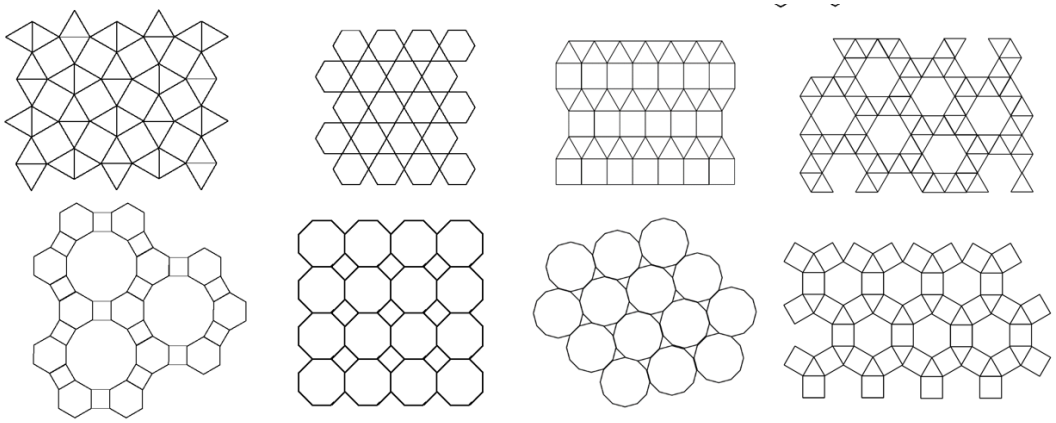


Obrázok 1: Teselácie vytvorené opakovaním jedného pravidelného mnohouholníka (zdroj: autorka)

Rovinnú teseláciu je však možné vytvoriť aj opakovaním ľubovoľného konvexného i nekonvexného štvoruholníka ako je možné vidieť na Obr. 2. A keďže dva ľubovoľné zhodné trojuholníky vytvárajú rovnobežník, aj ľubovoľný trojuholník je možné použiť na vytvorenie rovinnej teselácie. Existuje 15 typov konvexných päťuholníkov a 3 typy konvexných šesťuholníkov vytvárajúcich rovinnú teseláciu. Platí ale, že opakovaním žiadneho konvexného n-uholníka s $n \geq 7$ už nie je možné vytvoriť rovinnú teseláciu.



Obrázok 2: Teselácia vytvorená opakovaním všeobecného štvoruholníka s vyznačenými vnútornými uhlami (zdroj: autorka)



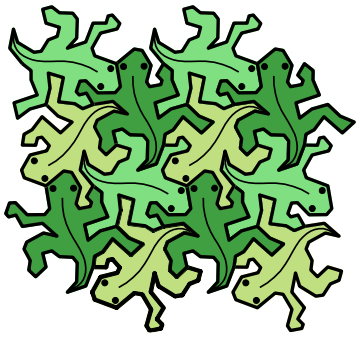
Obrázok 3: Teselácie vytvorená opakovaním jedného všeobecného štvoruholníka s vyznačenými vnútornými uhlami (zdroj: autorka)

Rovinnú teseláciu možno vytvoriť aj opakovaním kombinácie dvoch alebo troch pravidelných mnohouholníkov tak, že okolo každého vrcholu sa stretáva rovnaký počet rovnakých pravidelných mnohouholníkov s rovnakým usporiadaním. Takýchto kombinácií je práve 8 a sú na Obr. 3. Niektoré z nich sa kvôli svojej estetickej hodnote vyskytujú napr. ako dlažby v kostoloch – Obr. 4.

Obrázok 4: Teselácia – dlažba vytvorená opakovaním pravidelného osemuholníka a štvorca - bazilika sv. Marka v Benátkach a katedrála sv. Václava v Olomouci (zdroj: autorka)

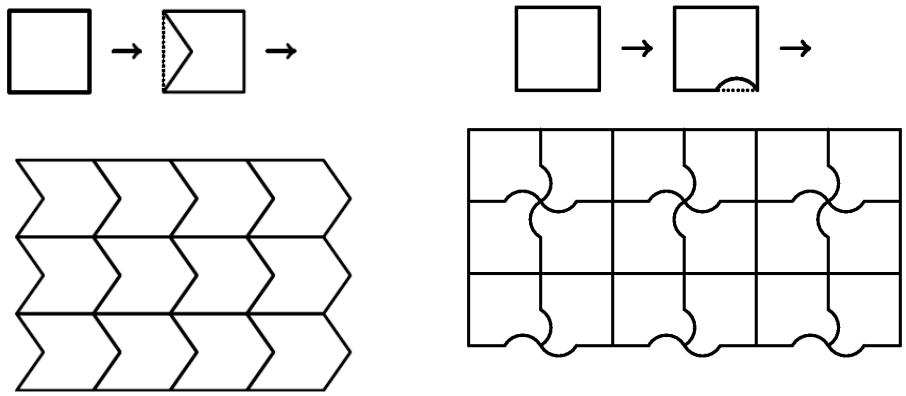
Echerovské teselácie

Útvary vytvárajúce rovinné teselácie nemusia byť len mnohouholníkové. Takémuto typu umenia sa venoval holandský grafik M. C. Escher (1898-1972). Medzi jeho „geometrické“ grafiky s motívom teselácií patrí aj grafika *Reptiles* (1943), v ktorej sa opakuje tvar jašterice bez medzier a prekrytí – ako na Obr. 5 vľavo. Pri vytváraní jednej jašteričky a podobne aj sovičky (na Obr. 5 vpravo) boli použité zhodné zobrazenia – posunutie a otočenie. Takéto teselácie nazývame *escherovské*.



Obrázok 5: Escherovské teselácie vytvorené opakovaním útvaru v tvare jašteričky podľa Escherovej grafiky Reptiles (1943) a sovičiek (zdroj: autorka)

Postup je nasledovný a evidentný z obrázkov na Obr. 6 vľavo a vpravo. Vychádzame zo štvorcovej tesel
ácie (alebo z inej známej mnohouholníkovej tesel
ácie). Dôraz je kladený na to, aby opakujúce sa útvary v tesel
ácii vznikli zo štvorca (alebo iného teselujúceho útvaru) pomocou deformácie jeho strany a jej posunutia na protiľahlú stranu alebo otočenia okolo vrcholu na susednú stranu. Deformácia a jej posunutie alebo otočenie musia byť také, aby sa obsah pôvodného útvaru (v tomto prípade štvorca) zachoval.



Obrázok 6: Escherovské teselácie vytvorené opakovaním útvaru vytvoreného zo štvorcovej teselácie (posunutím – vľavo, otočením - vpravo) (zdroj: autorka)

Záver

Rovinné teselácie sú vhodným prostriedkom na rozvoj geometrických predstáv žiakov na všetkých stupňoch vzdelávania. Ich prostredníctvom možno zavádzať pojmy zhodnosti, podobnosti či symetrie v rovine. Umožňujú prepojenie matematiky s výtvarným umením a vedú žiakov k hľadaniu vzorov, pravidelností a zákonitostí.

Escherovské teselácie navyše otvárajú priestor pre rozvoj tvorivosti, estetického cítenia a interdisciplinárneho učenia. Spojenie matematiky a umenia v tejto podobe podporuje nielen kognitívny, ale aj emocionálny aspekt učenia, čím sa matematika stáva pre žiakov zmysluplnejšou a atraktívnejšou.

LITERATÚRA

[1] Callingham, R.: *Primary students' understanding of tessellation: an initial exploration,* in Hoines, M. J., Fuglestad, A. B. (Eds.), Proceedings of the 28th PME, vol. 2, 2004, pp. 183-190, *publikácie, diela*, mesto-Bratislava, vydavateľstvo, 2003

[2] Csachová, L.: *Pravidelné a náhodné teselácie (dizertačná práca)*, Praha, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, 2010

[3] Csachová, L., Zastková, Z.: *Rozvíjanie geometrického myslenia detí predškolského veku pomocou teselácií – Zimné mestečko škriatkov,* Institutio infanti 1, 2024, ISSN 2989-381X

[4] Csachová, L., Zastková, Z.: *Teselácie vo výučbe matematiky – prostriedok podporujúci expresivitu detí,* Ružomberok, Verbum, 2024, ISBN 978-80-561-1114-7

[5] NIVAM: *Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie*, *Vzdelávacie štandardy, Vzdelávacia oblasť Matematika a informatika,* 2023, dostupné online https://www.minedu.sk/data/files/11820_marematika-a-informatika.pdf

[6] Swoboda, E.: *Przestrzen, regularnosci geometryczne i kszalty w uczeniu sie i nauczaniu dzieci,* Rzeszow, Wydawnictwo Univerytetu Rzeszowskiego, 2006, ISBN 8373381848

RNDr. Lucia Csachová, PhD
Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Hrabovská 1
SK 034 01 Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@ku.sk

DIGITÁLNE VZDELÁVACIE ÚNIKOVÉ HRY ZAMERANÉ NA KLIMATICKÚ KRÍZU VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY - ECOMYSTERY

KATARÍNA KALUŽNÁ, MÁRIA ČUJDÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci pracovnej dielne si účastníci najskôr zahrajú ukážky vzdelávacích únikových hier určených na vyučovanie matematiky s kontextom klimatickej krízy. Následne budú v rámci skupinovej práce a diskusie navrhovať vlastné aktivity vhodné pre zaradenie do takýchto únikových hier.*

Úvod

Únikové hry predstavujú tímové aktivity, v ktorých hráči objavujú stopy, riešia hádanky a plnia konkrétny cieľ — napr. uniknúť z miestnosti v stanovenom časovom limite (Nicholson, 2015). Tento pôvodne zábavný formát si našiel svoje miesto aj vo vzdelávaní, kde nadobudol podobu vzdelávacích únikových hier (Educational Escape Rooms, ďalej EERs). Špecifickým typom sú digitálne vzdelávacie únikové hry (Digital Educational Escape Rooms, DEER), ktoré predstavujú moderné formy digitálnych aplikácií založených na hre a ponúkajú pútavé, interaktívne a prakticky orientované vzdelávacie zážitky.

EERs sa vnímajú ako inovatívny prístup k uplatňovaniu princípov učenia založeného na hre (game-based learning), ktorý podporuje aktívne učenie, motiváciu, spoluprácu, riešenie problémov a kritické myslenie (Manzano-León et al., 2021; Taraldsen et al., 2022).

Podľa Fotarisa a Mastorasa (2019) vzdelávacie únikové hry umožňujú žiakom stať sa aktívnymi účastníkmi učebného procesu. Prostredníctvom riešenia výziev získavajú skúsenosti s rôznymi prístupmi k riešeniu problémov, rozvíjajú spoluprácu a sociálne väzby, čo podporuje ich kognitívny aj afektívny rozvoj.

V kontexte prípravy budúcich učiteľov, najmä učiteľov matematiky, fyziky a informatiky, sú vzdelávacie únikové hry skúmané nielen ako nástroj učenia, ale aj ako objekt, ktorý študenti navrhujú a tvoria, čo je prvok, ktorého dôležitosť zdôrazňuje konštrukcionizmus (Papert, 1980; Kalaš et al., 2011). Štúdie (napr. Čujdíková & Vankúš, 2023) naznačujú, že študenti učiteľstva matematiky, fyziky a informatiky oceňujú možnosť oboznámiť sa s rôznymi formátmi únikových hier – od digitálnych hier vytvorených v Google Forms cez hry v nástroji Room Escape Maker, až po plne imerzívne fyzické miestnosti a tzv. krabicové (box-based) únikové hry. Tieto formáty im umožňujú reflektovať didaktický potenciál hier, analyzovať ich vhodnosť pre rôzne prostredia a uvažovať o možnostiach ich implementácie do vlastnej vyučovacej praxe.

S narastajúcimi požiadavkami na učiteľské povolanie a dôrazom na celoživotné vzdelávanie pedagógov získavajú vzdelávacie únikové hry význam aj ako nástroj profesijného rozvoja. Ponúkajú zmysluplné, kolaboratívne a reflexívne vzdelávacie skúsenosti, ktoré posilňujú kompetencie v oblastiach riešenia problémov, komunikácie a inovatívneho prístupu k výučbe (Veldkamp, 2020). Z toho dôvodu sme v rámci našej pracovnej dielne predstavili účastníkom viaceré formáty vzdelávacích únikových hier a diskutovali sme špecifiká ich integrácie do školského vyučovania.

Použité vzdelávacie únikové hry

Cieľom tejto kapitoly je predstaviť a charakterizovať únikové hry predstavené v rámci pracovnej dielne. Tieto hry vytvorili študenti prvého ročníku učiteľstva na FMFI UK počas predmetu *Hrové vyučovanie matematiky*.

Digitálne únikové hry uvedené v tomto príspevku možno rozdeliť do dvoch hlavných kategórií: príbehové (vytvorené v prostredí Google Forms) a interaktívne dobrodružné (vytvorené v prostredí Room Escape Maker) (Čujdíková & Vankúš, 2024).

Konkrétnym príkladom príbehovej únikovej hry je hra „Príbeh kolobehu vody v prírode“ (obrázok 1), v ktorej majú účastníci za úlohu zachrániť rieku a jej zásobník vody. Ako študenti postupujú hrou, oboznamujú sa s obsahom súvisiacim s prirodzeným kolobehom vody v prírode a jeho environmentálnym významom. Zároveň riešia matematické problémy vložené do deja, napríklad výpočet rýchlosti odparovania vody zo zásobníka alebo odhad času, za aký by mohla rieka vyschnúť.

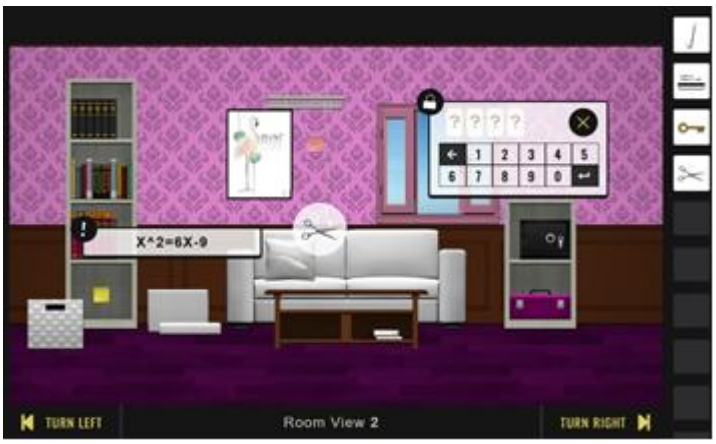
Obrázok 1: hra Príbeh kolobehu vody v prírode,
zdroj: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeua0egf6Oq-7UMTIvoNRK1TtLWF55ZE6vfNxZNkHEU1r39_A/viewform

Ako je znázornené na obrázku 1, každá časť únikovej hry obsahuje naratívny úsek (časť príbehu), ilustračný obrázok a súvisiacu matematickú úlohu, pričom pre žiaka je vyhradené miesto na vloženie odpovede. V závislosti od potrieb príbehu je možné v rámci jedného úseku zahrnúť aj viacero nadväzujúcich otázok.

Po tom, ako žiak zadá svoju odpoveď, systém vyhodnotí výsledok a nastane jedna z dvoch možností: ak je odpoveď správna, systém ho posunie k ďalšej úlohe (t. j. na nasledujúcu stránku); ak je odpoveď nesprávna, zvýrazní sa červenou farbou a zobrazí sa hlásenie, že odpoveď nie je správna. Žiaci majú neobmedzený počet pokusov na opravu a opätovné odoslanie odpovede.

V kategórii interaktívnych dobrodružných únikových hier vytvorili budúci učitelia vzdelávacie aktivity s využitím prostredia Room Escape Maker. V tomto prípade sa ich hlavná pozornosť sústredila na tvorbu matematicky orientovaných úloh vložených do simulovaného virtuálneho prostredia. Okrem matematického obsahu bol dôraz kladený aj na udržiavanie zvedavosti hráčov prostredníctvom interaktívneho skúmania prostredia a vizuálnej atraktivity.

Táto kategória únikových hier je navrhnutá tak, aby napodobňovala zážitok z fyzickej únikovej miestnosti v online formáte. Na začiatku hry sa hráči ocitajú vo virtuálnej miestnosti, kde majú pred sebou zobrazené všetky viditeľné objekty a môžu sa pohybovať zmenou pohľadu doľava alebo doprava. Prostredie zvyčajne obsahuje rôzne interaktívne prvky, ako sú dvere, kusy nábytku či nástroje, ktoré je možné zbierať a ukladať na neskoršie použitie (pozri obrázok 2).



Obrázok 2: hra vytvorená v Room Escape Maker,
zdroj: https://roomescapemaker.com/u/kristi03/escape

Konečným cieľom hry je nájsť konkrétny kľúč alebo kód, ktorý umožní odomknúť východové dvere, nachádzajúce sa v inom pohľade na virtuálnu miestnosť.

Záver

V rámci príspevku sme predstavili dve vzdelávacie únikové hry spájajúce učivo matematiky a tematiku klimatickej krízy. Takéto únikové hry sú súčasťou aktivít projektu *EcoMystery – Interactive Escape Rooms for Climate Crisis Awareness and Civic Engagement in School Education*. V rámci projektu sú rozvíjané viaceré vzdelávacie aktivity, ktoré prepájajú tematiku klimatickej krízy s digitálnymi a fyzickými únikovými hrami. Projekt tiež zahŕňa výskum súčasného stavu vzdelávania o klimatickej kríze v rôznych krajinách a vývoj vzdelávacích programov pre učiteľov, ktoré im pomáhajú integrovať hru ako prostriedok rozvoja kritického myslenia, spolupráce a občianskej zodpovednosti žiakov.

Veríme, že digitálne vzdelávacie hry predstavené v rámci našej pracovnej dielne budú inšpiráciu pre tvorbu obdobných vzdelávacích aktivít vhodných pre školské vyučovanie matematiky.

Grantová podpora

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní* a projektu ERASMUS+ 2024-1-IT02-KA220-SCH-000248873 *The EcoMystery Project: Interactive Escape Rooms for Climate Crisis Awareness and Civic Engagement in School Education*.

LITERATÚRA

[1] Čujdíková, M., Vankúš, P.: Design of an Educational Escape Room by Future Teachers, Košice-Proceedings of the 17th European Conference on Games Based Learning, 2023, https://doi.org/10.34190/ecgbl.17.1.1624

[2] Dddaaadddooo.: ROOM ESCAPE MAKER, online, https://roomescapemaker.com/u/terezkajesuper

[3] Fotaris, P., Mastoras, T.: Escape rooms for learning: A systematic review, Proceedings of the 13th European Conference on Games Based Learning, 2019, https://doi.org/10.34190/GBL.19.179

[4] Kalaš, I., Kabátová, M., Mikolajová, K., & Tomcsányi, P. (2011). Konštrukcionizmus: Od Piageta po školu v digitálnom veku. In Proceedings of DidInfo 2011 (pp. 7–18). Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, Fakulta prírodných vied.

[5] Kristi03. (2025). Bundáskenyér [Online escape game]. ROOM ESCAPE MAKER. https://roomescapemaker.com/u/kristi03/escape

[6] Manzano-León, A., Rodríguez-Ferrer, J.M., Aguilar-Parra, J.M., Martínez Martínez, A.M., Luque de la Rosa, A., Salguero García, D., Fernández Campoy, J.M.: Escape Rooms as a Learning Strategy for Special Education Master's Degree Students, International Journal of Environmental Research and Public Health, 2021, https://doi.org/10.3390/ijerph18147304

[7] Nicholson, S.: Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities, 2015, White Paper available at http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

[8] Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas. Harvester Press.

[9] Príbeh o kolobehu vody [Online survey form]. Google Forms. https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeua0egf6Oq-7UMTIvoNRK1TtLWF55ZE6vfNxZNkHEU1r39_A/viewform

[10] Taraldsen, L.H., Haara, F.O., Lysne, M.S., Jensen, P.R., Jenssen, E.S.: A review on use of escape rooms in education – Touching the void, Education Inquiry, 2022, https://doi.org/10.1080/20004508.2020.1860284

[11] Vankúš, P.: Vzdelávacia úniková miestnosť: Útek z hradu, online, https://www.comae.sk/kega037UK_4_2024/aktivity.html

[12] Veldkamp, A., van de Grint, L., Knippels, M.-C.P.J., van Joolingen, W.R.: Escape Education: A Systematic Review on Escape Rooms in Education, Educational Research Review, 2020, https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364

Mgr. Mária Čujdíková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: maria.cujdikova@fmph.uniba.sk

Mgr. Katarína Kalužná
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: katarina.janoskova@fmph.uniba.sk

doc. PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

ČO JE ALGEBRICKÉ MYSLENIE A PREČO JE DÔLEŽITÉ HO ROZVÍJAŤ?

DUŠAN DANIEL

ABSTRAKT. *V príspevku načrtneme historický vývoj a kontext formovania pojmu algebrické myslenie vo vyučovaní matematiky, priblížime okolnosti jeho zavedenia do didaktického diskurzu a poukážeme na dôvody, pre ktoré je táto problematika aktuálna aj v podmienkach slovenského prostredia.*

Úvod

Výsledky externej časti maturitnej skúšky z matematiky (EČ-M) na Slovensku ukazujú, že najvyššiu úspešnosť dosahujú žiaci v obsahových oblastiach Základy matematiky a Funkcie (Ficová a kol., 2023, 2024). Tieto oblasti integrujú podstatnú časť školskej algebry – čísla, premenné a výrazy, rovnice nerovnice a ich sústavy, elementárne funkcie, funkčné vzťahy a modelovanie situácií.

Na začiatku je potrebné poznamenať, že vzhľadom na nízky počet testových položiek nemožno z týchto výsledkov vyvodzovať akékoľvek závery o skutočnom plošnom stave žiackych vedomostí. Vyvstáva však otázka, čo úspešnosť v týchto úlohách odráža, resp. aký konštrukt testové úlohy merajú. Pri obsahovej analýze úloh EČ-M v roku 2024 použili autori revidovanú Bloomovu taxonómiu (BT) (Anderson a kol., 2001). Hoci BT patrí medzi často používané rámce pri tvorbe a analýze testových úloh, viaceré výskumy upozorňujú, že jej kategórie nie vždy spoľahlivo odrážajú skutočnú kognitívnu náročnosť testových položiek. Tento problém sa opakovane prejavoval napríklad pri záverečných testoch z algebry *End-of-Course* (EOC) [1]v Severnej Karolíne, kde sa v rámci analýz ukázalo, že úlohy zaraďované do vyšších úrovní podľa kognitívnej náročnosti (napr. analyzovať alebo hodnotiť) a podľa typu poznatku do konceptuálnych vedomostí vykazovali pri testovaní výrazne vyššiu úspešnosť ako sa predpokladalo. (Lane, 2004; Nichols & Sugrue, 1999; Webb, 1999, 2002, 2007; Thompson, 2011).

V tomto príspevku ukážeme, že podobný nesúlad medzi deklarovanou a reálnou kognitívnou náročnosťou sa prejavil aj v slovenskom teste EČ-M 2024. V praxi to znamená, že model BT ako teoretický rámec nie je univerzálny - má svoje obmedzenia a v kontexte školskej algebry nemusí poskytovať pri analýze úloh spoľahlivé výsledky.

V nadväzujúcich častiach príspevku ďalej predstavíme snahy výskumníkov vytvoriť teoretický rámec, ktorý by presnejšie vystihoval, aké poznatky, zručnosti a mentálne procesy žiaci pri riešení algebrických úloh skutočne aktivujú, a ktorý by zároveň spoľahlivejšie odrážal kognitívnu náročnosť úloh než tradičné taxonomické modely. Na záver naznačíme, ako môže byť výsledný rámec využitý pri tvorbe úloh zameraných na vyššie konceptuálne vedomosti v školskej algebre a pri analýze žiackej chyby.

Problémy BT pri navrhovaní testových úloh v EČ-M 2024

Pri konštrukcii testových úloh EČ-M 2024 autori klasifikovali každú položku podľa stupňa kognitívnej náročnosti v súlade s BT (Anderson a kol., 2001). Úlohy boli rozdelené do piatich úrovní:

- porozumieť (objasniť, opísať, ilustrovať, zhrnúť),
- aplikovať (vypočítať, použiť, riešiť, demonštrovať),
- analyzovať (rozlíšiť, kategorizovať, vysvetliť vzťahy medzi časťami),

[1] Ekvivalent Testovania 9 v SR

- hodnotiť (zdôvodniť, porovnať, posúdiť, argumentovať),
- tvoriť (navrhnúť, zostaviť, formulovať, vytvoriť).

V zátvorkách sú uvedené typické činnosti reprezentujúce jednotlivé kognitívne úrovne BT. Autori pritom pochopiteľne vynechali najnižšiu úroveň - zapamätať (vymenovať, definovať, identifikovať, zopakovať), ktorá sa v testoch maturitného typu bežne neoveruje.

Výsledky úspešnosti žiakov v úlohách zaradených do jednotlivých úrovní sú uvedené v nasledujúcej tabuľke, spracovanej podľa Ficovej a kol. (2024):

	Počet	Úspešnosť	SE
Porozumieť	4 590	61,0	0,6
Aplikovať	4 590	58,2	0,4
Analyzovať	4 590	58,1	0,4
Hodnotiť	4 590	74,4	0,4
Tvoriť	4 590	36,8	0,4

Tabuľka 1: úspešnosť v úlohách EČ-M 2024 podľa kognitívnej náročnosti (Ficová a kol., 2024)

Stĺpec *Počet* uvádza počet riešiteľov testu EČ-M 2024, stĺpec *Úspešnosť* priemernú úspešnosť (v %) žiakov v úlohách patriacich do daného stupňa BT a stĺpec *SE* (standard error) vyjadruje mieru neistoty odhadu priemernej úspešnosti vzhľadom na celú populáciu maturantov.

Zistenia sú prekvapujúce – najvyššiu úspešnosť dosiahli žiaci v úlohách klasifikovaných na úrovni „hodnotiť“, zatiaľ čo úlohy z nižších úrovní neboli spravidla riešené úspešnejšie. Takýto výsledok je v rozpore s teoretickým predpokladom hierarchického usporiadania kognitívnych úrovní, podľa ktorého by sa mala úspešnosť žiakov postupne znižovať s rastúcou náročnosťou úloh. Tento princíp je pritom základom celej koncepcie BT (Anderson a kol., 2001; Ebrahimi, 2022; Orhani, 2024).

Okrem klasifikácie úloh podľa stupňa kognitívnej náročnosti zaradili autori testu každú položku aj podľa jej obsahového zamerania do jednej z dvoch dimenzií vedomostí:

- procedurálne vedomosti – znalosť algoritmov, postupov, techník a metód riešenia úloh,
- konceptuálne vedomosti – znalosť vzťahov medzi pojmami, princípov, teórií a matematických štruktúr.

Výsledky priemernej úspešnosti žiakov v úlohách zameraných na tieto dve dimenzie sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Dimenzia vedomostí	Počet	Úspešnosť	SE
Konceptuálne vedomosti	4 590	57,2	0,3
Procedurálne vedomosti	4 590	57,1	0,4

Tabuľka 2: úspešnosť v úlohách EČ-M 2024 podľa dimenzie vedomosti (Ficová a kol., 2024)

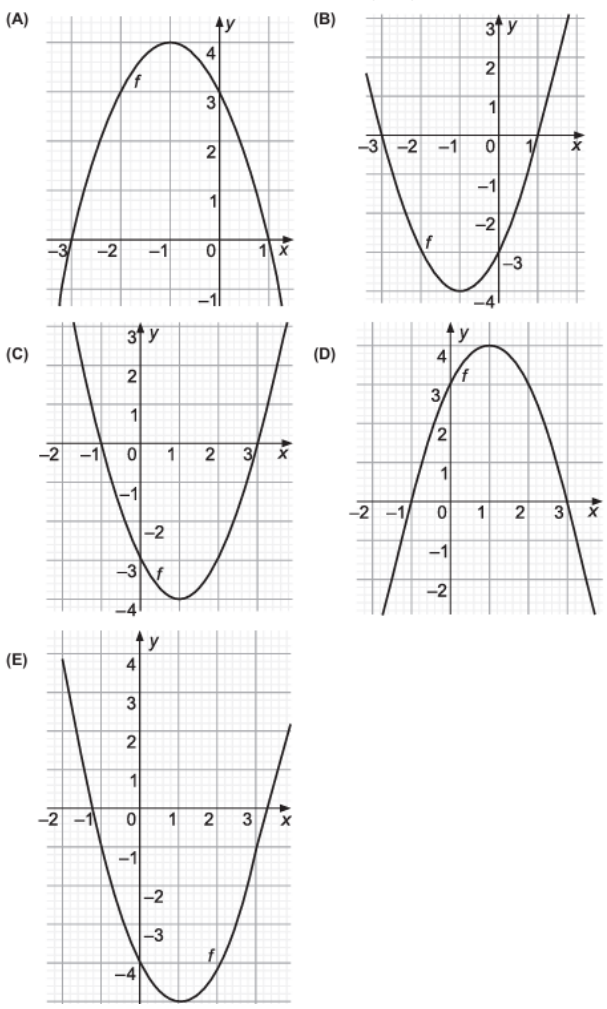
Hlavičky tabuľky 2 majú rovnaký význam ako v tabuľke 1 – stĺpec *Počet* udáva počet riešiteľov, *Úspešnosť* priemerný percentuálny zisk a *SE* (standard error) vyjadruje mieru neistoty odhadu.

Z porovnania vyplýva, že úspešnosť riešiteľov EČ-M 2024 sa v úlohách zameraných na konceptuálne a procedurálne vedomosti prakticky nelíšila. Tento výsledok je však v rozpore so všeobecne prijímaným predpokladom, že osvojenie konceptuálnych vedomostí je

kognitívne náročnejšie než osvojenie vedomostí procedurálnych, čo by sa malo odraziť aj v nižšej úspešnosti pri riešení takto zameraných úloh (Hiebert & Lefevre, 1986; Hurrell, 2021).

Aby sme demonštrovali, že tieto výsledky sú reprezentatívne aj pre obsahové oblasti týkajúce sa školskej algebry, uvedieme príklad úlohy z EČ-M 2024, u ktorej sa nameraná úspešnosť výrazne líšila od teoretického predpokladu.

Úloha 1. V ktorej možnosti je zobrazený graf funkcie $f: y = (x-1)^2 - 4$?



Obrázok 1: zadanie s poradovým číslom 25 v EČ-M 2024 (Ficová a kol., 2024)

Autori zaradili úlohu 1 podľa kognitívnej náročnosti do stupňa *hodnotiť* a podľa obsahového zamerania do dimenzie *konceptuálne vedomosti* (Ficová a kol., 2024). Takáto klasifikácia je vzhľadom na povahu úlohy primeraná – úloha vyžaduje od žiaka posúdiť, ktorý z grafov funkcie zodpovedá uvedenému predpisu na základe viacerých znakov (posun doprava a dole, určenie správnej orientácie paraboly). To zodpovedá úrovni hodnotiť. Ide pritom o prechod medzi grafickou a algebrickou reprezentáciou funkcie (ako sa zmení graf funkcie,

ak zmeníme predpis). Táto črta je typická pre konceptuálne vedomosti. Napriek tejto klasifikácii bola u tejto úlohy nameraná úspešnosť 80,8 %, čo je vysoko nad priemernou úspešnosťou v celom teste: 56,8 %.

Je potrebné dodať, že zaradenie úlohy do úrovní a dimenzií podľa BT nie je jednoznačné. Môžeme si napríklad predstaviť tabuľku, ktorej riadky by boli dimenzie a stĺpce úrovne BT. Každej bunke by sme potom mohli priradiť číslo z intervalu $\langle 0;\ 1 \rangle$ podľa stupňa príslušnosti úlohy do danej dimenzie a úrovne. Dostali by sme tak schému zobrazujúcu celú oblasť možných klasifikácií úlohy. Len ťažko si však môžeme predstaviť, že by sme úlohu 1 iba na základe opisu BT ohodnotili vysokým stupňom príslušnosti k procedurálnym vedomostiam alebo k niektorej z nižších kognitívnych úrovní (zapamätať, porozumieť, aplikovať).

Namerané výsledky však poukazujú na opak. Príčiny tohto javu môžu byť rôzne. V úvode sme už spomenuli, že podobný problém s predikciou kognitívnej náročnosti prostredníctvom BT sa opakovane prejavoval v záverečných testoch z algebry EOC v Severnej Karolíne. Podrobné analýzy týchto testov ukázali, že úlohy, ktoré boli formálne klasifikované ako overujúce vyššie konceptuálne vedomosti, v skutočnosti žiaci riešili mechanickým uplatnením naučených pravidiel a postupov (Webb, 1999, 2002, 2007). Necháme na čitateľa posúdiť, do akej miery sa toto vysvetlenie môže stotožňovať s neočakávanými výsledkami merania EČ-M 2024, špeciálne pri úlohe 1.

V každom prípade, vysoká úspešnosť pri úlohe 1 naznačuje, že táto testová položka nemerala vyššie konceptuálne vedomosti.

V tejto súvislosti sa prirodzene vynára otázka: *Ako by sa muselo upraviť zadanie úlohy, aby skutočne overovalo vyššie konceptuálne vedomosti?* Na zodpovedanie tejto otázky je potrebné najskôr upresniť, čo rozumieme pod pojmom *vyššie konceptuálne vedomosti v školskej algebre*. Ako už bolo uvedené, odpoveď nemožno hľadať prostredníctvom BT, ktorá sa v tejto oblasti ukázala ako nedostatočne spoľahlivý teoretický rámec.

Práve potreba tejto konkretizácie viedla výskumníkov k formulovaniu pojmu *algebrické myslenie* (AM) – ako osobitného typu vyšších konceptuálnych vedomostí v algebre. V nasledujúcej kapitole preto predstavíme hlavné prúdy vo výskume AM, ktoré sa v posledných desaťročiach etablovalo ako kľúčový koncept v diskusii o tom, čo znamená porozumieť algebre naprieč všetkými stupňami vzdelávania.

Cesta za teoretickým rámcom AM

V snahe poskytnúť ucelený prehľad o AM a jeho úlohe vo vyučovaní matematiky budeme vychádzať z najcitovanejších a najvplyvnejších prác v tejto oblasti. Pokúsime sa chronologicky načrtnúť, ako sa postupne formovalo chápanie AM. Každý z týchto prístupov prináša mierne odlišný, no vzájomne sa dopĺňajúci pohľad na to, čo AM zahŕňa.

Predchodcovia uceleného modelu

Prvé systematické pokusy o AM sa objavujú na prelome 20. a 21. storočia a sú spojené s autorkami Carolyn Kieran a Shelley Kriegler. Tie nadviazali najmä na Usiskina (1995) a Lee (1997), ktorí sa zaoberali analýzou častých chýb (hlavne miskoncepcií) žiakov v oblasti školskej algebry.

Kieran (2004) vo svojej práci sumarizuje výskumy zamerané na problémy žiakov pri prechode od aritmetiky k algebre. Poukazuje na to, že ťažkosti nespočívajú v samotnom zavedení neznámej alebo premennej, ale v zásadnej zmene významu znaku rovnosti a aritmetických operácií. V aritmetike žiaci chápu znak rovnosti ako „signál pre výsledok“,

aritmetickú operáciu vnímajú ako „podnet pre akciu“ a pri riešení slovných úloh postupujú v opačnom smere ako je formulované zadanie (realizujú spätný rozbor). Pri prechode k algebre je však potrebné začať vnímať znak rovnosti ako reláciu medzi dvoma kvantitami, operácie ako objekty v symbolickom zápise a riešenie úloh ako proces matematizácie reálnej situácie. Kieran tým zdôrazňuje, že AM sa rozvíja už v rannom veku prostredníctvom primeraných aktivít a nemusí nevyhnutne zahŕňať prácu so symbolickou premennou.

Kriegler (2007) poňala algebrické myslenie ako organizovaný systém matematického uvažovania tvorený dvoma prepojenými zložkami. Prvou je rozvoj nástrojov matematického myslenia tzv. analytické návyky mysle, kam zaraďuje zručnosti riešenia problémov, reprezentácie a kvantitatívneho usudzovania. Druhú zložku predstavuje štúdium fundamentálnych algebrických ideí, ktoré zahŕňa tri oblasti; algebru ako: zovšeobecnenú aritmetiku, jazyk matematických vzťahov, nástroj pre prácu s funkciami a matematickým modelovaním.

Tieto koncepcie AM poukazujú na skutočnosť, že súčasťou školskej algebry by nemali byť len procedurálne vedomosti, ale aj budovanie významu jej kľúčových konceptov.

Dimenzionálny model AM

Za prvý ucelený a široko akceptovaný model AM sa považuje trojdimenzionálny rámec Jamesa J. Kaputa, ktorý vznikol ako syntéza dovtedajších prístupov k AM.

Kaput (2008) [2] identifikuje tri vzájomne prepojené zložky: symbolizáciu, funkčné myslenie a modelovanie. Tieto tri oblasti nie sú chápané ako samostatné fázy učenia, ale ako vzájomne sa prelínajúce dimenzie algebrického uvažovania, ktoré spoločne formujú proces rozvoja AM.

Symbolizácia predstavuje schopnosť transformovať konkrétne výpočty a situácie do všeobecnej podoby. Je úzko spätá s postupným prechodom medzi rôznymi úrovňami reprezentácie, ktoré popísal Bruner (1966): enaktívnou, ikonickou a symbolickou fázou. Symbolizácia zachytáva prechod od fyzickej manipulácie s konkrétnymi predmetmi, cez virtuálnu manipuláciu (napríklad model rovnoramenných váh) až k vyjadreniu vzťahov prostredníctvom symbolov a algebrických výrazov.

Funkčné myslenie[3] označuje schopnosť analyzovať vzťahy medzi veličinami, chápať dynamiku ich zmien a identifikovať pravidlá opisujúce závislosti. Tento typ myslenia umožňuje žiakom vyjadrovať vzťahy rôznymi spôsobmi – prostredníctvom rovníc, grafov, tabuliek či slovných opisov – a tým rozvíjať hlbšie porozumenie princípu závislosti a zmeny.

Modelovanie predstavuje schopnosť flexibilne prepájať rôzne reprezentácie tej istej matematickej štruktúry. Dôležité je zdôrazniť, že algebrické modelovanie sa odlišuje od matematizácie. Zatiaľ čo matematizácia sa spravidla chápe ako proces prechodu od slovného opisu situácie k jej algebrickému vyjadreniu v podobe rovníc či výrazov (Roan & Czocher, 2021), Kaput (2008) chápe modelovanie v kontexte AM ako prechod medzi viacerými typmi reprezentácií – nielen verbálnou a symbolickou, ale aj grafickou, tabuľkovou či ikonickou.

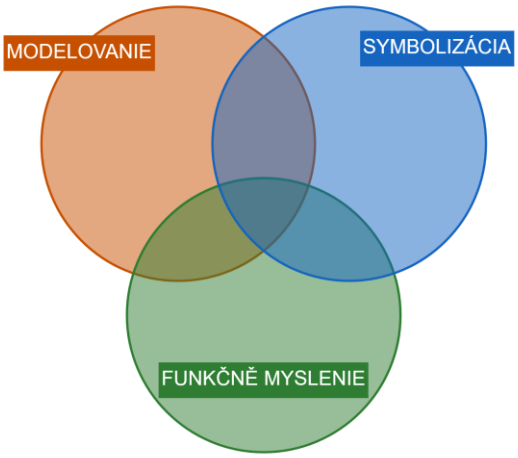
Kaputov model získal výrazný vplyv najmä preto, že sa stal teoretickým východiskom rozsiahleho výskumného projektu *Learning Through an Early Algebra Progressions (LEAP)*[4], v ktorom bol dlhodobo empiricky overovaný a ďalej rozvíjaný. Projekt vedie Maria L. Blanton, ktorá na vývoji modelu pôvodne spolupracovala s J. Kaputom. Jeho jediné obmedzenie je skutočnosť, že nejde o úrovňový model – nedokáže teda detailne zachytiť

[2] Tento aj všetky neskoršie články J. Kaputa boli publikované po jeho smrti

[3] Výskumy naznačujú, že funkčné myslenie predstavuje natoľko komplexný pojem, že sa vo vedeckej literatúre často skúma ako samostatný predmet výskumu.

[4] https://www.terc.edu/projects/project-leap/

postupný rozvoj AM naprieč jednotlivými stupňami vzdelávania. Zameriava sa predovšetkým na obdobie prechodu od primárneho k nižšiemu sekundárnemu vzdelávaniu.



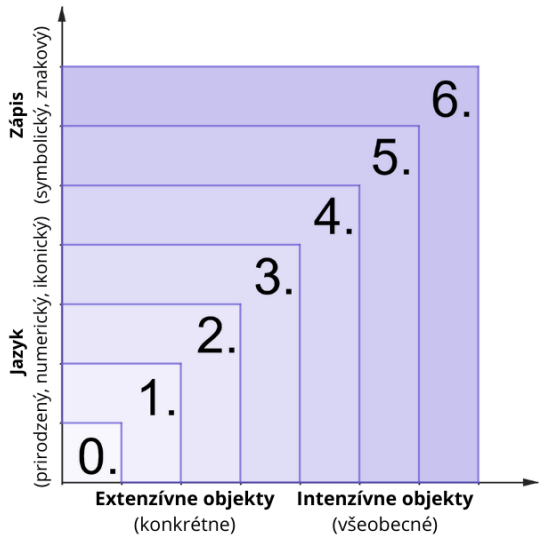
Obrázok 2: trojdimenzionálny model AM podľa Kaputa (2008)

Úrovňový model AM

Godino a kol. (2015) rozšírili rámec Kaputa a Blanton o pohľad na kontinuum rozvoja algebrického myslenia, v ktorom sa žiaci postupne presúvajú od práce s konkrétnymi objektmi až ku všeobecným matematickým štruktúram. Ich úrovňový model zachytáva, ako sa s rastúcou abstrakciou jazyka a symbolických prostriedkov prehlbuje AM.

Zatiaľ čo skoršie práce Aké a kol. (2013) a Godino a kol. (2014) charakterizovali najmä rané štádiá tzv. proto-algebrického myslenia, publikácia Godino et al. (2015) rámec doplnila o úrovne relevantné pre sekundárne vzdelávanie. Výsledkom je nasledujúci sedemúrovňový model:

- Úroveň 0 – aritmetická činnosť: práca s konkrétnymi číselnými objektmi bez použitia premenných, rovnosť chápaná ako výsledok výpočtu.
- Úroveň 1 – prvé proto-algebrické prejavy: objavuje sa práca s premennými a neznámymi (nie nutne na symbolickej úrovni), reflektovanie vlastností operácií a hľadanie vzťahov medzi veličinami.
- Úroveň 2 – zavedenie symbolických premenných: práca s jednoduchými algebrickými výrazmi a rovnicami (napr. $Ax \pm B = C$), jazyk nadobúda symbolický charakter.
- Úroveň 3 – konsolidovaná algebrická činnosť: analytická práca s výrazmi, riešenie rovníc a využívanie ekvivalentných a neekvivalentných úprav nezávisle od kontextu.
- Úroveň 4 – parametre a triedy funkcií: objavuje sa pojem parametra a schopnosť opisovať celé triedy funkcií (napr. $y = ax$)
- Úroveň 5 – integrácia premenných, neznámych a parametrov**:** žiaci analyzujú štruktúru riešení rovníc a podmienky ich existencie.
- Úroveň 6 – algebrické štruktúry: prechod k práci s abstraktnými štruktúrami (napr. vektorové priestory), dôraz na všeobecné vlastnosti a metauvažovanie.



Obrázok 3: úrovňový model AM podľa Godina a kol. (2015)

Je zrejmé, že uvedené opisy jednotlivých úrovní neposkytujú dostatočne podrobný pohľad na samotný spôsob myslenia žiakov, na typické ťažkosti, ktoré sa v jednotlivých štádiách objavujú, ani na činitele, ktoré podporujú prechod z jednej úrovne na druhú.

Godino a kol. (2015) pri tvorbe svojho modelu AM vychádzali z *teórie semiotických registrov* (TSR) (Duval, 1995), ktorá tento rámec podstatným spôsobom doplňuje a vysvetľuje. Jej základnou myšlienkou je, že úroveň matematického poznania, najmä v oblasti algebry, závisí od spôsobov, akými sú matematické objekty reprezentované, a od schopnosti tieto reprezentácie prepájať. Aby bolo možné získať celistvý pohľad na výsledný model AM, v nasledujúcej časti túto teóriu stručne predstavíme.

Registre semiotických reprezentácií

TSR vychádza z predpokladu, že matematické poznanie sa buduje výlučne prostredníctvom reprezentácií. Matematické objekty (čísla, funkcie, rovnice,...) samy osebe nie sú priamo uchopiteľné pre svoju abstraktnú povahu; existujú iba prostredníctvom systémov reprezentácií, ktoré Duval (2017) nazýva *semiotickými*[5] *registrami*. Každý register predstavuje špecifický spôsob, akým možno matematický objekt vyjadriť a s ním pracovať. V matematike možno rozlíšiť niekoľko typických registrov:

- prirodzený jazyk (slovné vyjadrenia),
- symbolický zápis (symbolické rovnice, algebrické výrazy),
- grafický register (grafy, diagramy, geometrické konštrukcie),
- ikonické reprezentácie (obrázky, schémy, modely).

Aby sme mohli reprezentáciu nazývať semiotickým registrom, je nutné, aby daná reprezentácia poskytovala možnosť vykonávať dva základné procesy:

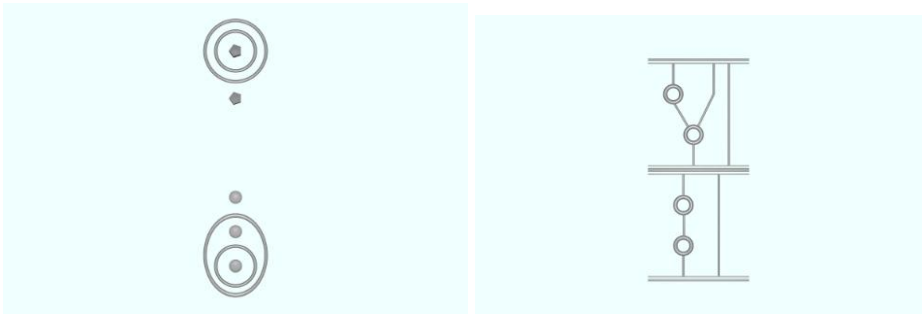
1. Vnútorná transformácia – operácie, ktoré prebiehajú v rámci toho istého registra, napríklad algebrické úpravy rovníc, transformácie grafov alebo diskurz v prirodzenom jazyku.

[5] sémiotické = nesúce význam

2. Konverzia – prechod do iného registra, napríklad prepis slovného zadania do algebrickej rovnice alebo vyjadrenie algebraického vzťahu prostredníctvom grafu. Konverzia môže byť *kongruentná* alebo *nekongruentná*:
    - Kongruentná konverzia znamená, že významy oboch reprezentácií sú priamo zodpovedajúce a ich vzťah je pre žiaka intuitívne zrozumiteľný (napríklad prechod od slovného vyjadrenia „rozdiel Adamovho a Borisovho veku je 3“ k symbolickému zápisu $a - b = 3$).
    - Nekongruentná konverzia si naopak vyžaduje hlbšiu interpretáciu a rekonštrukciu významu, pretože štruktúra a poradie informácií sa pri prevode menia (napríklad prechod od slovného vyjadrenia „Adam je o 3 roky starší než Boris“ k symbolickému zápisu $a = b + 3$). Nekongruentné prechody bývajú pre žiakov najnáročnejšie.

Význam TSR pre rozvoj AM spočíva v tom, že AM sa rozvíja tým, ako žiaci postupne zvládajú stále väčší počet registrov, dokážu v nich vykonávať vnútorné transformácie a prepájať ich prostredníctvom konverzií. Je dôležité podotknúť, že každý register má svoje výhody a nevýhody – ponúka len obmedzený pohľad na objekt, ktorý reprezentuje. Preto mnohé ťažkosti žiakov v algebre pramenia z toho, že zostávajú „uzamknutí“ v jednom registri a nevidia vzťahy k iným. To môže viesť k postupnej degradácii vnútornej transformácie na algoritmické spracovanie, pri ktorom sú jednotlivé prvky zápisu vnímané izolovane a strácajú svoj významový obsah. Takéto formálne manipulovanie so symbolmi bez pochopenia ich významu spôsobuje, že žiaci síce dokážu vykonávať jednotlivé operácie, no nerozumejú, čo tieto operácie reprezentujú. Dôsledkom môže byť vznik miskoncepcií, ktoré negatívne ovplyvňujú ich ďalšie učenie matematiky a zostávajú prítomné naprieč rôznymi stupňami vzdelávania.

Pre zaujímavosť uvedieme dva príklady menej známych ikonických registrov v aritmetike a algebre; kontajnerová a sieťová algebra[6](Becker, 2019). Všetky vnútorné transformácie (aritmetické a algebrické výpočty) sa realizujú virtuálnou manipuláciou v priestore so špecifickými ikonickými objektmi reprezentujúcimi čísla, premenné a neznáme (viď. obr. 4).



Obrázok 4: prvky kontajnerovej (vľavo) a sieťovej (vpravo) algebry (Becker, 2019)

Tvorba úlohy zameranej na AM s využitím TSR

Uvažujme jednoduchú kvadratickú rovnicu $x^2 = 4$. Zadanie typu „riešte rovnicu...“ môže pôsobiť ako úloha zameraná na jednoduchú procedurálnu činnosť s očakávanou vysokou úspešnosťou. Pokúsime sa ju transformovať tak, aby overovala vyššie konceptuálne vedomosti s využitím TSR.

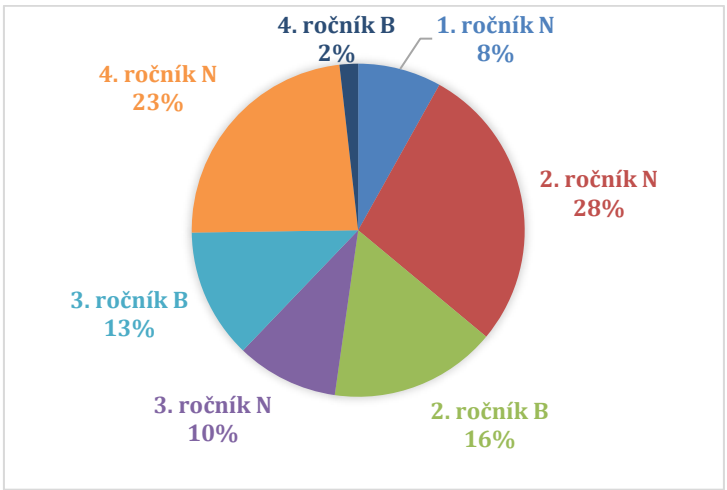
[6] https://iconicmath.com/arithmetic/containers/

Žiaci by mohli rovnicu vyriešiť jednoduchým odmocnením oboch strán. TSR upozorňuje, že ak žiaci uvažujú o rovnici len v kontexte jej symbolického zápisu, tak pracujú v jedinom registri. Hrozí, že takáto úprava sa stane rýdzo algoritmickou a stratí význam. Ak sú títo žiaci po aplikácií odmocniny zvyknutí písať zápis $x_{1,2} = \pm 2$, môže to viesť napríklad k miskoncepcii, že $\sqrt{4} = \pm 2$. Časť žiakov ešte môže pridať medzi-krok: $|x| = 2$, z ktorého až následne vyplynie, že $x_{1,2} = \pm 2$. U žiakov pracujúcich len v symbolickom registri však absentuje význam jednotlivých krokov ($\sqrt{x^2} = |x|$, $|x| = 2$ práve vtedy, keď $x = 2$ alebo $x = -2$). Tie sa dajú zdôvodniť len prechodom do iného registra – napríklad číselná os alebo slovné vyjadrenie. Ďalšia miskoncepcia, ktorá sa tak môže vyvinúť je napríklad: $|2| = \pm 2$. Ak teda žiak rieši rovnicu výlučne v symbolickom registri, bez prechodu do iného, je vysoko pravdepodobné, že by zápisy $\sqrt{4} = \pm 2$, $|2| = \pm 2$ považoval za správne. Dôvod je ten, že sú symbolicky podobné so zápismi, ktoré využíva pri riešení rovnice. Zadanie, ktoré by overovalo vyššie konceptuálne vedomosti teda môže znieť napríklad takto:

Úloha 2. Rovnica $x^2 = 4$ má dve rôzne riešenia $x_1 = 2, x_2 = -2$ pretože

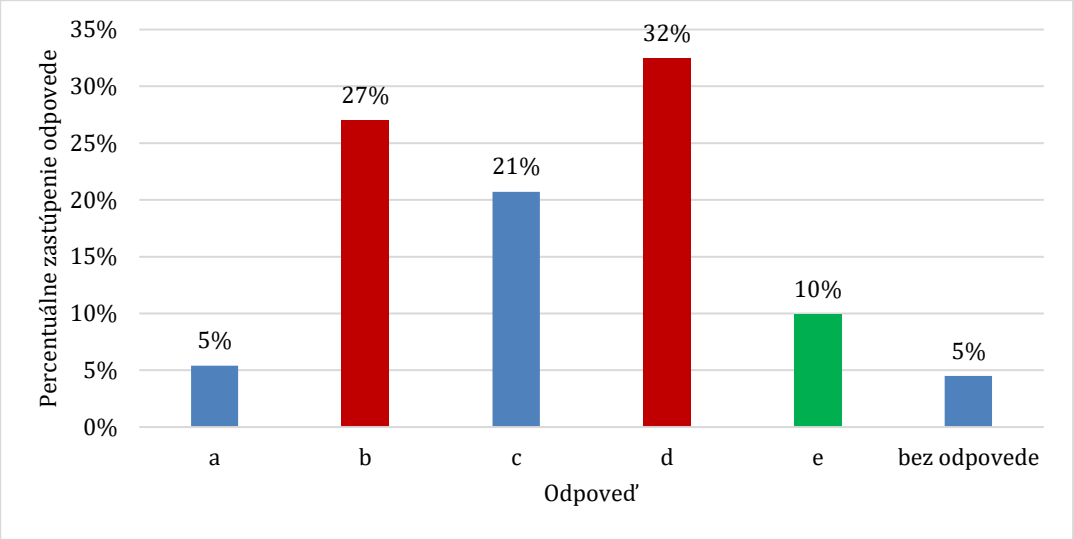
a) ľubovoľná rovnica má vždy dve rôzne riešenia,
b) $\sqrt{4}$ má dva výsledky,
c) druhá odmocnina nie je ekvivalentná úprava rovnice,
d) $|2| = \pm 2$,
e) ani jedna z možností a) – d) nie je správna.

Úlohu 2 sme v uvedenom znení aj otestovali. V rámci druhej etapy pilotného overovania 30-položkového testu AM, sme úlohu 2 zaradili do testu ako položku s poradovým číslom 16. Testovanie sme realizovali na vzorke 111 žiakov gymnázia v bratislavskom kraji. Participanti pozostávali z dvoch skupín podľa druhu štúdia: 4-ročné štúdium so všeobecným zameraním, 5-ročné bilingválne štúdium so zameraním na ruský jazyk.



Graf 1: zloženie testovaných žiakov podľa ročníka a zamerania štúdia (N-nebilingválne štúdium, B-bilingválne štúdium)

Žiaci boli pred začatím testu inštruovaní, že každá otázka má formu výberu jednej správnej odpovede z piatich odpovedí. Čas na vypracovanie testu bol 40 minút.



Graf 2: zastúpenie odpovedí v úlohe 2 (správna odpoveď: e)

Na grafe 2 je zobrazené zastúpenie jednotlivých odpovedí v úlohe 2. Túto úlohu vyriešilo správne iba 10 % všetkých žiakov. Najzastúpenejšie odpovede boli *d* a *b*, teda dva zámerne skonštruované distraktory, ktorých cieľom bolo vyselektovať žiakov s očakávanými najčastejšími miskoncepciami podľa TSR. Všimnime si, že úlohu 2 by sme mohli v rámci BT zaradiť podľa jej kognitívnej náročnosti do úrovne *hodnotenie* a podľa typu overovaného poznatku do dimenzie *koncpetuálne vedomosti* – teda identicky ako úlohu 1. Obe tiež patria do rovnakého tematického celku (kvadratické závislosti, rovnice a nerovnice). Úspešnosť žiakov v týchto úlohách sa však významne líši, čo naznačuje, že BT nie je dostatočne citlivá na rozlíšenie tejto dvojice úloh. Samozrejme, takéto tvrdenie je limitované rozdielnosťou vzorky z hľadiska jej počtu a vekového zastúpenia.

Záver

V rámci obsahových oblastí, ktoré integrujú školskú algebru, riešime so žiakmi rovnice rôznych druhov, skúmame vlastnosti funkcií a modelujeme reálne situácie v presvedčení, že tým napĺňame vzdelávacie ciele deklarované štátnym kurikulom. Napriek tomu sa dlhodobo ukazuje, že žiaci zlyhávajú aj pri úlohách, ktoré sa na prvý pohľad môžu javiť ako elementárne, no v skutočnosti overujú vysoké konceptuálne porozumenie. Na túto skutočnosť poukazujú výskumy naprieč celým svetom už niekoľko desaťročí (Usiskin, 1995; Lee, 1997). V príspevku sme ukázali, že výnimkou nie je ani slovenské prostredie. Tento nesúlad nemožno vždy zachytiť prostredníctvom tradičných taxonomických modelov, ako je BT. Jedným z dôvodov môže byť skutočnosť, že kvalita naplnenia vzdelávacích cieľov nezávisí len od obsahu učiva a výkonových štandardov, ale najmä od spôsobu, akým sú tieto ciele realizované v procese výučby. Výskumy predstavené v tomto príspevku ukazujú, že kľúčovým predpokladom pre rozvoj AM je schopnosť žiakov pracovať s rôznorodými reprezentáciami a flexibilne medzi nimi prepájať. Túto schopnosť je potrebné systematicky rozvíjať prostredníctvom primeraných aktivít naprieč všetkými stupňami vzdelávania.

Grantová podpora:

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní.*

LITERATÚRA

[1] Aké, L. Godino, J. D., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2013). *Proto-algebraic levels of mathematical thinking*. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.*). Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 1-8. Kiel, Germany: PME.

[2] Anderson, L.W. (Ed.), Krathwohl, D.R. (Ed.), Airasian, P.W., Cruikshank, K.A., Mayer, R.E., Pintrich, P.R., Raths, J., & Wittrock, M.C. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives* (Com plete edition). New York: Longman.

[3] Becker, J. R. (2019). *Iconic arithmetic volume I: The design of mathematics for human understanding*. Iconic Math. ISBN 978-1-7324851-3-6

[4] Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[5] Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

[6] Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer.

[7] Ebrahimi, M. (2022). *Importance and Implications of Theory of Bloom's Taxonomy in Different Fields of Education*, International Journal of Research Publication and Reviews,

[8] Ficová, L., Kurajová Stopková, J., Pigová, M., & Repovský, M. (2023). *Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky 2023*. Národný inštitút vzdelávania a mládeže.

[9] Ficová, L., Kurajová Stopková, J., Mikuška, J., Pigová, M., & Repovský, M. (2024). *Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky 2024*. Národný inštitút vzdelávania a mládeže.

[10] Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2014). Levels of algebraic reasoning in primary and secondary education. In *Proceedings of CERME 9, TWG 4* (pp. 1–10). Charles University.

[11] Godino, J. D.; Neto, T.; Wilhelmi, M. R.; Aké, L.; Etchegaray, S.; Lasa, A. (2015) *Levels of Algebraic Reasoning in Primary and Secondary Education*, Granada / Aveiro / Pamplona / Colima / Río Cuarto, Universidad de Granada / CIDTFF Universidad de Aveiro / Universidad Pública de Navarra.

[12] Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[13] Hurrell, D. (2021). *Conceptual Knowledge or Procedural Knowledge or Conceptual Knowledge and Procedural Knowledge: Why the Conjunction Is Important to Teachers*, Australian Primary Mathematics Classroom, Adelaide, Australian Association of Mathematics Teachers.

[14] Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

[15] Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139–151.

[16] Kriegler, S. (2007). Just what is algebraic thinking? Introduction to Algebra :TeacherHandbook, 1-11.

[17] Lane, S. (2004). Validity of high-stakes assessment: *Are students engaged in complex thinking?* Educational Measurement: Issues and Practice, 23(3), 6-14.

[18] Lee, L. (1997). Algebraic understanding: *The search for a model in themathematics education community*. Unpublished doctoral dissertation.Université du Québec à Montréal

[19] Nichols, P., & Sugrue, B. (1999). *The lack of fidelity between cognitively complex constructs and conventional test development practice.* Educational Measurement Issues and Practice, 18(2), 18-29.

[20] Orhani, S. (2024). *Preparation of Tests from the Subject of Mathematics According to Bloom's Taxonomy*, International Journal of Research Publication and Reviews.

[21] Thompson, T. (2011). *An analysis of higher-order thinking on Algebra I end-of-course tests*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Centre for Innovation in Mathematics Teaching, University of Plymouth.

[22] Usiskin, Z. (1995). *Thoughts preceding the Algebra Colloquium*. In C. Lacampagne, W. Blair, and J. Kaput (eds.), The Algebra Initiative Colloquium (vol. 2), 87–92. Washington, DC: U.S. Department of Education.

[23] Webb, N. L. (1999). *Alignment of science and mathematics standards and assessments in four states* (NISE Research Monograph No. 18). Madison: University of Wisconsin-Madison, National Institute for Science Education.

[24] Webb, N. L. (2002, April). *An analysis of the alignment between mathematics standards and assessments for three states.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

[25] Webb, N.L. (2007). Issues related to judging the alignment of curriculum standards and assessments. *Applied Measurement in Education*, 20(1), 7-25.

Mgr. Dušan Daniel
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave, Mlynská dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: dusan.daniel@fmph.uniba.sk

LETO S WILMOU 2025

DUŠAN DANIEL, MONIKA DILLINGEROVÁ, JANA HAVLÍČKOVÁ, EMÍLIA MIŤKOVÁ

ABSTRAKT. *Matematické úlohy s výberom odpovede pre žiakov od 5. ročníka ZŠ. Riešenie úlohy je prepojené s rysovaním v štvorčekovej sieti.*

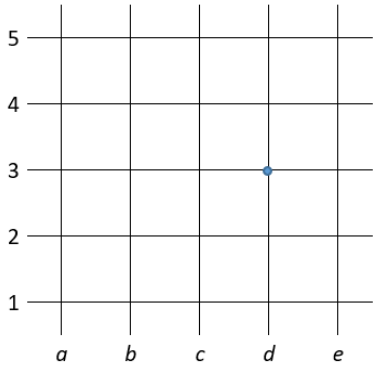
Úvod

Oddelenie didaktiky matematiky FMFI UK pravidelne trikrát do roka – pred Vianocami, pred Veľkou nocou a pred letnými prázdninami – pripravuje zaujímavé matematické aktivity pre učiteľov a ich žiakov. Ide o obdobia, kedy je vhodné na vyučovaní niekedy zaradiť netradičnú alebo hravejšiu formu práce. Aktivity sú zverejnené na stránke WILMA.sk, konkrétne https://wilma.sk/archiv-komiksov#komiks.

Pred letnými prázdninami 2025 sme pripravili sadu úloh s výberom možností, ktoré boli spojené s rysovaním v štvorcovej sieti. Úlohy sú určené pre žiakov druhého stupňa základnej školy, prípadne pre žiakov stredných škôl, teda nevyžadujú znalosti presahujúce učivo približne piateho ročníka. Na pracovnej dielni sme účastníkom rozdali zadania úloh a pripravenú štvorčekovú sieť. Účastníci pracovali v dvojiciach, respektíve v trojiciach a my sme priebežne kontrolovali ich výsledky, debatovali o vhodnosti zadaní a ich zaradení na vyučovanie.

Zadania úloh

Milý dobrodruh, vitaj na našom letnom cestovaní. Vezmi si papier na výpočty a štvorčekový papier. Štvorčekový papier začni označovať z ľavého dolného rohu: zvislé čiary zľava doprava malými písmenami abecedy (a, b, c, ..., y) a vodorovné čiary zdola nahor číslami (1, 2, 3, ..., 21) ako v ukážke nižšie (obrázok 1). Do papiera si rovno vyznač jemne ceruzkou pomocné body *m*10, *m*17 a priamku *m*, ktorá nimi prechádza.



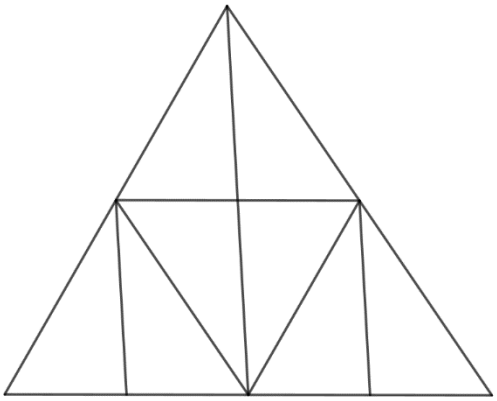
Na ukážku je v sieti vľavo vyznačený bod *d*3

Obrázok 1

Dnes budeš riešiť 8 úloh. Po vyriešení každej z nich vyberieš správnu odpoveď a narysuješ, dokreslíš niečo do štvorčekového papiera. Veľa šťastia!

Úloha 1

Koľko trojuholníkov je na obrázku?



8	Narysuj body $A = f1$, $B = s4$. Potom narysuj obrazy $A´$, $B´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m10$.
13	Narysuj body $A = g8$, $B = s4$. Potom narysuj obrazy $A´$, $B´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m17$
17	Narysuj body $A = g8$, $B = s4$. Potom narysuj obrazy $A´$, $B´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m10$.

Úloha 2

Petrík dostal na MDD kalkulačku. Chcel vyskúšať všetky tlačidlá. Najprv postupne vynásobil všetky čísla na tlačidlách okrem 0. Od výsledku odčítal každé číslo v strednom rade. Potom výsledok vydelil súčtom čísel na uhlopriečke. Toto číslo vydelil jeho ciferným súčtom. Aké číslo mu svieti na kalkulačke?

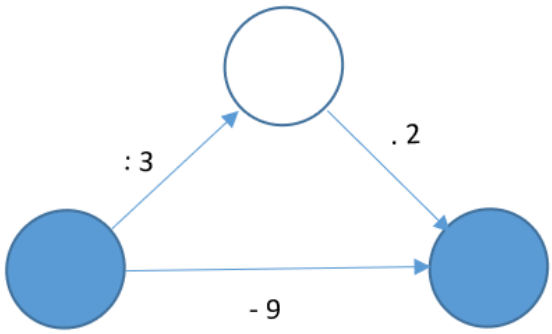
Poznámka: Napríklad, ciferný súčet čísla 1507 je 1 + 5 + 0 + 7 = 13.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

1423	Narysuj body $C = j16$, $D = j20$. Potom narysuj obrazy $C´$, $D´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m17$.
1287	Narysuj body $C = j12$, $D = j20$. Potom narysuj obrazy $C´$, $D´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m17$.
945	Narysuj body $C = j16$, $D =$ m13. Potom narysuj obrazy $C´$, $D´$ týchto bodov v stredovej súmernosti so stredom $m17$.

Úloha 3

Myslím si číslo. Keď ho vydelím tromi a vynásobím dvomi, dostanem číslo o 9 menšie od pôvodného. Napíš súčet mysleného a získaného čísla.



9	Narysuj body $E =$ r7, $F = w1$. Narysuj úsečku EF. Narysuj obraz $E´F´$ úsečky EF v osovej súmernosti s osou m.
45	Narysuj body $E = y6$, $F = w1$. Narysuj úsečku EF. Narysuj obraz $E´F´$ úsečky EF v osovej súmernosti s osou m.
90	Narysuj body $E = y6$, $F =$ u8. Narysuj úsečku EF. Narysuj obraz $E´F´$ úsečky EF v osovej súmernosti s osou m.

Úloha 4

Na savane žijú tri generácie sloních samcov – Bimbo, Tembo a Sumbo. Bimbo má trikrát viac rokov ako Sumbo. Tembo je o 25 rokov mladší ako Bimbo. Pred 5 rokmi mal Tembo presne dvakrát toľko rokov ako Sumbo vtedy. Spolu vážia 17 ton. Koľko rokov má ktorý slon?

Bimbo 60, Tembo 35 a Sumbo 20	Na polpriamke *E´E* narysuj úsečku *E´G*, ktorá má dĺžku 7 štvorčekov.
Bimbo 72, Tembo 47 a Sumbo 24	Na polpriamke B´C narysuj úsečku B´*G*, ktorá má dĺžku 7 štvorčekov.
Bimbo 51, Tembo 26 a Sumbo 17	Na polpriamke A´B narysuj úsečku A´*G*, ktorá má dĺžku 7 štvorčekov.

Úloha 5

Ivan si každý deň oblieka ponožky rôznych farieb. Jednu podľa kalendára správnu a jednu nesprávnu. Správne sú: v pondelok modrá, v utorok zelená, v stredu biela, vo štvrtok červená, v piatok oranžová, v sobotu sivá a v nedeľu hnedá. Pritom nikdy nekombinuje zelenú s modrou. Za posledných 7 dní boli nesprávne farby v uvedenom poradí: červená, modrá, modrá, modrá, zelená, hnedá a dnes zase červená. Ktorý je dnes deň v týždni?

Nedeľa	Spoj body *C*, B, *q*15, *C´*, *D*, *k*17, *C*.
Pondelok	Spoj body C, *D´*, *q*15, *C´*, A, *k*17, *C*.
Utorok	Spoj body *C*, *D´*, *q*15, *C´*, *D*, *k*17, *C*.

Úloha 6

V rade na zmrzlinu čakajú turisti. Jeden z nich sa začne ponosovať: „To čakanie je strašné. Predo mnou je trikrát toľko ľudí ako za mnou.“ Človek, ktorý stojí v rade hneď za ním, mu dohovára: „Nešomrite! Predo mnou stojí päťkrát toľko ľudí ako za mnou. A som trpezlivo ticho.“

Koľko ľudí čaká v rade?	
7	Spoj body *G*, k11, *v3*, E. Spoj body *F*, *F´*.
13	Spoj body *G*, *i3*, *v3*, E. Spoj body *F*, *F´*.
25	Spoj body *G*, *i3*, p10, E. Spoj body *F*, *F´*.

Úloha 7

Štyria kamaráti Nina, Luky, Ria a Boris sa rozhodli si zarobiť predajom limonády počas horúceho letného dňa. Každý z nich si na ulici postavil vlastný limonádový stánok. Keďže nechodili žiadni zákazníci, začali postupne obchodovať medzi sebou:

- Nina predala 2 fľaše Lukymu.
- Luky predal 1 fľašu Rii.
- Ria predala Borisovi polovicu fliaš, ktoré mala pri sebe.

- Boris predal po 1 fľaši každému z ostatných.

Keď si večer spočítali zásoby, s prekvapením zistili, že každý z nich má pri sebe 4 fľaše. Koľko fliaš mal pôvodne každý z nich?

Nina 5, Luky 3, Ria 4, Boris 3 — Spoj body *A*, *B*, q2, *A´*, *B´*, *h*10, *A*.

Nina 5, Luky 4, Ria 3, Boris 4 — Spoj body *A*, *B*, t6, *A´*, *B´*, *p1*, *A*.

Nina 5, Luky 2, Ria 5, Boris 4 — Spoj body *A*, *B*, *t*6, *A´*, *B´*, *h*10, *A*.

Úloha 8

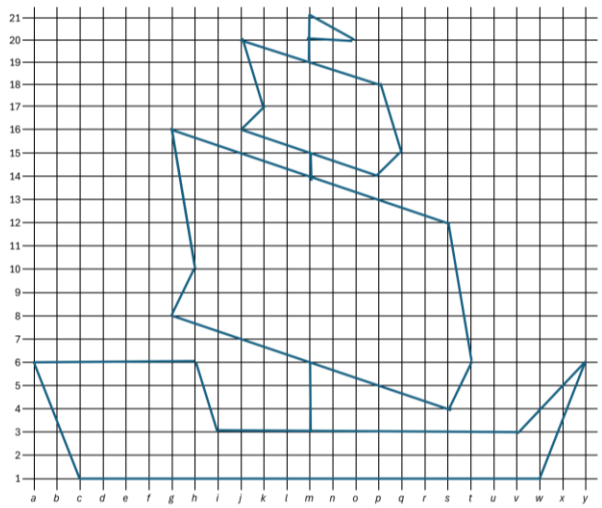
Janka a Danka nazbierali jahody. Keby Janka nazbierala o polovicu svojich jahôd viac, mala by rovnako ako Danka. Keby Danka nazbierala o 48 jahôd menej, mala by polovicu Jankinho počtu. O koľko viac nazbierala Danka?

12 — Spoj bod *m*3 so stredom úsečky *AB*. Spoj stred úsečky *A´B´* so stredom úsečky *CD´*. Spoj stred úsečky *C´D*, *m*21, *o11*, *m*20.

24 — Spoj bod *m*3 so stredom úsečky *AB*. Spoj stred úsečky *A´B´* so stredom úsečky *CD´*. Spoj stred úsečky *C´D*, *m*21, *o*20, *m*20.

48 — Spoj bod *m*3 so stredom úsečky *AB*. Spoj stred úsečky *A´B´* so stredom úsečky *CD´*. Spoj stred úsečky *C´D*, *m*21, *k8*, *m*20.

Dokresli si chýbajúce časti a vyfarbi obrázok podľa vlastnej fantázie.



Obrázok 2: Riešenie v štvorčekovej sieti

Po správnom vyriešení všetkých úloh a zakreslení podľa inštrukcií bolo možné získať nasledujúci obrázok 2

Záver

Na pracovnej dielni mali učitelia možnosť preriešiť si uvedené zadania. Diskutovali sme o vhodnosti úloh, použiteľnosti a časovej náročnosti aktivity. Keďže náš predpoklad bol, že daná aktivita je pre žiakov na približne 2 vyučovacie hodiny, pripravené sú aj kratšie verzie – verzia bez rysovania, kde žiaci dostanú iba sadu úloh, každá s výberom z troch možností (ale bez návodu na rysovanie) a verzia bez úloh na precvičenie orientácie v štvorčekovej sieti pozostávajúca z ôsmych krokov rysovania.

Grantová podpora:

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*

LITERATÚRA

[1] Webové stránky Inšpirácií a odbornej Literatúry pre učiteľov MAtematiky. (n.d.). https://wilma.sk/

Mgr. Dušan Daniel,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD.,
Mgr. Jana Havlíčková, PhD.,
Mgr. Emília Miťková, PhD.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-maily: dusan.daniel@fmph.uniba.sk
monika.dillingerova@fmph.uniba.sk
jana.havlickova@fmph.uniba.sk
emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

ROZŠÍRENÁ REALITA V RUKÁCH UČITEĽA

JANA HNATOVÁ

ABSTRAKT. *Tento príspevok mapuje priebeh pracovnej dielne venovanej problematike rozšírenej reality a jej inkorporácie do matematicky orientovanej edukačnej aktivity, Reflektuje spätnú väzbu účastníkov dielne, čím im môže napomôcť pri vlastnom plánovaní, realizovaní a evalvovaní edukačnej aktivity. Závery tohto príspevku môžu slúžiť ako podklad ďalšieho profesijného vzdelávania učiteľov v oblasti digitálnych inovácií a podporujú zistenie, v ktorom efektívne využívanie rozšírenej reality vo vzdelávaní je podmienené prakticky orientovanou pedagogickou podporou.*

Úvod

Dynamický rozvoj digitálnych technológií zasahuje a transformuje aj oblasť vzdelávania. Významné inovácie k možnostiam práce s digitálnym obsahom prináša skupina imerzívnych technológií, ktoré menia spôsob, akým ľudia s daným obsahom interagujú a samotnú interakciu posúvajú z plochých obrazoviek do trojrozmerného, zmyslovo angažovaného priestoru. Typovo k týmto technológiám možno zaradiť virtuálnu realitu (ang. *virtual reality*, skr. VR), rozšírenú realitu (ang. *augmented reality*, skr. AR) a zmiešanú realitu (ang. *mixed reality*, skr. MR) [1]. Ich primárnym cieľom je vytvoriť vo vedomí používateľa pocit čiastočného alebo úplného ponorenia do digitálneho sveta, resp. do predom vytvoreného simulovaného prostredia.

Rozšírená realita (AR) obohacuje fyzický svet o počítačom generované údaje. Tieto sú dostupné v reálnom čase, pričom technológia umožňuje používateľovi s nimi aj v reálnom čase interagovať [2]. Z pohľadu matematického vzdelávania ponúka AR zaujímavé možnosti pre vizualizáciu vybraných matematických konceptov a procesov a podľa viacerých autorov sa ukazuje ako obzvlášť silný didaktický nástroj rozširujúci tradičné vyučovacie metódy o zážitkové formy učenia sa, a to naprieč rôznymi predmetmi a oblasťami školskej edukácie [3].

Implementácia AR do pedagogickej praxe učiteľa si vyžaduje nielen osvojenie si technických zručností, ale predovšetkým pochopenie didaktického potenciálu AR. Reakciou na túto potrebu bola doterajšia realizácia viacerých vzdelávacích podujatí, ku ktorým patrilo i lektorské zastrešenie odbornej pracovnej dielne s názvom *Rozšírená realita v rukách učiteľa*, realizovanej v rámci 10. ročníka konferencie *Dva dni s didaktikou matematiky 2025*. Jej primárnym cieľom bolo vybaviť účastníkov pracovnej dielne praktickými skúsenosťami a metodickými poznatkami týkajúcimi sa využívania AR obsahu v matematickej edukácii, a to s prepojením na autorsky navrhnutú edukačnú hru s matematickým zameraním.

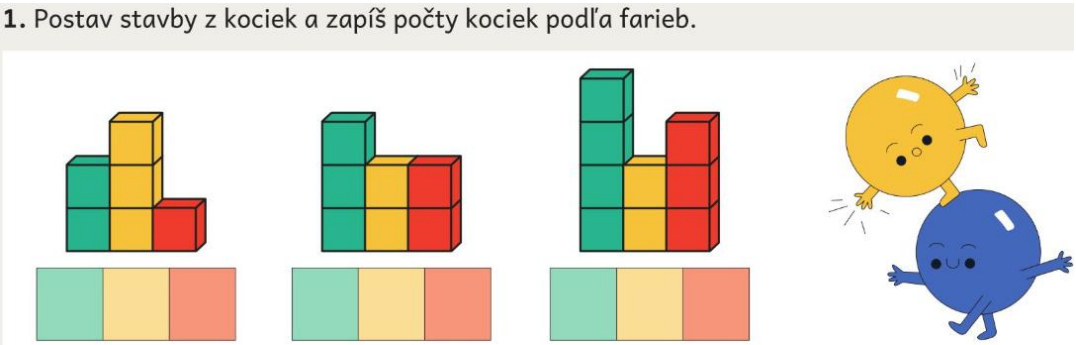
Obsahový rámec edukačnej hry

Edukačnú hru Farebné veže možno zaradiť ku konštruktívnym matematickým hrám s danými, resp. predom dohodnutými pravidlami. Je tematicky zameraná na propedeutické budovanie matematických pojmov súvisiacich s priemetmi stavby z kociek do kolmých priemetní s využitím technológie AR, pričom sekundárny dosah má aj na základy riešenia jednoduchých kombinatorických situácií.

Kolmé priemety stavby popisované pojmami nárys, pôdorys a bokorys telesa, resp. stavby z telies, sú v novom štátnom vzdelávacom programe zaradené do obsahového

štandardu z matematiky v 3. cykle ZŠ v rámci komponentu Geometria v tematickej oblasti Priestorové geometrické útvary - vlastnosti a vzťahy [4]. Podľa uvedeného obsahového štandardu sa očakáva, že žiaci zvládnu zaznamenávanie a tvorbu modelov jednoduchých telies a stavieb z telies v rámci voľného rovnobežného premietania, taktiež určovanie a tvorbu pohľadov na jednoduché a zložené telesá.

V etape získavania prvotných matematických skúseností je učiteľ, pri modelovaní uvedených matematických pojmov a vzťahov, predovšetkým v nižších vzdelávacích cykloch, odkázaný na ich opakovanú konkretizáciu a vizualizáciu. V tomto dokážu byť učiteľovi nápomocné učebnice, resp. hybridné pracovné zošity z matematiky od rôznych autorov už v rámci 1. a 2. cyklu ZŠ (obr. 1). Možnosti printových učebných zdrojov sú však z pohľadu vizualizácie obmedzené statickým zobrazovaním trojrozmerných geometrických útvarov v dvojrozmernom priestore. Navyše, kým učiteľ by mal aktívne disponovať vedomosťami a zručnosťami týkajúcimi sa zobrazovania trojrozmerných útvarov v rovine, pre dieťa vo veku 6 – 9 rokov, sú takéto vedomosti kognitívne predimenzované. Rovnako z ontogenetického hľadiska presahujú potrebné zručnosti bežnú úroveň vývinových možností dieťaťa v danom veku..



Obrázok 1: Ukážka úlohy z pracovného zošita Matematika 1B viazanej na propedeutiku priemetov telies (Berová, Bero, 2024)

Z pohľadu učiteľa primárneho vzdelávania nie je možné sprístupňovanie uvedených pojmov založiť na definíciách. Musí vychádzať z ich intuitívneho chápania podporeného enaktívnymi (t. j. činnostnými) reprezentáciami, pri ktorých sa poznatky získavajú manipuláciou s objektami [5]. Tieto sú prostredníctvom technológie AR v našej edukačnej aktivite posunuté z hmotnej fyzickej podoby do podoby virtuálnej.

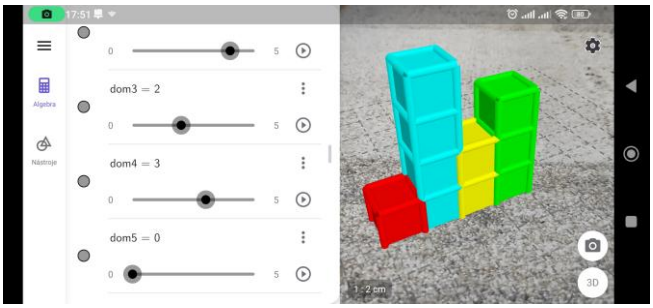
Edukačná hra s využitím rozšírenej reality

Nutným predpokladom realizácie edukačnej aktivity je vytvorenie AR appletu, ktorý bude pre deti i pedagóga voľne online dostupný na inteligentom mobilnom zariadení (t. j. na smartfóne alebo tablete) podporujúcom prácu s AR technológiou[7].

Nami vytvorený applet AR Stavba 1x5 v.1 spracovaný v prostredí GeoGebra 3D Calculator (dostupný na: https://www.geogebra.org/m/rfnkffgq) dovoľuje v AR zobraziť stavbu z kociek kreovanú na pôdoryse danom piatimi podstavnými štvorcami. Kocky

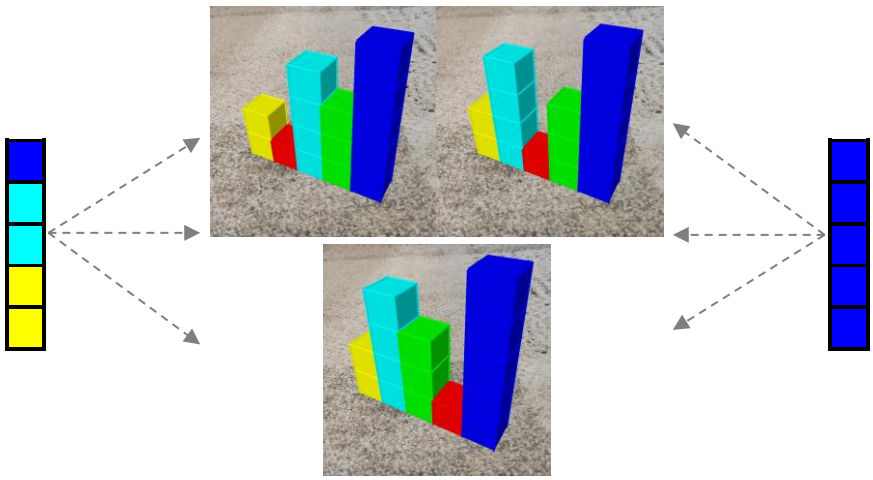
[7] Prehľad značiek a typov inteligentných mobilných zariadení s podporou AR je dostupný na: https://developers.google.com/ar/devices. V prípade, že mobilné zariadenia prácu s AR technológiou nepodporuje, applet dovolí zobrazenie navolenej situácie v 3D.

umiestnené na konkrétnej pôdorysnej pozícii majú v jednom stĺpci rovnakú farbu. Tá sa dynamicky mení v päťfarebnej škále podľa počtu kociek v danom stĺpci. Vo výslednom zobrazení tak applet dovoľuje vytvárať 3125 možných stavieb na precvičenie pojmov nárys, pôdorys a bokorys stavby, ktoré sú použiteľné nielen priamo na vyučovacej hodine, ale aj v rámci domácej prípravy alebo počas prípravy na vyučovanie v školskom klube detí. Vlastná tvorba stavieb je technicky podporená dostupnými, intuitívne ovládateľnými posuvníkmi, ktoré dovoľujú nastaviť počet kociek v jednotlivých stĺpcoch technikou „chytím – ťahám – pustím“. Applet navyše umožňuje vizuálne zaznamenať výslednú stavbu alebo jednotlivé kroky jej tvorby v AR pomocou integrovanej funkcie fotoaparátu (obr. 2).



Obrázok 2: Vizualizácia interaktívnej stavby kociek v rozšírenej realite

Cieľom aktivity je hravou formou spolupráce vo dvojici, postaviť model stavby v 3D, resp. v AR na základe jej postupne zverejňovaných priemetov. Okrem konkretizácie priemetov a tvorby virtuálnych modelov stavieb je možné s účastníkmi hry odkomunikovať štandardom požadované objavovanie nejednoznačnosti pohľadov na stavbu z kociek a modelovať viacero, resp. za daných podmienok aj všetky existujúce stavby s navzájom identickými bokorysmi (obr. 3).



Obrázok 3: Vizualizácia nájdených stavieb kociek v AR pre dané bokorysy stavby

V rámci pracovnej dielne bol účastníkom predstavený variant edukačnej hry s pripravenou printovou i digitálnou podporou obsahujúcou návod, pravidlá, postup a bodovanie hry, návrh hracích kariet jednotlivých kôl hry a herný videonávod pre jedno konkrétne hracie kolo. Pomocou otázok, na ktoré mohol účastník dielne odpovedať v elektronicky sprístupnenom dotazníku anonymne počas celého jej trvania, následne hodnotil pripravenosť hry a jej hrateľnosť. Odpovede, vzhľadom k nižšiemu počtu účastníkov, neboli vhodné na štatistické spracovanie. Napriek tomu možno konštatovať, že aktivita účastníkov zaujala a ocenili ju predovšetkým z pohľadu vhodnosti prepojenia vzdelávacieho obsahu školskej matematiky s digitálnymi technológiami.

Záver

Realizovaná pracovná dielňa ukázala, že využitie AR v kombinácii s hernými prvkami predstavuje perspektívny prístup podpory zážitkového učenia aj v oblasti školskej matematickej edukácie. Jej účastníkom umožnila priamo zažiť proces prepojenia tradičného vzdelávacieho obsahu s inovatívnymi digitálnymi nástrojmi. Čiastkové zistenia z dotazníkového šetrenia vytvárajú východisko pre ďalší výskum, zameraný na overenie efektívnosti podobných AR aktivít vo väčších vzorkách a v rôznych kontextoch matematického vzdelávania.

Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* riešenom na PF PU v Prešove.

LITERATÚRA

[1] TANG, Y. M., K. M. AU, H. C. W. LAU, G. T. S. HO a C. H. WU. Evaluating the effectiveness of learning design with mixed reality (MR) in higher education. *Virtual Reality* [online]. 2020, 24(4), 797–807. ISSN 1434-9957. DOI:10.1007/s10055-020-00427-9

[2] CHEMERYS, Hanna, Anna VYNOGRADOVA, Hanna BRIANTSEVA a Sergii SHAROV. Strategy for Implementing Immersive Technologies in the Professional Training Process of Future Designers. *Journal of Physics: Conference Series* [online]. 2021, 1933(1), 012046. ISSN 1742-6596. DOI:10.1088/1742-6596/1933/1/012046

[3] ISLIM, Omer Faruk, Şenol NAMLI, Nese SEVIM, Bilal OZCAKIR a Zsolt LAVICZA. Augmented Reality in Mathematics Education: A Systematic Review. *Participatory Educational Research* [online]. 2024, 11, 115–139. DOI:10.17275/per.24.52.11.4

[4] NIVAM. Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie. *Vzdelávanie 21. storočia* [online]. 2023. Dostupné z: https://vzdelavanie21.sk/digitalny-statny-vzdelavaci-program/

[5] BRUNER, Jerome S. a Helen HASTE, ed. *Making Sense (Routledge Revivals): The Child's Construction of the World* [online]. London: Routledge, 2010. ISBN 978-0-203-83058-1. DOI:10.4324/9780203830581

RNDr. Jana Hnatová, PhD.
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta,
Katedra matematickej edukácie
Ul. 17. novembra 15
SK – 08001 Prešov
e-mail: jana.hnatova@unipo.sk

ONLINE VÝUKA MATEMATIKY OČIMA STŘEDOŠKOLSKÝCH ŽÁKŮ

DENISA JAROŠOVÁ

Abstrakt. *Pandemie COVID-19 zásadně proměnila způsob výuky na všech stupních vzdělávacího systému. Tato studie se zaměřuje na zkušenosti středoškolských žáků v České republice. Cílem bylo zjistit, jak žáci hodnotili podmínky pro studium, svou přípravu, efektivitu učení, používané formy hodnocení a preference mezi prezenční, kombinovanou a online výukou.*

Úvod

Roky 2020-2021 představovaly pro vzdělávací systém zásadní zlom. Během pandemie COVID-19 se školy ocitly v situaci, kdy bylo nutné téměř ze dne na den přejít z prezenční formy výuky na plně distanční. Tato změna zasáhla i výuku matematiky, která je tradičně spojována s přímou interakcí, okamžitou zpětnou vazbou a aktivní účastí žáků při řešení úloh.

Cílem tohoto textu je reflektovat zkušenosti středoškolských žáků k online výuce matematiky během pandemie COVID-19. Zjistit, jaké měli podmínky pro studium, jak se na hodiny připravovali, zda pociťovali rozdíly ve svých znalostech oproti prezenční výuce, jak probíhalo hodnocení jejich práce a jaký typ výuky by preferovali.

Metodologie výzkumu

Výzkum byl realizován v roce 2024, tedy přibližně pět let po začátku pandemie COVID-19. Časový odstup umožňuje reflexi s větším odstupem i porovnání zkušeností žáků z období online výuky s výukou prezenční po návratu do škol.

Sběr dat probíhal v období od února do dubna 2024 na 8 gymnáziích a 4 středních odborných školách (zejména průmyslových) v České republice. Respondenty byli žáci čtvrtých ročníků, kteří během pandemie absolvovali online výuku a v době šetření se připravovali k maturitní zkoušce.

Celkem bylo analyzováno 664 dotazníků, z toho 540 žáků gymnázií (dále jen G) (318 dívek a 222 chlapců) a 124 žáků středních odborných škol (SOŠ) (40 dívek a 84 chlapců).

Cílem bylo zjistit, jak žáci hodnotili podmínky studia, přípravu, efektivitu učení, formy hodnocení a preference typu výuky.

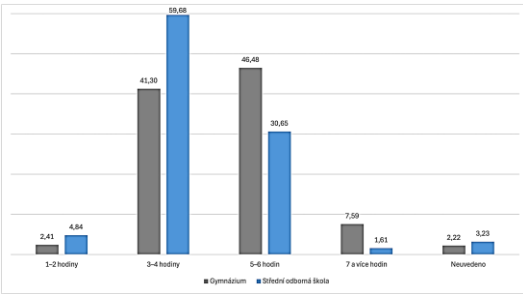
Výsledky výzkumu

Získané údaje umožnily nahlédnout do zkušeností žáků s online výukou matematiky a odhalit rozdíly mezi gymnázií a středními odbornými školami. Hlavní zjištění jsou uvedena v následující části.

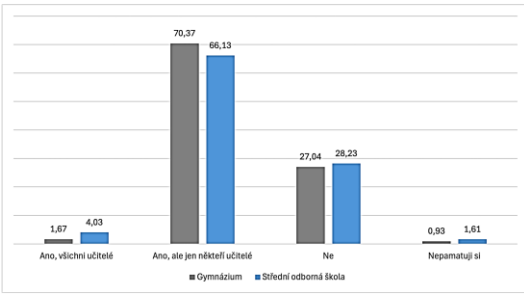
Z výsledků šetření vyplývá, že průměrný počet vyučovacích hodin denně se během online výuky lišil mezi G a SOŠ (viz obrázek 1). Nejčastější odpovědí u žáků SOŠ byly 3–4 hodiny denně, což uvedlo až 60 %. Tato varianta byla poměrně častá i u žáků G (41 %), avšak u nich převažovala odpověď 5–6 hodin denně (46 %). Žáci gymnázií tak měli častěji vyšší počet hodin denně, což odpovídá jejich tradičně náročnějšími

učebnímu plánu. Naopak u SOŠ se objevovala kratší nebo méně intenzivní online výuka, pravděpodobně z důvodu odlišné organizace výuky či zaměření škol.

Z odpovědí žáků lze říci, že dvě třetiny žáků obou typů škol měly zkušenost s tím, že kameru vyžadovali pouze někteří učitelé, zatímco přibližně třetina žáků se s tímto požadavkem vůbec nesetkala vůbec (viz obrázek 2). Používání webkamer tak nebylo jednotné ani systematické, tedy záleželo spíše na individuálním přístupu učitelů než na typu školy či stanovených pravidel.



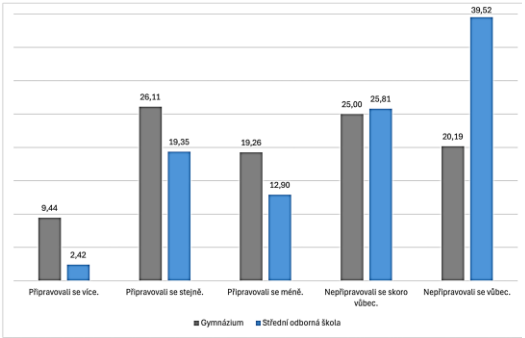
Obrázek 1: Počet vyučovacích hodin denně při online výuce



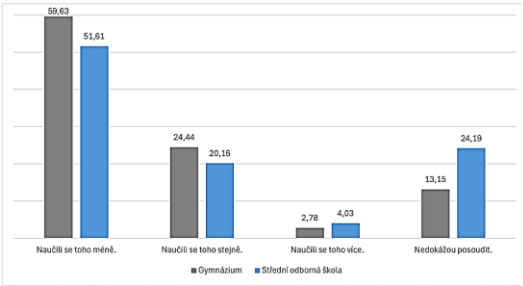
Obrázek 2: Vyžadování zapnuté kamery žáků učiteli během online výuky

Během online výuky se na výuku matematiky pravidelně nepřipravovalo přibližně 40 % žáků SOŠ, což ukazuje nižší míru motivace a menší tlak na samostatnou práci. Naopak u G převažovali žáci, kteří se připravovali stejně jako při prezenční výuce (26 %). Poměrně velká část žáků se však na online hodiny matematiky nepřipravovala jen zřídla (25 % žáků G a 26 % žáků SOŠ), zatímco zcela bez přípravy zůstalo 20 % gymnazistů a skoro 40 % žáků SOŠ. Celkově tedy lze říci, že žáci G přistupovali k domácí přípravě zodpovědněji než žáci SOŠ a že distanční výuka měla na míru přípravy negativní dopad, výraznější právě u SOŠ, jak je patrné z obrázku 3.

Následně bylo zkoumáno, kolik se toho žáci naučili během online výuky matematiky ve srovnání s prezenční výukou (viz obrázek 4). Nejčastější odpovědí u obou typů škol bylo, že se žáci během online výuky naučili méně než při prezenční výuce, tento názor uvedlo téměř 60 % žáků G a něco přes 50 % žáků SOŠ. Jen velmi malá část respondentů měla opačný dojem, tedy že se během online výuky naučila více. Část žáků, zejména na SOŠ, nedokázala výsledný přínos online výuky posoudit, což může ukazovat na nejasnost v jejich vnímání učení a získaných znalostí. Distanční vzdělávání bylo žáky vnímáno jako méně efektivní forma výuky, přičemž rozdíly mezi gymnázii a odbornými školami nejsou výrazné.



Obrázek 3: Příprava žáků na online hodiny online matematiky ve srovnání s prezenční výukou

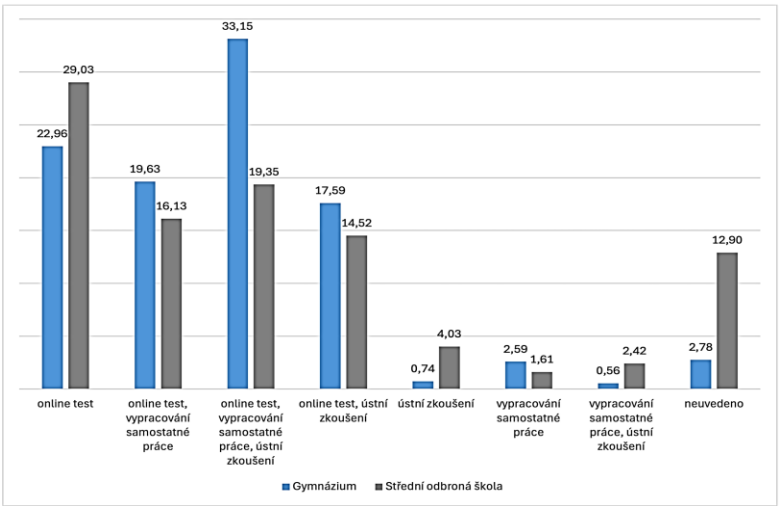


Obrázek 4: Kolik se žáci naučili během výuky matematiky ve srovnání s prezenční výukou

Nejčastějším způsobem ověřování znalostí během online výuky matematiky byla kombinace více forem hodnocení (viz obrázek 5). Na gymnáziích převažoval kombinovaný způsob zahrnující online test, samostatnou práci a ústní zkoušení. Tento způsob uvedlo 33 % žáků gymnázií, zatímco na středních odborných školách jej zvolilo přibližně 20 % žáků.

Naopak u SOŠ dominoval samostatný online test (29 % žáků), zatímco u G šlo o 23 % žáků. Poměrně časté bylo také spojení online testu s ústním zkoušením (G 18 %, SOŠ 16 %). Ostatní formy hodnocení se objevovaly jen výjimečně, což vyčíst i na obrázku 5.

Rozdíly mezi typy škol ukazují, že gymnázia byla v hodnocení flexibilnější, zatímco odborné školy volily jednodušší a jednotnější postupy. Ústní zkoušení bylo méně časté, pravděpodobně kvůli organizační náročnosti online výuky. Zvolený způsob hodnocení mohl významně ovlivnit motivaci žáků i jejich přístup k přípravě. Pestřejší kombinace forem totiž umožňovala komplexnější zpětnou vazbu, zatímco jednostranné testování mohlo vést spíše k mechanickému učení a nižší angažovanosti žáků.



Obrázek 5: Způsoby hodnocení žáků během online výuky matematiky

Výhody a nevýhody online výuky matematiky z pohledu středoškolských žáků

Žáci ve svých odpovědích popsali celou řadu výhod i nevýhod online výuky matematiky. Mezi nejčastěji uváděné přínosy patřily zejména technické možnosti a využití digitálních nástrojů, které umožnily názornější práci s matematickými úlohami, pohodlí domácího prostředí, menší stres a možnost pracovat vlastním tempem. Někteří ocenili i větší samostatnost, individuální přístup učitele a možnost přehrát si záznam výuky. Přesto více než třetina žáků gymnázií a polovina žáků SOŠ uvedla, že pro ně online výuka žádné výhody nepřinesla.

Naopak mezi nejčastější nevýhody žáci zařadili technické problémy, nedostatek osobního kontaktu s učitelem, zhoršení porozumění učivu a ztrátu motivace. Pro mnohé byla náročná i nutnost samostatného studia a rozptýlení v domácím prostředí, které snižovalo soustředění. Celkově výsledky ukazují, že přestože online forma výuky přinesla určité organizační a technické výhody, většina žáků ji hodnotila spíše negativně, zejména kvůli oslabené interakci a obtížnějšímu porozumění matematice.

Kombinovaná výuka na středních školách v České republice

Většina žáků by po zkušenosti s distanční výukou upřednostnila kombinovanou formu výuky (42 % žáků G, 44 % žáků SOŠ). Tato forma podle nich nejlépe spojuje výhody obou přístupů, tedy umožňuje zachovat osobní kontakt s učiteli a spolužáky, ale zároveň poskytuje časovou flexibilitu a možnost pracovat samostatně, například při teoretických předmětech.

Poměrně silná skupina žáků preferovala výhradně prezenční výuku (konkrétně 43 % žáků G a 36 % žáků SOŠ). Tito žáci oceňovali zejména rychlou zpětnou vazbu, lepší soustředění ve školním prostředí, větší motivaci a jasně strukturovaný denní režim.

Menší část respondentů by volilo čistě online výuku, takto se vyjádřilo 11 % žáků G a 17 % žáků SOŠ. Oceňovali zejména pohodlí, menší stres a snadný přístup k materiálům. V komentářích se často objevovalo, že matematika není vhodná pro online výuku, protože vyjadřuje okamžitou interakci s učitelem a názorné vysvětlování, zatímco jiné předměty (např. dějepis, ZSV nebo cizí jazyky) lze v online prostředí zvládat lépe.

Závěr

Z provedeného výzkumu vyplývá, že zkušenosti středoškolských žáků s online výukou matematiky během pandemie COVID-19 byly velmi rozmanité, avšak celkově spíše negativní. Přestože oceňovali časovou flexibilitu, pohodlí domácího prostředí a využití digitálních nástrojů, většina respondentů ji hodnotila jako méně efektivní než prezenční výuku.

Rozdíly mezi gymnázii a středními odbornými školami byly patrné zejména v délce a organizaci výuky, domácí přípravě a formách hodnocení. Gymnázia obvykle nabízela více online hodin za den, větší pestrost ve způsobech ověřování znalostí a častější kombinaci testů, ústního zkoušení a samostatné práce. Naopak odborné školy se více zaměřovaly na jednodušší formy hodnocení, nejčastěji prostřednictvím online testů, a jejich žáci vykazovali nižší míru pravidelné přípravy. Tyto rozdíly pravděpodobně souvisejí s charakterem studia i odlišnou studijní motivací žáků obou typů škol.

Výsledky zároveň ukázaly, že většina žáků by po zkušenosti s distanční výukou upřednostnila kombinovanou formu výuky, která podle nich spojuje výhody obou

přístupů, tedy umožňuje zachovat osobní kontakt a zpětnou vazbu učitele, ale zároveň poskytuje prostor pro samostatnou práci a využití digitálních technologií. Online výuka matematiky se tak stala důležitou zkušeností, která upozornila na limity čistě distančního vzdělávání i na potenciál moderních výukových nástrojů. Do budoucna může sloužit jako inspirace pro hledání vyváženějších forem výuky, jež propojí tradiční pedagogické principy s možnostmi digitálního vzdělávání.

Mgr. Denisa Jarošová
Přírodovědecká fakulta – Katedra algebry a geometrie
Univerzita Palackého v Olomouci
17. listopadu 1192/12
CZ – 779 00 Olomouc
e-mail: denisa.jarosova01@upol.cz

VNÍMÁNÍ PROPORCÍ

MICHAELA KASLOVÁ

ABSTRAKT. *Podobnost a další tematické okruhy v učivu matematiky vykazuje v procesu rozvoje kompetencí u žáků ZŠ řadu úskalí. Za 30 let shromážděné materiály ukazují na rezervy v osnování učiva. Seznámíme s vlivy, které působí na rozvoj mozku v této oblasti a podíváme se na to, jak lze žáky v této oblasti rozvíjet i diagnostikovat (Gasser 1991, modifikace Kaslová, 1993). Typologie výsledků umožní lépe žáky diagnostikovat a odhalit některé z příčin jejich obtíží, případně obohatit výuku o nástroj formativního hodnocení.*

1. Proporce

Slovo proporce má kořeny v latině „pro portio“, následně používané již jako jedno slovo ve francouzštině „*la proportion“* a následně i v dalších jazycích. Rejsek (2014), slovník cizích slov i další podobné zdroje vysvětlují význam jako: *ve prospěch částí; oddělený, odměřený díl (porcovat), poměr (šlo nejen o poloviny, i větší ku menšímu), vztah mezi rozměry objektu, podíl na výsledku a podobně.* Při používání přídavného jména proporcionální (případně úměrný, proporční) vidíme, že je více užíván v souvislosti s procesem měření, porovnávání nebo s nějakou normou, třeba i nepsanou (proporční postava, proporční udělení odměn jako odpovídající poměru výkonu). Proporce je užíváno nejen v matematice, stavebnictví, hudbě, výtvarném umění, ale i v literatuře; E. A. Poe: „Neexistuje dokonalá krása bez jisté podivnosti v proporcích.“ Slovo proporce se váže nejen k výpočtům, ale i estetice, k našemu vnímání a zasahuje ve větší či menší míře naše emoce.

2. Vnímání proporcí

Problematiku vnímání proporcí účelově zjednodušme vzhledem k výuce matematiky. Proporce vnímáme nejen zrakem, ale i hmatem, sluchem, chutí,…. Vjem sám o sobě ještě nezajišťuje objektivní vnímání proporcí, čehož si všímali například již v antice a pro měli svoji bohyni Apaté pro nepřesnost vnímání, v některých zdrojích i charakterizovanou jako bohyni klamu.

Do procesu percepce zasahuje citlivost našich receptorů, do procesu zpracování vjemů se promítají nejen předchozí zkušenosti, ale i potřeby a přání. Práci a zkušenosti s proporcemi (i mimo školu) můžeme rozdělit na ty, kde číslo neužíváme (např. při překládání papíru na poloviny), a na ty, které se opírají především o měření nebo určování počtu. S první skupinou mají žáci z běžného života větší zkušenosti, s druhou, nazvěme ji kvantitativní, se seznamují postupně ve školní matematice, prvouce, finanční matematice, pracovních činnostech, později i ve fyzice, chemii.

Vnímání proporcí hraje velký význam ve světě reklamy. Reklamou je chápána většinou (např. Vysekalová, 2012, 2020) speciální komunikace s komerčním záměrem. Parlament ČR 1995 reklamu vymezil jako „přesvědčovací proces, kterým jsou hledáni uživatelé zboží, služeb nebo myšlenek prostřednictvím komunikačních médií“ (in Vysekalová, s. 21). V jistém smyslu lze na určité postupy ve školství pohlížet jako na specifickou reklamu, například když se snažíme žáky utvrdit v tom, že vzdělávání je celoživotně nutné. V celém vyučovacím procesu najdeme i nástroje, kterých využívá reklama. Počítáme s tím?

Dítě předškolního věku vnímá celostně, analyticko-syntetické vnímání nastupuje u žáků různě rychle a v různé kvalitě. V šedesátých letech minulého století francouzské didaktiky

upozorňovaly na to, že dochází k jinému způsobu trávení volného času, ústupu některých činností včetně manipulativních nebo pohybových her, a v důsledku toho je nástup analyticko-syntetického vnímání opožděn tam, kde dítě/žák sleduje obrazovku (televizní vysílání) déle než hodinu denně. Dnes je situace obdobná, sledování televize je vytěsňováno sledováním obrazovky mobilu nebo počítače. Na to reagují didaktiky různých oborů akcentováním nutnosti posílit manipulativní činnosti.

U celostního vnímání funguje vyhodnocování proporcí jinak. Pokud dítě vnímá celek (Kaslová, 2015a), je jeho vnímání celku ovlivněno např. barvou celku nebo jeho částí, (ne)souměrností celku, nápadností detailů, rolí částí. To, co na celku zaujme, mění roli a stává se celkem nového typu, mohou se tím měnit i měřítka pro porovnávání částí a vnímání struktury celku. Podobné je to může být i u dospělých, vnímáme siluetu postavy, nebo objekt na plakátě a pak se zaměříme na jednu její část, které věnujeme větší pozornost. Dokonce to může být to jediné, co si z původního celku zapamatujeme. Na příklad na reklamě na jídlo. To platí pro kompaktní celky, u diskrétních celků vstupují do hry ještě více klamy, čehož využívá reklama např. při prezentaci zboží.

V matematice cíleně pracujeme tak, aby byla proporčnost na modelu objektu nebo situace zachována. Míra přesnosti zachování proporcí záleží na situaci: při rýsování u konstrukcí, při tvorbě grafu přesnost vyžadujeme, avšak u náčrtků nikoli. Změna role mění nároky na přesnost. Jak je tomu v jiných oborech? Výtvarné umění ve své historii pracovalo záměrně s disproporčností (oproti realitě) např. tam, kde bylo potřeba poukázat na význam osoby pro společnost, byla zobrazována větší než ostatní osoby. Záměrná disproporčnost části v rámci celku fungovala při používání výtvarné nadsázky. Klamavá reklama prezentuje jídlo na talíři tak, že jídlo zvětší, ale talíř zůstává vhledem k okolní zobrazené realitě v běžné proporci.

I výtvarné umění mělo svá období, kde se na přesnost dbalo. Například v antice byly předepsány proporce při zobrazování hlavy, byla definována estetičnost. Za neestetické byla považována díla, která se od toho odchylovala. Za estetické, nejen v reklamě, se dosud považuje i to, co se opírá o zlatý řez. Šetření, která jsem v roce 2012 prováděla s žáky osmých a devátých tříd, ukázala, že není pravda, že by se lépe prodávaly obrazy, jejichž šířka ku délce je v poměru zlatého řezu. Nicméně zobrazované obdélníky bez označených rozměrů prezentované v řadě učebnic matematiky zachovávají poměr zlatého řezu nebo mají strany v poměru 1:2. Měření kamenů stavebnic s touto skupinou žáků také ukázalo, že většina dřevěných stavebnic obsahuje hranoly, mosty, válce, kde šířka podstavy ku výšce v poměru 1:2, méně často v poměru zlatého řezu, ale jinak ne. Výjimku tvořila Otíkova stavebnice z Olomouce, která nikdy nebyla snadno dostupná a která se již nevyrábí. Zkoumání poměru výšky a šířky u současných oken v ČR (1:1, 5:6, 2:3, 3:4 nebo 3:5), dospělo k tomu, že rozdíl mezi dvěma čísly poměru zpravidla nepřesáhne 2. Avšak podíváme-li se za hranice, vidíme, že se zde daný poměr od našich liší zejména u starších domů (nikoli historických staveb). Architektura i stavební průmysl sledují nejen účelnost, ale i další faktory. Proporce objektů v našem okolí podléhají módě, osobním prioritám umělce (např. Věstonická Venuše a Venuše Samotrácká).

Ukazuje se, jak je významná líbivost a prodejnost objektů, nejen stavebních, které jsou kolem nás a my je intuitivně vnímáme. To, co a jak dlouho vnímáme, nás ovlivňuje a může nás pro výuku matematiky nejen obohacovat, ale i blokovat. Zde můžeme hledat i vysvětlení, proč „úzké obdélníky“ někteří žáci za obdélníky nepovažují. Proč žáci testovaní dle Van Hieleho nezařazují mezi čtverce čtverec natočený na koso? Jednak v takové pozici (kromě postmodernismu ad opravní značky) čtverec kolem sebe nevidí, ale i proto, že pravé úhly s nástupem většího tlaku na analytické myšlení nezkoumáme v pozicích odlišných od „stabilní“ polohy čtverce či obdélníka, samotné úhly v učebnicích mají zpravidla jedno

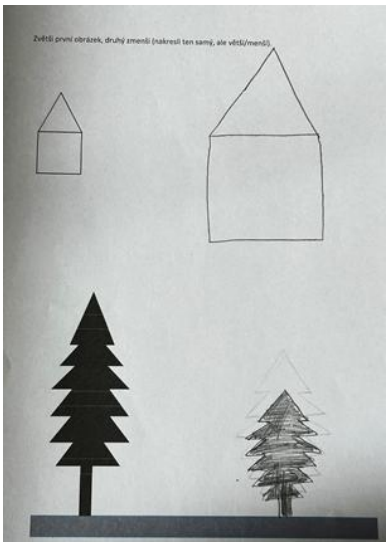
z ramen ve vodorovné poloze, podobně jako vnímání rovnoběžek, které jsou buď v poloze „vodorovné“, nebo „svislé“. V těchto směrech se také lépe proporce objektů vnímají. Čtverec natočený na koso, žlutý a z podhledu navíc podléhá optickým klamům.

3. Aktivity s žáky

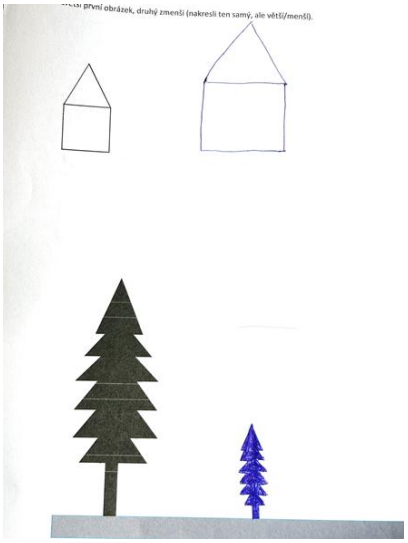
Zadáme žákům nakreslit obry nějakého objektu, například postavy. Autor, nebo jeho soused, nakreslí vedle siluetu téhož objektu tak, abychom mohli mluvit o shodném zobrazení. Silueta oproti obrysu je tmavá, plocha je plná, fungují zde i optické klamy a pokud se neaktivuje analyticko-syntetické vnímání, nedojde ani k procesu korekce. Pracujeme výhradně s měkkou tužkou.

Dalším úkolem je nakreslit to samé, ale větší. Původní obrázek je žákovi zadán na kartičce o rozměrech 10 cm x 10 cm a žák dle vlastního rozhodnutí daný obrázek zvětší nebo zmenší na bílý papír formátu A4. Pokud zadáváme takový úkol v mateřské škole, vyhýbáme se obrázkům domu, slunce, květin, stromů. Vhodnější pro děti do 7 let jsou obrázky jako zvonek, klobouk kouzelníka Pokustona, srdíčko, hrnek na kakao, židle. Pro žáky od 8 let toto omezení neplatí. Sledujeme pouze to, aby obrázek neměl více než sedm částí. Slovem obrázek chápeme zobrazení jednoho objektu ze světa reality. Pracuje se s tužkou nebo s tmavou pastelkou (hnědá, černá, tmavošedá, tmavozelená, tmavofialová, tmavomodrá). Zářivé barvy neumožňují dobře vnímat tvar objektu, v představě bývají rozostřené a snadněji je deformujeme, měníme tedy i proporce. K takto nakresleným obrázkům se hůře provádějí korekce.

Jak je to se zvětšováním? U malých dětí je celkem zákonité, že při pokynu zvětšit obrázek protáhnou do výšky, tedy neproporčně. Ale takové projevy najdeme i u některých žáků devátých ročníků. Zadání pro všechny zní: Nakresli to samé, ale větší.



Obrázek č. 1 Zvětšení smrku a domu u žáka 9. r. ZŠ)



Obrázek č. 2, Zvětšení domu a smrku, žákyně 9.r. ZŠ

Zvětšování ve čtvercové síti má specifika, obsahuje již jistý korektor v podobě sítě, ale nezaručuje vyšší úspěšnost. Jak se ukázalo na 300 žácích, spíše brzdí rozvoj vnímání proporcí, vykazuje horší kvalitu práce.

Pokud si žáci mohli vybrat, pak zhruba třetina sáhla ihned po bílém papíru, další třetina opustila záhy čtvercovou síť. Práce ve čtvercové síti vykazovaly hroší grafický projev než na bílém papíru. V síti byla čára v nadpoloviční většině vytlačena do papíru, nastavována, kostrbatá. Za poznámku stojí to, že děti z romských rodin až na jedno sáhly hned napoprvé po bílém papíru. Črtat se zachováním proporcí, umět objekt zvětšit nebo zmenšit není až otázkou učiva o podobnosti. Musí na úrovni intuitivní začít dříve. Mohli bychom říct, že mozek to sám od sebe neumí. Pokud to nemáme v představě, těžko dokážeme „zavelet“ ruce.

Zadejme zdánlivě drobný úkol: Načrtni ten rovnostranný trojúhelník větší! Může být pro žáka druhého stupně problém. Vidíme vysokou shodu ve způsobu zvětšování stromu a rovnostranného trojúhelníka. Tam, kde byl strom jen protažen do výšky a přidala se mu patra větví bez rozšíření, tam také z rovnostranného trojúhelníka vznikl rovnoramenný.

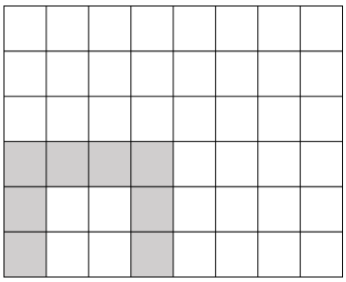
3. Od obrázku k testu

E. Gasser z ženevského pedagogického centra před 30 lety ukazovala učitelkám, jak je důležité, aby od 5 let s dětmi zvětšovaly obrázky ve čtvercové síti (zmenšit pro tyto děti je bez deformace obtížnější). Postupovalo se tak, že děti na A4 s „centimetrovou čtvercovou sítí“ vybarvovaly tužkou čtverečky tak, abychom uviděli něco proti světlu, třeba zvíře. Slovo silueta měly již zavedeno pozorováním přírody při východu/západu slunce. Děti pracovaly tužkou, většinou se tomu smály: „ta je kočka hranatá“, „není naše auto“, „kytka je divná“.

Pak měly na stejný nebo nový čtverečkovaný papír vybarvit to samé, ale větší, jako když se k tomu přiblížíme. Žádné dítě nebylo úspěšné, avšak v procesu zvětšování se objevovaly individuální překážky ve vnímání proporcí. Způsobem pokus – omyl docházelo ke korekcím

a u některých ke komentářům nebo výbuchům smíchu. Nikdo to neměl „správně“. Následovala diskuse s dětmi, komentáře k vystaveným pracím.

Na základě této zkušenosti jsem vytvořila test „Stůl“, který používám jak pro děti mateřských škol, tak pro žáky i pro dospělé včetně učitelů. Jak si obrázek v síti pojmenují, je nepodstatné (stůl, most, garáž, tunel, …). Pokyn bez jakýchkoliv dalších nápověd zní: *Do sítě nakresli to samé, ale větší. To samé, ale větší*. Nic jiného se neříká. Pokud se ptají na techniku, pak doporučuji vybarvování plochy. K dispozici mají obyčejnou tužku.



Obrázek č. 3 část zadání testu, formát A4, strana jednotkového čtverce je 1 cm)

Výsledky testu Stůl od roku 1993 ukázaly, že se řešitelé dělí do čtyř skupin:

3.1 **Skupinu 1** tvoří jedinci, kteří náš „stůl“ „nedělili“, ale protáhli pouze v jednom ze směrů: vertikálně (skupina 1v) nebo pouze horizontálně (skupina 1h). Do této skupiny spadá většina dětí kolem 5 let, avšak i někteří žáci a dospělí.

3.2 **Skupina 2** představuje řešitele, kteří ve své představě nejdříve celek – stůl rozdělili na tři části (nohy a desku stolu) a každou část prodlužovali v jednom směru. Skupina 2 se dále dělí na ty, kteří vytvořili pod stolem obdélník (1a, 2b) buď postavený „na výšku“, nebo „na ležato“, dále na ty, kteří pod stolem vytvořili čtverec (skupina 2c). V každém případě stolek vypadá „hubený“.

3.3 **Skupina 3** je poměrně vzácná. Podobně jako u předešlé, dochází v procesu řešení k dělení stolu na tři části, avšak některé části se pouze protáhnou a některé se protáhnou i rozšíří ve smyslu správného zvětšení. Zvětšuje se korektně jen část stolu: buď deska (méně často), nebo jen nohy (častěji). Opět můžeme rozlišit stoly s obdélníkem a stoly se čtvercem pod deskou. Vzniká zde značení: skupina 2Aa, 2Ab, 2Ba, 2Bb. TO odpovídá vnímání popsaném v kapitole 1.

3.4 **Skupina 4** zvětšuje stůl jako celek v obou směrech, ne vždy proporčně. Některé stoly mají pod deskou obdélník v jedné ze dvou možných poloh (skupina 3av, 3ah), jiné čtverec (3b).

Počet úspěšných řešitelů s jejich věkem přibývá, ale u všech věkových skupin najdeme zastoupení všech typů řešení s výjimkou dětí mateřských škol, které nikdy nevytvořily typ spadající do skupiny 3. Síť musí být tenká, čáry souvislé, strana jednotkové čtverce 1 cm.

U vybraných skupin řešitelů jsem měla možnost ještě sledovat výkony při řešení úloh o poměru, nebo zaměřené na podobnost a můžeme sledovat vysokou shodu ve výsledcích. Podobné aktivity jsem řešila i v trojúhelníkové síti (Kaslová, 2002), avšak tyto testy nemají tak silný diagnostický potenciál ve vztahu ke zmíněným matematickým tematickým celkům, jako má tento test Stůl.

4. Závěry

Vnímání proporcí je ovlivněno mnoha faktory. Není bez zkreslení a vyžaduje větší pozornost ještě před zařazením látky osové souměrnosti, o poměru a podobnosti. Pro dnešního žáka je obtížnější z více důvodů, mimo jiné má nižší haptické a manipulativní a pracovní zkušenosti, je mu nabízeno v přechodném období na počátku 1. stupně ZŠ relativně málo podnětů stimulujících analyticko-syntetické vnímání (viz analýzy učebnic) a následně myšlení, nepracuje se cíleně s různými typy transformací (Kaslová, 2015b), mezi které patří i velikostní a polohová transformace a které významně ovlivňují pojmotvorný proces.

Vnímání proporcí je ovlivněno i naší tendencí k archetypálním reakcím, vnímáme nejdříve výšku objektu, nápadné či „nebezpečné" části celku, je pro nás důležitá „líbivost", necháváme se strhnout nápadnými znaky, i když jsou možná nepodstatné. Schopnost zvětšovat či zmenšovat v představě pozorovaný objekt bez narušení proporcí, struktury je schopnost, která nám umožňuje identifikaci a mimo jiné se významně podílí na kvalitě pojmotvorného procesu. Podobnost bez účasti čísla je pro mozek snazší než v případě, kdy musíme zapojit i proces měření, ve kterém jde o propojení více center v mozku (prostor, číslo, …). Spolupráce obou hemisfér se musí cvičit. Míra je na zpracování složitější struktura než „pouhé modelování", práce s obrázky.

Testy a aktivity, které příspěvek nabízí, mohou sloužit v praxi jak pro testování, které umožňuje sledovat míru zralosti žáka pro nadcházející téma, tak následně pomáhá interpretovat žákovy obtíže.

LITERATÚRA

[1] Gardner, H. *The Mind's New Science: A History Of The Cognitive Revolution.* New York, Basic Books, 1987. ISBN 0465046355.

[2] Gasser, E. Fonction de agrandissement de l'image dans la maternelle. Přednáška 21.3. 1991, Centre Pédagogique, Ženeva.

[3] Kaslová, M. *Trojúhelníková síť na prvním stupni ZŠ jako diagnostický i rozvíjející nástroj. In Ausbererová, M. Novotná, J. a Sýkora, V. (Eds.)* 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, s. 147-154. JČMF, Praha, 2002.* ISBN 80-7015-876-X

[4] Kaslová, M. *Celek a jeho části*. VC ESF, Pardubice, 2015a. 20 stran, bez ISBN.

[5] Kaslová, M. Transformace. In Fuchs, E. a kol. *Rozvíjení předmatematických představ u dětí předškolního věku*. JČMF, Praha, 2015b. ISBN 978–80–7015–022–1

[6] Rejsek, J., Český etymologický slovník. Praha, Leda, 2012. ISBN 978-80-7335-296-7

[7] Sedláková, M. *Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie: mentální reprezentace a mentální modely.* (Vyd. 1., 252 s.) Grada, Praha, 2004. ISBN 80-247-0375-0.

[8] *Slovník cizích slov*. Dostupné 10.5.2023 na https://slovnik-cizich-slov.abz.cz/web.php/slovo/generalizace-generelisace

[9] Sternberg, R. *Kognitivní psychologie.* Portál, Praha, 2009. ISBN 978-80-7367-638-4.

[10] Vágnerová, M. *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. Karolinum, Praha, 2002. ISBN 80-246-0181-8

[11] Vysekalová, J. a kol., *Psychologie reklamy*. Grada, Praha, 2023. ISBN 978-80-271-3654-4

[12] Vysekalová, J. a kol., *Emoce v marketingu.* Grada, Praha, 2014. ISBN 978-80-247-4843-6.

[13] Thagard Praha, P. Úvod do kognitivní vědy: mysl a myšlení. Portál, Praha, 2001. ISBN 80-7178-445-1.

Michaela Kaslová
UK Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4.
CZ – 116 39Praha 1
e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

GEOMETRIA V POHYBE: ČO SA MENÍ A ČO NIE?

DANIELA KOVALČÍKOVÁ, PATRIK ŠTEIN

ABSTRAKT. *Workshop sa zameriava na podporu hlbšieho porozumenia pojmov obvod a obsah, ktoré si žiaci často zamieňajú. Pomocou dynamických vizualizácií v GeoGebre budú účastníci skúmať, ako sa pri premiestňovaní a skladaní častí útvarov menia či nemenia ich vlastnosti. Dôraz sa kladie na objav invariantnosti a rozdiel medzi obvodom a obsahom.*

Úvod

Vyučovanie matematiky prebieha v neustále sa meniacom svete a je preto vhodné prispôsobiť nielen obsah, ale aj formu vyučovania matematiky a vhodne zvoliť vyučovacie štýly a metodické postupy pri osvojovaní a upevňovaní nových vedomostí a zručností. V príspevku sa budeme opierať o model špecifických vedomostí učiteľov matematiky (MTSK) (Carillo a kol., 2013), v ktorom je dôraz kladený rovnako na poznanie matematiky ako na didaktické poznanie matematiky. V rámci príspevku sa budeme zaoberať vytvorenými materálmi, ktorých cieľom je hlbšie porozumenie pojmom obvod a obsah – čo majú spoločné a čo je rozdielne.

Obvod a obsah vo vyučovaní matematiky

Tému obvod a obsah sme si zvolili kvôli pretrvávajúcim problémom s uchopením týchto pojmov, so zamieňaním pojmov alebo vlastností obvodu a obsahu a taktiež kvôli výsledkom predtestu, ktorý sme uskutočnili so študentmi učiteľstva (PST – pre-service teacher) na Univerzite Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach (UPJŠ). Medzi faktory prispievajúce k nesprávnym predstavám o obvode a obsahu môže patriť aj podcenenie vyučovania danej témy, ktorá sa javí ako pomerne jednoduchá. Ďalej uvedieme zistenia výskumníkov z rôznych oblastí sveta.

Podľa výskumníkov (Grant & Kline, 2003; Kamii & Clark, 1997; Moyer, 2001) sa pri výučbe merania kladie príliš veľký dôraz na postupy merania, na to „ako merať“ a nedostatočný dôraz na kľúčové atribúty a myšlienky merania, vďaka ktorým by žiaci mohli pochopiť význam pojmov obvod a obsah.

Nedostatočné pochopenie obvodu a obsahu a unáhlené zavedenie vzorcov sú považované za možné dôvody, prečo žiaci nadmerne zovšeobecňujú vzťah medzi obvodom a obsahom (Widjaja & Vale, 2021). Toto bežné nesprávne chápanie bolo zaznamenané aj v dokumentoch Národnej rady učiteľov matematiky (NCTM, 1989): „Väčšina žiakov v 5. až 8. ročníku sa nesprávne domnieva, že ak sa strany útvaru zdvojnásobia (vytvoria podobný útvar), obsah a objem sa tiež zdvojnásobia“ (NCTM, 1989, s. 114–115).

Ďalší výskumníci (Livy a kol., 2012; Yeo, 2008) pozorovali podobnú mylnú predstavu u začínajúcich učiteľov a uvádzali silnú závislosť od procedurálnych vedomostí. To naznačuje, že zmätok v súvislosti so vzťahom medzi obvodom a obsahom pretrváva.

Podľa Lo & Zhou (2025) aj napriek desaťročiam výskumu pretrvávajú medzi žiakmi a pedagógmi mylné predstavy o vzťahu medzi obvodom a obsahom. Štúdie konzistentne ukazujú, že začínajúci aj skúsení učitelia majú často mylnú predstavu o tom, že väčší obvod nutne znamená aj väčší obsah (Ma, 2010; Livy a kol., 2012; Tan Sisman & Aksu, 2016;

Widjaja & Vale, 2021). Takéto mylné predstavy bránia flexibilnému riešeniu problémov a naznačujú, že výučbové stratégie plne neriešia koncepčnú zložitosť tejto témy.

Prezentované zistenia naznačujú, že je potrebné sa vo vyučovaní venovať viacerým aspektom – subdoménam podľa modelu MTSK (Carillo a kol., 2013), nie iba poznaniu učiva matematiky. Model zahŕňa tri subdomény v doméne Poznanie matematiky (poznanie učiva, štruktúry a výstavby matematiky) a tri subdomény v doméne Didaktické poznanie matematiky (poznanie vyučovania, charakteristík učenia sa a vzdelávacích štandardov). Hlavnou myšlienkou modelu je pomôcť v generovaní úloh, ktoré sú zamerané na rozvoj viacerých typov vedomostí, vychádzať z triednej praxe a do popredia dávať rozvoj učiteľov (aj PSTs) nie ich hodnotenie (Climent a kol., 2024).

Podľa zistení predtestu, PSTs pojmy obvod a obsah nerobili problém, vlastnosti obvodu a obsahu sa im nemýlili, no transformácie útvarov tak, aby ich vlastnosti ostali zachované, neboli všetkým PSTs zrejmé. Väčší problém robili transformácie, v ktorých mal ostať zachovaný obvod útvaru. Aj na základe tohto pretestu sme sa rozhodli venovať vytvoreniu appletov na výpočet obvodov a obsahov útvarov pomocou vhodných transformácií.

Prostredie GeoGebra

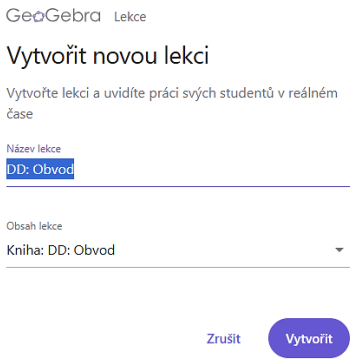
Applety sme vytvorili v prostredí softvéru GeoGebra kvôli jeho viacerým benefitom.

GeoGebra je dynamický matematický softvér pre všetky úrovne vzdelávania, ktorý v sebe zahŕňa geometriu, algebru, tabuľky, tvorbu grafov, štatistiku a výpočty v jednom. Okrem toho ponúka online platformu s viac ako miliónom bezplatných zdrojov pre triedy, ktoré sú dostupné v mnohých jazykoch vytvorených komunitou, ktorá GeoGebru používa. Tieto zdroje možno pomocou platformy na spoluprácu (GeoGebra Trieda) ľahko zdieľať a rovnako ľahko aj sledovať pokrok žiakov v reálnom čase.

Vhodne pripraveným appletom vieme žiakov nasmerovať k objavovaniu rôznych vlastností. Žiaci si v programe môžu skúšať pohyb a otáčanie objektov rôznych dimenzií, ktoré v zošite nie je možné. Rovnako vďaka možnosti vypísania veľkosti úsečiek alebo uhlov si môžu všimnúť vlastnosti, ktoré by boli v zošite len veľmi ťažko objaviteľné.

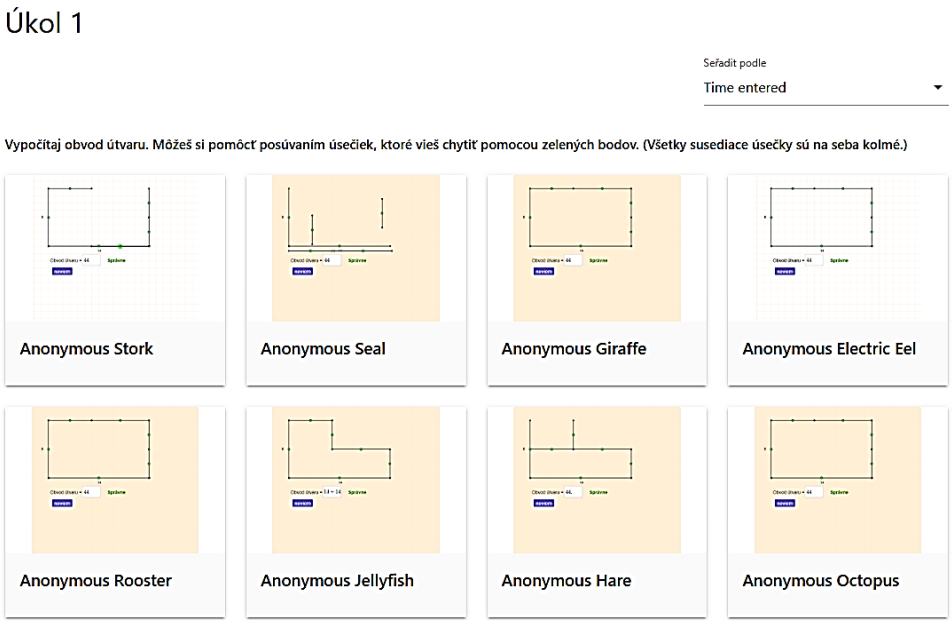
Obrázok 1: Vytvorenie GeoGebra triedy / Úlohy materiálu Obvod

Po vytvorení alebo otvorení už vytvoreného appletu si učiteľ môže vytvoriť triedu, ktorej chce applet zadať. Kliknutím na tlačidlo GeoGebra Trieda vytvorí lekciu, ktorú si môže ľubovoľne premenovať a žiaci sa do nej prihlasujú len pomocou kódu – aj bez nutnosti registrácie.



Obrázok 2: Vytvorenie lekcie

Následne vie učiteľ sledovať prácu žiakov priamo vo svojom počítači, kde prehľadne vidí prácu každého žiaka, jeho postup práce ako aj výsledky a nedostatky, na ktoré vie efektívne reagovať.



Obrázok 3: Učiteľské zobrazenie

Tvorba interaktívnych materiálov

Vytvorili sme dva materiály, jeden zameraný na výpočet obvodu a druhý na výpočet obsahu rovinných útvarov pomocou vhodnej transformácie týchto útvarov (úlohy tak rozvíjajú poznanie vo všetkých troch subdoménach Poznania matematiky – poznanie učiva ako poznanie pojmov obvod a obsah a ich vlastností, poznanie štruktúry matematiky ako schopnosť zjednodušenia úlohy a uvedomenie si, ktoré vlastnosti sú invariantné a ktoré nie a poznanie výstavby matematiky ako rozvíjanie schopnosti odôvodňovať a argumentovať, prečo sa pri transformácii určité vlastnosti nemenia). Cieľom bolo vytvorenie materiálov s vhodnou postupnosťou úloh – aby žiaci samostatne porozumeli danej problematike a samostatne objavili nové spôsoby riešenia daných úloh (u učiteľov tým môžeme rozvíjať subdomény Didaktického poznania matematiky – poznanie charakteristík učenia sa pomocou sledovania práce žiakov v Geogebra Triede a ich interakcií s daným materiálom, poznanie vyučovania formou sledovania rôznych stratégií riešenia úloh žiakmi a rôznymi reprezentáciami daného matematického obsahu a poznanie štandardov formou tolerancie rôznej úrovne komentovania a zdôvodňovania).

Obvod

Prvým vytvoreným materiálom bol súbor 6 appletov, v ktorých je úlohou riešiteľov vypočítať obvod útvarov, pričom im je umožnené pohybovanie jednotlivými úsečkami – stranami útvaru.

Cieľom materiálu je pochopenie a uvedomenie si toho, že presunutím strany útvaru sa jeho obvod nezmení. Viditeľnosť výhody tohto posúvania úsečiek je zabezpečená postupným komplikovaním výzoru útvaru a zadaním nedostatočného počtu dĺžok strán, kvôli čomu je nemožné vypočítať obvod útvaru bez uskutočnenia presunu úsečky (znázornením v applete alebo len ako predstava v hlave). Tým sú riešitelia „nútení“ uskutočniť nejaký presun a nepočítať obvod len ako súčet všetkých strán útvaru.

Ako pomôcka pod tlačidlom „neviem“ je v prvých štyroch úlohách skrytá štvorcová sieť, ktorá má riešiteľom pomôcť k objaveniu zhodnosti dĺžok strán. V štvorcovej sieti si riešitelia môžu samozrejme spočítať veľkosti strán, ktoré nepoznali, no vďaka tomu budú schopní nájsť zhodné úsečky a ďalšie komplikovanejšie útvary vyriešiť aj bez štvorcovej siete.

Posledné dve úlohy slúžia na overenie pochopenia toho, čo je obvod a zistenie, koľkí riešitelia budú využívať transformácie na zjednodušenie výpočtu obvodu útvaru. Tieto úlohy sú zobrazené v štvorcovej sieti, ktorej veľkosť do určitej miery odrádza riešiteľov od počítania obvodu po dĺžkach jednej strany štvorca a podporuje rýchlejšie riešenie pomocou transformácie útvarov.

Úlohy prvého materiálu sú zobrazené na obrázku 1 a sú voľne dostupné na odkaze: https://www.geogebra.org/m/ntwd69dw, kde po vytvorení kópie si ich užívateľ môže aj ľubovoľne upravovať.

Obsah

Druhý materiál obsahuje 7 appletov zameraných na výpočet obsahu, buď pomocou vhodnej transformácie útvaru alebo nájdením vhodného rozdelenia útvaru, ktoré výpočet obsahu zjednodušia.

Cieľom prvej úlohy je zistiť, či žiaci rozumejú pojmu obsah a či vidia, že útvary zložené z rovnakých častí majú rovnaký obsah bez ohľadu na ich umiestnenie v rovine (bez ohľadu na ich rôzny obvod).

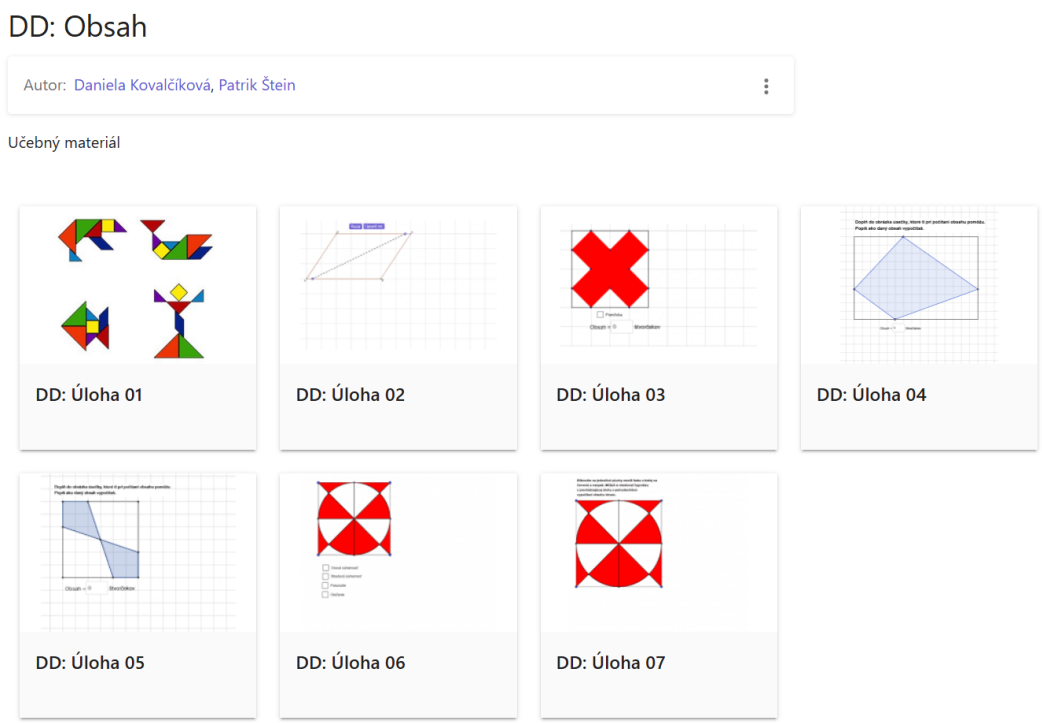
Druhou a treťou úlohou je nájsť vhodnú transformáciu útvaru – rozdelenie útvaru a presun nejakej časti, aby bol obsah útvaru jednoduchšie vypočítateľný. V druhej úlohe ide o odvodenie vzťahu na výpočet obsahu rovnobežníka pomocou transformácie na obdĺžnik.

V 4. a 5. úlohe je úlohou riešiteľov rozdeliť útvar na časti, ktorých obsah vedia vypočítať. Úlohy sú doplnené o otvorené otázky, ktoré sú zamerané na porozumenie vlastností a vysvetlenie daných vzťahov riešiteľmi.

Posledné dve úlohy využívajú na transformáciu útvaru zhodné zobrazenie, ktoré zjednoduší výpočet obsahu.

V appletoch sú vytvorené dynamické konštrukcie, ktoré umožňujú riešiteľom modifikovať situáciu podľa ich uváženia a objavovať rôzne, až hraničné transformácie geometrických konštrukcií. Voľnosť riešenia úloh je podporená vybranou množinou nástrojov určených na konštrukciu doplnkových objektov, ktoré môžu byť potrebné pri riešení úlohy.

Úlohy druhého materiálu sú zobrazené na obrázku 4 a sú voľne dostupné na odkaze: https://www.geogebra.org/m/nvdp4rgs, kde po vytvorení kópie si ich užívateľ môže aj ľubovoľne upravovať.



Obrázok 4: Úlohy materiálu Obsah

Záver

Vytvorené materiály boli testované na študentoch učiteľstva matematiky na UPJŠ v Košiciach. Vyskúšali si ich aj účastníci workshopu na konferencii Dva dni s didaktikou

matematiky v Bratislave a materiál Obvod bol použitý v rámci vyučovacej hodiny v 5. ročníku základnej školy.

Z pozorovaní a reakcií účastníkov môžeme konštatovať, že vytvorené materiály sú vhodné pre podporu vyučovania obvodu a obsahu. Myslíme si, že materiály zvýrazňujú vlastnosti daných pojmov a posilňujú pochopenie ich významu. Vďaka interaktívnosti materiálu sme pomohli riešiteľom priblížiť transformácie útvarov, ktoré zachovávajú obvod alebo obsah, ale vďaka ktorým je ich výpočet jednoduchší.

Zadaním materiálov budúcim učiteľom matematiky sme rozvinuli nie len ich poznanie matematiky vo všetkých troch subdoménach (ako bolo opísané vyššie) ale ukázali sme im aj didaktický potenciál takto vytvoreného materiálu a možnosti, ktoré Geogebra Trieda ponúka a ako ju na vyučovaní efektívne využívať.

Veríme, že materiály sa páčili aj účastníkom konferencie a že ich motivujú k využívaniu appletov na vyučovaní a k použitiu aj nami vytvorených materiálov pri vyučovaní obvodu a obsahu rovinných útvarov.

Poďakovanie

Tento príspevok bol podporený projektom VVGS IPEL (vvgs-2024-3423) a projektom VVGS PF Výskum (vvgs-2025-3507)

LITERATÚRA

[1] Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C.: *Determining specialized knowledge for mathematics teaching*. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*, Antalya, 2013, ISSN 2985-2994.

[2] Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., & Ribeiro, M.: *The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. ZDM Mathematics Education*, 56(6), 1123–1135, 2024. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

[3] Grant, T. J., & Kline, K.: *Developing building blocks of measurement with young children*. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 46–56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

[4] Kamii, C., & Clark, F.: *Measurement of length: The need for a better approach to teaching*. *School Science and Mathematics*, 97(3), 116–121, 1997.

[5] Livy, S., Muir, T., & Maher, N.: *How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter*. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14(2), 91–112, 2012.

[6] Lo, J.-J., & Zhou, L.: *Analysis of curricular treatment of the relationship between area and perimeter in two U.S. curricula*. *Education Sciences*, 15(10), 1342, 2025. https://doi.org/10.3390/educsci15101342

[7] Ma, L.: *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Routledge, 2010.

[8] Moyer, S. P.: *Using representations to explore perimeter and area*. *Teaching Children Mathematics*, 8(1), 52–59, 2001.

[9] National Council of Teachers of Mathematics: *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[10] Tan Sisman, G., & Aksu, M.: *A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1293–1319, 2016.

[11] Widjaja, W., & Vale, C.: *Counterexamples: Challenges faced by elementary students when testing a conjecture about the relationship between perimeter and area. Journal on Mathematics Education*, 12(3), 487–506, 2021. ISSN 2087-8885.

[12] Yeo, J. K.: *Teaching area and perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content-Knowledge-in-Action. In* M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 621–627). Brisbane: MERGA, 2008.

Mgr. Daniela Kovalčíková
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5
SK – 040 01 Košice
e-mail: daniela.kovalcikova@student.upjs.sk

Mgr. Patrik Štein
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5
SK – 040 01 Košice
e-mail: patrik.stein@student.upjs.sk

O ŠOMRANÍ V RADE

EMÍLIA MIŤKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku predstavíme konkrétnu slovnú úlohu z materiálu Leto s Wilmou 2025. Uvedieme rôzne možnosti riešenia tejto úlohy. Poukážeme na možnosť dramatizácie, využijeme vizualizáciu a prejdeme k viac abstraktnému tzv. bar modelu, odtiaľ k riešeniu lineárnou rovnicou. Navyše aj samotné zadanie slovnej úlohy môže byť zaujímavým podnetom na ďalšie skúmanie.*

Úvod

WILMA.sk [1], je stránka vytvorená na Oddelení didaktiky matematiky za účelom ponúknuť rôzne inšpirácie a materiály, ktoré môže učiteľ matematiky použiť priamo na výučbe alebo ich zahrnúť napríklad do mimoškolskej činnosti žiakov. Spätná väzba od učiteľov [2] potvrdzuje, že vhodne navrhnuté materiály, najmä v čase pred sviatkami, prázdninami si nachádzajú u učiteľov obľubu. Zohľadňujúc túto skutočnosť, bol v júni 2025 na stráne uverejnený materiál Leto s Wilmou 2025. Materiál obsahoval okrem iného[8] zadania ôsmich matematických úloh. Slovná úloha, ktorej sa v tomto príspevku budeme podrobnejšie venovať, je jednou z týchto úloh.

Slovná úloha o šomraní v rade a rôzne možnosti jej riešenia

Slovná úloha má nasledujúce zadanie: V rade na zmrzlinu čakajú turisti. Jeden z nich sa začne ponosovať: „To čakanie je strašné. Predo mnou je trikrát toľko ľudí ako za mnou.“ Človek, ktorý stojí v rade hneď za ním, mu dohovára: „Nešomrite! Predo mnou stojí päťkrát toľko ľudí ako za mnou. A som trpezlivo ticho.“ Koľko ľudí čaká v rade?

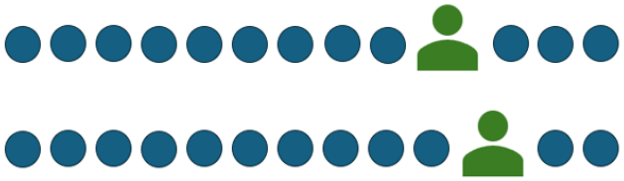
V prípade materiálu Leto s Wilmou bol žiakom poskytnutý aj výber odpovede (konkrétne to boli možnosti :7, 13 a 25), pričom aj samotné overenie, či je ponúkaná možnosť správnym riešením úlohy, nemusí byť pre žiaka triviálne.

Venujme sa však ďalej tomu, ako by bolo možné úlohu riešiť, a napríklad na vyučovacej hodine s ňou pracovať, ak by výber odpovede nebol uvedený. Úlohe samotnej by mohla predchádzať séria úloh, na ktorej by si učiteľ overil, či žiaci porozumeli zadaniu a úlohu správne uchopili. Bolo by možné postupne zadávať, so žiakmi vizuálne znázorniť, prípadne dramatizovať premyslené formulácie úloh, ktoré žiakov vhodne navedú na riešenie. Napríklad od najjednoduchších: „V rade stojí 5 spolužiakov. (Meno konkrétneho žiaka na štvrtej pozícii) vraví, že pred ním stojí trikrát toľko spolužiakov ako za ním. Je to pravda?“, neskôr úloha: „Za (Meno konkrétneho žiaka) stoja dvaja spolužiaci. Koľko spolužiakov by malo byť pred ním, aby to bolo trikrát toľko ako za ním? Koľko by ich potom bolo všetkých v rade?“ a podobne. Postupne je možné žiakov naviesť na myšlienku, že „predo mnou trikrát toľko ľudí ako za mnou“ vlastne znamená, že hľadané riešenie sa nachádza v množine $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \dots\}$. Pre formuláciu „predo mnou päťkrát toľko ľudí ako za mnou“ by sme sa teda dopracovali k množine $\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, \dots\}$. Pretože v texte slovnej úlohy sa už spomínajú dvaja ľudia, zrejme číslo 1, ako celkový počet ľudí v rade, nebude našej slovnej úlohe vyhovovať. Ďalším číslom, ktorým sa potrebujeme zaoberať je číslo 13. To je ozaj riešením úlohy a je znázornené na obrázku 1.

Je to však jediné riešenie úlohy? Situácia sa ozrejmí, ak sa zameriame na počet ľudí, ktorí sa v rade nachádzajú za dvojicou ľudí, ktorých rozhovor je v zadaní úlohy. Ak by tento

[8] Materiál ponúkal komplenejšiu aktivitu, v ktorej boli riešenia úloh prepojené s rysovaním do štvorčekovej siete. Správne vyriešenie úloh viedlo k úspešnému nakresleniu obrázka.

počet ľudí bol 1, alebo 2, vieme si celú situáciu ľahko predstaviť a overiť. Pretože $3 \cdot 2 + 1 + 2 \neq 5 \cdot 1 + 1 + 1$, číslo 1 nás neprivedie k správnemu riešeniu. Ale $3 \cdot 3 + 1 + 3 = 5 \cdot 2 + 1 + 2$, teda číslo 2 k správnemu riešeniu vedie. Ako by sa situácia zmenila, ak by za dvojicou ľudí, ktorých rozhovor je v zadaní úlohy, bol počet ľudí viac ako 2? Ak by sme sa k už nájdenému riešeniu 13 pokúsili pridať niekoľko ľudí ($k, k \in \mathbb{N}$) na koniec radu (obrázok 2), na základe zadania by sme potom na začiatok mali doplniť $3k$ a zároveň $5k$ ľudí. To, aby sa $3k = 5k$ je však možné len pre $k = 0$, teda žiadne ďalšie riešenie už k riešeniu 13 nevieme pridať.

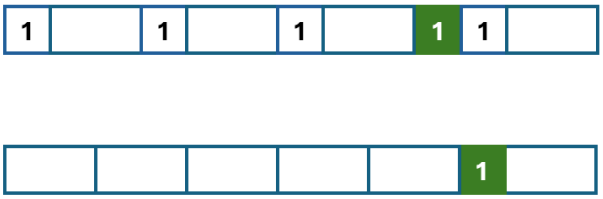


Obrázok 1: znázornenie pre 13 ľudí v rade

Obrázok 2: znázornenie k odôvodneniu existencie jediného riešenia

Žiaci, ktorí úlohu riešili vypísaním dvoch množín, sa často uspokoja s overením niekoľkých možností. (Pričom po čísle 13 pravdepodobne skúsia overiť aj číslo 25.) Ďalej je možné pokračovať výzvou, či teda existuje aj iné riešenie úlohy. Ak áno, ktoré číslo to je? Ak nie, prečo? Je dobré počítať s tým, že záujem žiakov hľadať odpovede na tieto otázky nie je rovnaký. A úplná a korektná odpoveď sa môže u žiaka formovať dlhší čas.

Ďalšou možnosťou, ako riešiť uvedenú slovnú úlohu, je napríklad využitie tzv. bar modelu. O metóde píše podrobnejšie napríklad [3], [4]. Riešeniu úlohy v takomto prípade významne pomáha vizualizácia (obrázok 3). Žiak sa porovnávaním a úvahami dokáže dopracovať k zisteniu, že dva obdĺžniky predstavujú 4 ľudí, teda jeden obdĺžnik predstavuje 2 ľudí. Odtiaľ už ľahko k hľadanému (a jednoznačnému) riešeniu 13.



Obrázok 3: bar model pre danú slovnú úlohu

Metódu bar model je možné používať už pred zavedením formálnejšieho označenia premennej písmenom. Výhody vizualizácie však pre mnohých pretrvávajú aj neskôr, aj po zavedení písmen do riešenia slovných úloh. Situácii znázornenej na obrázku 3 by zodpovedalo: $3(x+1)+1+(x+1)=5x+1+x$, pričom hľadaným riešením slovnej úlohy je vlastne číselná hodnota výrazu $6x+1$.

Zadanú slovnú úlohu je samozrejme možné riešiť aj sústavou dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych, čo však presahuje aktuálne stanovené štandardy iŠVP pre druhý stupeň ZŠ.

Rozšírenie

Pre žiakov stredných škôl a starších (napr. pre študentov študijných programov učiteľstva matematiky a učiteľov matematiky v praxi) úloha o šomraní v rade ponúka aj zaujímavý problém, v súvislosti so zmenou parametrov tejto slovnej úlohy. V zadaní sa vyskytuje špecifikácia „trikrát toľko“ a „päťkrát toľko“. Bolo by zaujímavé zistiť, aké sú prípustné voľby týchto parametrov, aby úloha naozaj mala riešenie.

Záver

V príspevku sme sa venovali konkrétnej slovnej úlohe z materiálu Leto s Wilmou 2O25. Predstavili sme rôzne možnosti riešenia danej slovnej úlohy. Znalosť rôznych možností riešenia je všeobecne osožná príprava pre učiteľa, pretože spolu so zásadou primeranosti pomáha učiteľovi vhodne zvoliť (v prípade potreby doplňujúcu) otázku, úlohu či znázornenie.

Grantová podpora:

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*

LITERATÚRA

[1] Webové stránky Inšpirácií a odbornej Literatúry pre učiteľov MAtematiky. (n.d.). https://wilma.sk/

[2] Slavíčková, M., Dillingerová, M., Miťková, E., Vankúš, P., Vargová, M., Jakubička, A.: *Webové stránky Inšpirácií a odbornej Literatúry pre učiteľov MAtematiky*, Bratislava, FMFI UK v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-8147-125-4

[3] Richardson, P.,(2025, 25. marec) *The Ultimate Guide To The Bar Model: How To Teach It And Use It In KS1 And KS2.* [blog post] The Bar Model: How To Teach it and Use it In KS1 and KS2

[4] Csachová, L.: Obrázkové riešenie slovných úloh, In Slavíčková, M. (ed.): Dva dni s didaktikou matematiky 2023, Bratislava, FMFI UK v Bratislave, 2023, ISBN 978-80-8147-135-3, s. 12 - 15

Mgr. Emília Miťková, PhD.
FMFI UK v Bratislave
Mlynská dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

VZDELÁVACIE ÚNIKOVÉ MIESTNOSTI VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

EMÍLIA MIŤKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci príspevku predstavíme vzdelávaciu únikovú miestnosť vo vyučovaní matematiky. Ukážeme si implementáciu diferencovaných úloh z oblasti algebry druhého stupňa základnej školy v prostredí únikovej hry. Budeme diskutovať o rôznych formách realizácie tohto typu aktivít.*

Úvod

Únikové hry možno opísať ako skupinové aktivity, v ktorých hráči prostredníctvom objavovania stôp, riešenia hádaniek a plnenia úloh postupne dosahujú vopred stanovený cieľ – najčastejšie „uniknúť“ z priestoru v danom časovom limite (Nicholson, 2015). Vzdelávacia adaptácia tohto herného konceptu sa označuje ako vzdelávacia úniková miestnosť (VUM) a predstavuje špecifický spôsob využitia herných princípov v edukačnom prostredí.

Ako ukazujú viaceré výskumy, VUM možno chápať ako inovatívny prístup k podpore učenia sa prostredníctvom aktivity, spolupráce a zážitku. Hry tohto typu dokážu zvyšovať vnútornú motiváciu žiakov, ich angažovanosť pri učení a ochotu riešiť problémy (Videnovik et al., 2022). Podľa Fotarisa a Mastorasa (2019) umožňuje forma únikovej hry žiakom prežívať učenie ako zážitok, v ktorom sú aktérmi, nie pasívnymi prijímateľmi informácií. Hráči pri riešení úloh uplatňujú strategické myslenie, spoluprácu a komunikáciu, čo podporuje nielen rozvoj ich vedomostí, ale aj sociálnych a osobnostných kompetencií. Taraldsen a kol. (2022) upozorňujú, že únikové hry nachádzajú využitie predovšetkým v oblastiach zdravotníctva a STEM vzdelávania, pričom matematika patrí medzi časté oblasti ich implementácie.

V predkladanom príspevku predstavujeme vzdelávaciu únikovú miestnosť s názvom „Vďaka, Valentín!“, určenú pre vyučovanie matematiky na druhom stupni základnej školy (vek 11–15 rokov). Aktivita bola realizovaná ako pracovná dielňa na konferencii v nedigitálnej forme, no zároveň bola vytvorená aj jej digitálna verzia prostredníctvom platformy Google Forms (Miťková & Vankúš, 2025). V rámci diskusie sme s učiteľmi porovnávali tieto dve formy aktivity z hľadiska ich použiteľnosti na hodinách matematiky.

Z obsahového hľadiska sa hra zameriava na rozvoj zručností v oblasti základných aritmetických operácií a deliteľnosti čísel. Úlohy sú navrhnuté tak, aby podporovali porozumenie matematickému textu, modelovanie situácií a aplikáciu poznatkov v kontexte príbehu. Príbehová línia hry posilňuje motivačný a emocionálny rozmer učenia, čím prispieva k väčšiemu zapojeniu žiakov a k pozitívnej skúsenosti s učením matematiky prostredníctvom hry.

Použitá vzdelávacia hra

V rámci našej pracovnej dielne sme použili VUM „Vďaka, Valentín!”, pričom účastníci pracovali v dvojiciach, resp. trojiciach. Príbeh hry sme im sprostredkovali prostredníctvom prezentácie v MS Powerpoint, ktorú sme uviedli účastníkom frontálne (obrázok 1).

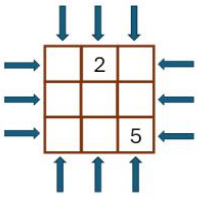
Máte k dispozícii takmer polovicu západného krídla pevnosti. Môžete sa tam prechádzať, študovať, čítať si v knižnici, hodovať,... no mimo dané územie nesmiete. Je kvalitne strážené. A navyše sa musíte každý večer zúčastniť večere, to je taká malá kontrola, či ste sa náhodou nepokúsili o ÚNIK.

Z rečí tých, ktorí Vám nosia večeru, už šípite, že uniknúť sa predsa len dá. Už sa to kedysi niekomu podarilo. Vraj to bol nejaký mních Valentín, alebo tak nejako. Naďabil na štyri brány vedúce do tajných chodieb. Tri chodby beznádejne nedokončené, dlhé na dva a tri dni behu, avšak so slepým koncom. A jedna chodba vedúca na slobodu.

Obrázok 1: ukážka hry z prezentácie v MS Powerpoint

Následne dostali skupiny zadania úloh na papieri. Ako prvé riešili sadu 6 úloh, po ich vyriešení a kontrole dostali na papieri pokračovanie príbehu a sadu ďalších 6 úloh. Po vyriešení a kontrole druhej sady úloh dostali účastníci poslednú časť príbehu, pomôcku na vyriešenie záverečného hlavolamu a miesto na uvedenie riešenia (obrázok 2).

Podarilo sa Vám vyriešiť všetkých dvanásť úloh. Ako by mohli súvisieť s mriežkou z dvanástimi šípkami? Pokúsite sa to zistiť a mriežku vyplniť.



Takže máte vyplnenú mriežku. Knižku ste použili a nezdá sa, že by v tých textoch bolo ešte potrebné niečo hľadať. Riešili ste dosť. Cítite že ste blízko. A čo tie štyri čísla na konci knižky? Prvé z nich je 98765. Čo sa stane, ak tie cifry zaradom spojíte v mriežke?

A čo ďalej? Druhé číslo je 345. Spojíte tie cifry.

Tretie je 24682.

A posledné štvrté, ktoré potrebujete, je 7891543.

Tieto štyri spojenia už jasne odhalia, ktorou bránou sa treba vybrať.

Čo vám vyšlo?

Obrázok 2: posledné zadanie hry a záverečný hlavolam

Toto riešenie sme účastníkom opäť skontrolovali. Po vyriešení tejto formy únikovej miestnosti mali účastníci pracovnej dielne priestor na oboznámenie sa s digitálnou verziou hry vo formáte Google Forms (https://www.comae.sk/valentin.html, obrázok 3).

Obrázok 3: ukážka hry v rámci Google Forms

Tiež tu vznikla príležitosť diskutovať o jednotlivých úlohách a možnosti ich zaradenia do školského vyučovania matematiky vzhľadom na obsah učiva v jednotlivých ročníkoch.

Záver

V príspevku sme predstavili konkrétnu VUM s dvanástimi úlohami. Ich výsledky boli využité v následnom hlavolame, ktorého vyriešenie viedlo k úspešnému zavŕšeniu hry. Počas pracovnej dielne sa učitelia aktívne zapojili svojimi postrehmi a návrhmi k realizácii podobných VUM v nedigitálnej aj digitálnej forme. Veríme, že naša pracovná dielňa poskytla účastníkom inšpiráciu na používanie a prípadnú tvorbu vzdelávacích únikových hier pre vyučovanie matematiky.

Grantová podpora

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024: *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*.

LITERATÚRA

[1] Fotaris, P., Mastoras, T.: Escape rooms for learning: A systematic review, Proceedings of the 13th European Conference on Games Based Learning, 2019, https://doi.org/10.34190/GBL.19.179

[2] Miťková, E., & Vankúš, P. (2025). Vďaka, Valentín! https://www.comae.sk/valentin.html

[3] Nicholson, S.: Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities, 2015, White Paper available at http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

[4] Taraldsen, L.H., Haara, F.O., Lysne, M.S., Jensen, P.R., Jenssen, E.S.: A review on use of escape rooms in education – Touching the void, Education Inquiry, 2022, https://doi.org/10.1080/20004508.2020.1860284

[5] Videnovik, M., Vold, T., Dimova, G., Kiønig, L. V., & Trajkovik, V. (2022). Migration of an escape room-style educational game to an online environment: Design thinking methodology. *JMIR Serious Games, 10*(3), e32095. https://doi.org/10.2196/32095

Mgr. Emília Miťková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

doc. PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

CHYBY A NEDOSTATKY ŠTUDENTOV PRVÉHO ROČNÍKA PRI PRÁCI S ALGEBRAICKÝMI VÝRAZMI

KRISTÍNA OVARY BULKOVÁ, IVETA ILAVSKÁ

ABSTRAKT. *Test zameraný na úpravu výrazov bol prvý krát realizovaný v 2020 pre identifikáciu chýb študentov pri nástupe na univerzitu. Od roku 2022 sa realizuje pravidelne v úvode predmetu Matematika 1. Príspevok predstaví výsledky, typické riešenia a zistenia z dotazníka o vyučovaní matematiky na strednej škole.“*

Prechod zo strednej školy na univerzitu môže byť náročný z viacerých dôvodov. Študenti sa stretávajú s odlišným prístupom vo vzdelávaní, novými povinnosťami a vyššími nárokmi zo strany učiteľov. Často existuje nezrovnalosť medzi očakávaniami strednej školy a univerzity [1]. Navyše, študenti prichádzajú z rôznych typov škôl, či už gymnázií alebo stredných odborných škôl.

V škole je chyba často vnímaná ako nežiaduci jav, niečo, čomu sa treba vyhnúť, a čomu sa obávajú učiteľ aj žiak. Takéto chápanie však môže byť demotivujúce. V odbornej literatúre existuje niekoľko štúdií o využití analýzy chýb v matematike. Loibl a Rummel [2] zistili, že žiaci stredných škôl si viac uvedomovali medzery vo vedomostiach pri analýze úloh s chybami. Porovnanie nesprávne riešených úloh so správne vyriešenými úlohami pomáhalo tieto medzery zapĺňať.

Cieľom príspevku je ukázať vývoj výsledkov študentov v priebehu rokov a ich postoje a skúsenosti s matematikou zo strednej školy. Zamerali sme sa na porovnanie výsledkov vstupného diagnostického testu obsahujúceho 20 algebraických výrazov u prvákov ekonomicky orientovaných študijných programoch na Žilinskej univerzite v Žiline. Diagnostický test slúži predovšetkým na identifikáciu a analýzu prípadnej straty vedomostí v porovnaní so základnými konceptmi, zručnosťami a vedomosťami študentov z predchádzajúcich rokov [3]. V poslednom testovanom roku 2024 študenti vyplnili aj dotazník zisťujúci ich názor, postoj a skúsenosti s matematikou a jej výučbou na strednej škole.

Chyby v matematike

U vysokoškolských študentov sa v matematike často opakujú chyby, ktoré boli na základe predchádzajúcich zistení [4] rozdelené do nasledujúcich kategórií označovaných ako „chronicky sa opakujúce“ chyby:

1. **Chyby z nepozornosti:** rozširovanie zátvoriek, roznásobenie zátvoriek, vynásobenie iba časti zátvoriek, chyba v znamienkach, nesprávne vynímanie pred zátvorku, nesprávne poradie pri vykonávaných operáciách.
2. **Chyby pri úpravách výrazov s mocninami:** nesprávne operácie pri úprave exponentov (sčítanie exponentov namiesto ich násobenia a pod.), nesprávny prepis exponentov (ak sa jedná o záporné alebo racionálne číslo).
3. **Nesprávne používanie vzorcov** $(\boldsymbol{a} \mp \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{a^2 - b^2}$: formálne vnímanie oboch vzorcov vedie k nesprávnemu rozkladu na súčin alebo k nesprávnym úpravám v rámci rozsiahlejších algebraických výrazov, chýbam pri určovaní koreňov kvadratickej rovnice.
4. **Nesprávna úprava zložených výrazov s mocninami:** Chyby spôsobené nedostatočnou praxou v úprave výrazov a prevládaním formálneho, mechanicky naučeného, postupu.

5. **Neopodstatnené zovšeobecňovanie (tzv.** „hrubý formalizmus“): formálne zovšeobecnenie aditívnych vlastností aj na výrazy, ktoré túto vlastnosť nemajú. Vzorec alebo zápis môže v jednom kontexte fungovať správne, ale niektorí študenti sa ho snažia aplikovať v širšom kontexte.
6. Ostatné chyby, kvôli nedostatočným znalostiam a porozumeniu matematickej teórie.

Vstupný diagnostický test

V roku 2020 vytvorený diagnostický test na mapovanie vedomostí študentov prvého ročníka pre prácu a úpravu algebraických výrazov. Test obsahoval 20 algebraických rovníc, pri ktorých mali študenti rozhodnúť o ich správnosti. Ak bola rovnica nesprávna mali zapísať správnu verziu rovnice. Zo všetkých rovníc boli len štyri správne (v tabuľke 1 označené zelenou farbou).

1	$4(2-5x)=8-20x$	
2	$-7x.(2x-4)=-14x^2-28x$	1
3	$x^5.x^{-5}=0$	2
4	$x+5x=6x^2$	5
5	$4x^2.10x^3=40x^5$	
6	$\frac{25y^3}{5y^{-3}}=5y^{-6}$	2
7	$(2x^4y^3)^5=32x^9y^8$	2
8	$(3+x)^2=9+x^2$	3
9	$\sqrt{(4+x^4)}=2+x^2$	5
10	$\sqrt{36x^9}=6x^3$	2
11	$-4^2=16$	1
12	$\sqrt{11x^6}=11x^3$	2
13	$\frac{1}{7x}=7x^{-1}$	2
14	$\frac{3}{2x^5}=\frac{3}{2}x^{-5}$	
15	$3\cdot(4x-5)^2=(12x-15)^2$	1,3
16	$\frac{1}{2}.(x+5)^{\frac{1}{2}}=x+5$	2,5
17	$\frac{4}{(x-5)^{-3}}=4(x-5)^3$	
18	$\frac{5x^4-x}{x}=5x^4-1$	4
19	$\frac{(2x+3)\cdot(x+2)-(x^2+1)}{(x+2)}=(2x+3)-(x^2+1)$	4
20	$x.e^x+5e^x-2e^{2x}=e^x(x+5-2e^2)$	1

Tabuľka 1: Vstupný diagnostický test pre študentov prvého ročníka s priradeným kódom očakávanej chyby.

Diagnostický test bol každoročne podávaný študentom prvého ročníka ekonomických a dopravných študijných programov na Žilinskej univerzite. Test sa realizoval na začiatku prvého semestra, typicky na konci septembra v rokoch 2020, 2022, 2023 a 2024. Vzhľadom na komplikovanú situáciu počas pandemických opatrení sa v roku 2021 nepodarilo študentov do testu zapojiť.

Výsledky jednotlivých ročníkov ukazujú, že zatiaľ čo študenti v roku 2020 vyriešili 6 úloh z 20 s úspešnosťou medzi 60 – 100% a 4 úlohy s menej ako 20% úspešnosťou, v roku 2024 to boli len dve úlohy s úspešnosťou medzi 60 - 100% a až 12 úloh s úspešnosťou menej ako 20% (Tabuľka 2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2020	100	90,6	60,4	75,8	93	25,2	44,5	9,1	11	35,2	25,4	20,3	52	61,2	25,3	48,1	30	11,3	15	20,2
2022	100	80,6	52,4	73,8	92,2	32	34	31,1	4,9	4,85	27,2	20,4	10,7	47,6	26,2	22,3	45,6	32	9,71	16,5
2023	100	79,4	34,3	67,7	93,1	28,4	26,5	34,3	5,9	10,8	40,2	36,3	7,84	60,8	13,7	26,5	71,6	27,5	11,8	14,7
2024	99	64,7	17,7	59,8	79,4	18,6	13,7	16,7	9,8	5,88	24,5	12,8	11,8	47,1	6,86	3,92	52	10,8	4,9	2,94

Tabuľka 2: Úspešnosť riešenia vstupného diagnostického testu v %.

Najvýraznejší pokles možno pozorovať v úlohách zameraných na prácu s mocninami a odmocninami, kde študenti často chybovali v základných pravidlách pre operácie s exponentmi (napr. nesprávne sčítanie namiesto násobenia exponentov či nesprávny prepis pri záporných mocninách). Veľmi slabé výsledky sa opakovane objavovali aj v úlohách vyžadujúcich správne používanie vzorcov. Teda, medzi najčastejšie opakujúce sa problémy sa vyskytujú v oblastiach operácií s exponentmi (v úlohách 3,6,7,10,12,13 a 16) a používanie vzorcov (8,9,15,16). Kým chyby z nepozornosti (nesprávne znamienka, rozširovanie zátvoriek) sa vyskytovali menej často a ich frekvencia sa výrazne nemenila, dominantnými sa stali chyby súvisiace s mechanickým aplikovaním pravidiel a neopodstatneným zovšeobecňovaním postupov.

Dotazníkový prieskum

V roku 2024 sme študentov, ktorí sa zapojili do vstupného testovania oslovili pre vyplnenie dotazníka, pričom zo 102 študentov sa zapojilo 98 študentov. Zo získaných odpovedí 20,4% respondentov označilo, že navštevovali gymnázium, 24,5% boli študenti obchodnej akadémie, 5,1% absolventi hotelovej akadémie, 24,5% študentov uviedlo strednú odbornú školu s ekonomickým zameraním a 24,5% študentov zas odbornú školu s iným ako ekonomickým zameraním. Maturitu z matematiky pritom absolvovalo len 13,26% respondentov. Následne sme sa v otvorenej otázke pýtali, aby vyjadrili dôvod, prečo maturitu z matematiky absolvovali, resp. neabsolvovali v 86,74% prípadoch. Najčastejším dôvodom (28,24%), ktorí respondenti uviedli ako dôvod, prečo neabsolvovali maturitu z matematiky, možno zaradiť do kategórie „*Neurobil by som to, matematiku neovládam, som v nej slabý.*“. Ďalšie dôvody boli „*Nedostatočná príprava zo strany školy*.“ pre 12,94% respondentov, „*Nepotreboval(a) som to na vysokú školu, nebolo to povinné*.“ pre 11,76% respondentov a „*Maturoval(a) som radšej z iných predmetov*.“ tiež pre 11,76% respondentov.

Na druhej strane účastníci svoj výkon v matematike na strednej škole hodnotili prevažne pozitívne v otázke s výberom odpovede, v ktorej posudzovali svoje štúdium a úspešnosť v matematike počas stredoškolského vzdelávania (Tabuľka 3).

8	Matematike som rozumel(a) ...	... a nemal(a) som problémy porozumieť učivu počas vyučovania.
39		... s niektorými témami som mal(a) problém. Vedel/a som sa témy doučiť samostatne.

11		... s témami, ktorými som mal(a) problém mi pomáhal spolužiak, člen rodiny alebo som chodil na doučovanie.
0		... ale chodil(a) som pravidelne na doučovanie.
16	Mal(a) som problém porozumieť matematike,...	... ale keď vedel(a) som sa to sám(sama) doučiť doma.
7		... preto som v prípade potreby chodil(a) na doučovanie (prípadne mi s matematikou pomáhal kamarát(ka), člen rodiny a pod.)
2		... doučovania mi pomohli ju absolvovať.
15		... nejakým spôsobom som ju absolvoval(a). Nejavil(a) som záujem sa v nej zlepšiť, len tým nejako prejsť.

Tabuľka 3: Odpovede respondentov na otázku s výberom jednej odpovede: „Ako sa Vám darilo v matematike na strednej škole?“.

Záver

Diagnostický test bol zameraný na odhalenie typických chýb študentov pri práci s algebraickými výrazmi. Vzhľadom na to, že obsahoval iba štyri správne rovnosti z dvadsiatich, šlo predovšetkým o overenie schopnosti rozpoznať nesprávne algebraické úpravy, následne identifikovať a opraviť chyby.

Porovnanie výsledkov vstupného testovania v rokoch 2020, 2022, 2023 a 2024 ukazuje postupný pokles úspešnosti študentov v matematických vedomostiach. Tento vývoj naznačuje zhoršovanie úrovne matematickej pripravenosti prichádzajúcich študentov. Výsledky signalizujú, že prichádzajúci študenti majú čoraz slabšiu istotu v elementárnych algebraických úpravách a algebraické vzťahy vnímajú skôr ako formálne predpisy než ako logicky zdôvodnené pravidlá.

Napriek tomu však respondenti hodnotili svoje stredoškolské výkony v matematike prevažne pozitívne. Väčšina z nich uviedla, že rozumela preberanému učivu a v prípade ťažkostí sa dokázala doučiť samostatne alebo s pomocou iných.

Treba však zdôrazniť, že získané výsledky je potrebné interpretovať s ohľadom na limity realizovaného zisťovania. Test bol zameraný výlučne na algebraické úlohy, a preto neposkytuje komplexný obraz o matematických kompetenciách študentov v oblastiach, ako sú geometria, štatistika či pravdepodobnosť. Zároveň zisťoval len úroveň vedomostí, nie príčiny ich nedostatočného zvládnutia alebo faktory, ktoré k tomu mohli prispieť. Rovnako vzorka respondentov bola relatívne malá a nepredstavuje celú populáciu študentov prvého ročníka vysokých škôl, čo obmedzuje možnosti zovšeobecnenia zistení.

LITERATÚRA

[1] Lane, T.B., Morgan, K., Lopez, M.M.: *A Bridge Between High School and College": A Case Study of a STEM Intervention Program Enhancing College Readiness Among Underserved Students.* Journal of College Student Retention: Research, Theory & Practice, 2020. https://doi.org/10.1177/1521025117729824

[2] Loibl, K, Rummel, N.: *Knowing what you don´t know makes failure productive*. 2014. Learn.Instr. 34, 74 – 85.

[3] Tashtoush, M. A., Wardat, Y., Elsayed, A.M.: *Mathematics Distance Learning and Learning Loss During COVID-19 Pandemic: Teachers' Perspectives*. Journal of

Higher Education Theory and Practice, 2023. https://doi.org/10.33423/jhetp.v23i5.5933

[4] Kontrová, L., Gazdíková, J., Ilavská, I.: *Finding and Fixing Errors in Mathematical Examples: Can this Foster Math Learning Outcomes?* Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences 2023: post-conference proceedings of extended versions of selected papers.

PaedDr. Kristína Ovary Bulková, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215
SK – 010 26 Žilina
e-mail: kristina.ovary_bulkova@uniza.sk

RNDr. Iveta Ilavská, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215
SK – 010 26 Žilina
e-mail: iveta.ilavska@uniza.sk

VÝUČBA STEREOMETRIE POMOCOU 3D PERA

BARBORA POKORNÁ

ABSTRAKT. *Príspevok prezentuje výsledky výskumu poukazujúceho na významné prínosy využívania 3D pier vo vyučovaní stereometrie. Zároveň predstavuje novovytvorené učebné materiály určené na prácu s 3D perom v triede. Účastníci pracovnej dielne sa oboznámili s didaktickými výhodami použitia 3D pera pri vyučovaní rovinných rezov kocky a v rámci praktickej aktivity si podľa pripravených šablón sami vytvorili vlastné trojrozmerné modely.*

Úvod

Koncepcia konštrukcionizmu (Papert [1]) hovorí, že poznanie sa vytvára prostredníctvom aktívneho kontaktu človeka s materiálnym svetom. Učenie „learning-by-making“ teda znamená, že žiaci si počas tvorivej činnosti nielen rozvíjajú nové vedomosti, ale zároveň vytvárajú hmatateľné objekty, ktoré môžu zdieľať s ostatnými. Psychologické výskumy poukazujú na to, že taktilno-kinestetické metódy učenia sú pre žiakov mimoriadne účinné. Učenie je obzvlášť efektívne, keď zahŕňa pozorovanie, meranie a manipuláciu s fyzickými objektmi – prístup označovaný ako „vtelené poznávanie“, tzv. embodied learning (Hall and Nemirovsky [2]). Napriek tomu súčasná školská prax často poskytuje len málo príležitostí na takéto aktivity.

Štúdium vlastností trojrozmerných objektov a ich vzájomných vzťahov často prebieha až po premietnutí do roviny, teda na ich dvojrozmerných obrazoch. Pre niektorých žiakov však takéto dvojrozmerné obrazy nevyvolávajú adekvátny mentálny model zodpovedajúceho trojrozmerného objektu. Rastúca dostupnosť 3D tlačových technológií, ako sú 3D tlač alebo 3D perá, prináša nové príležitosti vo vyučovaní trojrozmernej geometrie a môže napomôcť tejto skupine žiakov zdokonaliť vnímanie 3D objektov.

Tieto technológie poskytujú priamejšiu interakciu s matematickými konceptmi a vytvárajú viac príležitostí na aktívnu konštrukciu poznatkov. Štúdia (Ng and Ye [3]) poukazuje na veľký potenciál 3D tlače v matematickom vzdelávaní, pretože umožňuje žiakom vlastnoručne vytvárať modely v trojrozmernom priestore, namiesto používania hotových pomôcok vytvorených učiteľom. Zverejnené výsledky naznačujú, že využívanie takýchto nástrojov zlepšuje žiakom konceptuálne porozumenie a dlhodobé zapamätanie poznatkov v oblasti priestorovej geometrie.

Výskum (Ng and Sinclair [4]) sa zameriava na úlohu gest a diagramov pri matematickom myslení a učení. Autori tvrdia, že kreslenie je úzko späté s pohybom ruky, ktorý má komunikačnú aj poznávaciu funkciu. 3D pero tento vzťah ešte prehlbuje, pretože umožňuje „kresliť vo vzduchu“ a premieňať gestá na trojrozmerné objekty, pričom ruka a myšlienkový proces postupujú súčasne. Vytvorené plastické útvary možno chytiť, otáčať a skúmať, čo presahuje možnosti papiera aj obrazovky.

3D pero

Nástroj 3D pero je ručné zariadenie pripomínajúce väčšie plniace pero, ktoré netlačí atrament, ale vytláča roztavený plast (filament), ktorý na vzduchu rýchlo tuhne (obr. 1). Umožňuje kresliť dvoj- aj trojrozmerné objekty priamo na podložku alebo „do vzduchu“. Nápad vznikol okolo rokov 2012–2013 ako praktická odpoveď na opravu chýb 3D tlače a rýchlo sa rozšíril medzi učiteľmi, dizajnérmi či architektmi.

Perá sa najčastejšie napájajú cez USB a ovládajú sa tlačidlami. Pokročilejšie modely majú LCD displej, na ktorom zobrazujú teplotu hrotu, plynulú reguláciu teploty a rýchlosti posuvu filamentu. Kľúčový parameter je maximálna teplota hrotu – určuje kompatibilitu s filamentmi. Dôležité parametre, ktoré treba zvážiť pri kúpe, sú aj rýchlosť extrúzie, stabilita výtlačku, ergonomický tvar, spoľahlivosť (neupchávanie trysky), dĺžka kábla, výmenné hroty či pripojenie k smartfónu. Pripojenie 3D pera k smartfónu prostredníctvom Bluetooth umožňuje využívať rôzne aplikácie, ktoré poskytujú hotové šablóny, návody a interaktívne postupy.

Obrázok 1: Princíp fungovania 3D pera vychádza z podobného mechanizmu ako pri tavnej pištoli. Ako náplň sa používajú farebné plastové filamenty rôzneho zloženia. V súčasnosti je na trhu dostupných viacero značiek v rôznych cenových a funkčných kategóriách. Zdroj: [8], [9].

Filamenty a ich vlastnosti

Filament je plastová struna, ktorá slúži ako náplň pre 3D pero (obr. 1). Pri jeho výbere je dôležité zohľadniť nielen farbu či hrúbku, ale najmä vlastnosti materiálu, z ktorého je vyrobený, a jeho teplotu tavenia. V domácom alebo školskom prostredí sa najčastejšie používajú dva typy filamentov – PLA a ABS. Každý z nich má špecifické výhody aj obmedzenia, ktoré ovplyvňujú spôsob práce s 3D perom aj výslednú kvalitu modelu.

PLA (kyselina polymliečna) je materiál vyrábaný z obnoviteľných prírodných zdrojov, najčastejšie z kukuričného alebo zemiakového škrobu. Je biologicky rozložiteľný a pri zahrievaní neuvoľňuje nepríjemné pachy, čo z neho robí bezpečnejší a príjemnejší materiál pre použitie v školách, najmä pri práci s deťmi. PLA sa topí pri nižšej teplote (približne 180–220 °C), takže 3D pero určené pre tento filament nemusí dosahovať extrémne vysoké teploty. Vytvára pevné, ale menej pružné modely, ktoré sa môžu pri nadmernom ohýbaní lámať. Tento materiál je vhodný pre tvorbu dekoračných objektov, jednoduchých modelov, geometrických tvarov alebo didaktických pomôcok, ktoré sa nebudú výrazne mechanicky zaťažovať. Veľkou výhodou PLA je aj široká ponuka farieb.

ABS (akrylonitril-butadién-styrén) je pevnejší a odolnejší materiál, ktorý je používaný aj v priemyselnej výrobe, napríklad pri výrobe LEGO kociek. Modely vytvorené z ABS sú tvrdé, menej krehké a lepšie odolávajú nárazom či vyšším teplotám než modely z PLA. Jeho tavenie však vyžaduje vyššiu teplotu (približne 210–250 °C), čo znamená, že nie každé 3D

pero je pre tento materiál vhodné. Pri práci s ABS vzniká výrazný zápach a uvoľňujú sa výpary, preto je potrebné zabezpečiť dobré vetranie alebo pracovať v priestore s odsávaním vzduchu. ABS je vhodný na tvorbu modelov, kde je dôležitá vyššia mechanická odolnosť, napríklad pri tvorbe funkčných súčiastok alebo modelov vystavených častej manipulácii.

Pri voľbe medzi PLA a ABS je vhodné zvážiť vek a skúsenosti používateľa, bezpečnostné podmienky a účel vytváraného objektu. Do školského prostredia a na prvé pokusy je najvhodnejšie PLA, zatiaľ čo ABS ocenia pokročilejší používatelia pri výrobe odolnejších modelov.

Využitie 3D pera vo vzdelávaní

3D pero prináša do vyučovania nové spôsoby tvorby a objavovania poznatkov vo viacerých predmetoch. V hodinách fyziky môžu žiaci vlastnoručne zostavovať modely jednoduchých obvodov alebo zariadení, čo im pomáha lepšie pochopiť ich fungovanie. V chémii umožňuje prehľadne znázorniť molekuly a väzby medzi atómami a v biológii zas vytvoriť modely buniek či orgánov, ktoré sa dajú chytiť do ruky a skúmať. Tvorba reliéfu alebo terénnych modelov na hodinách geografie pomáha žiakom pochopiť, ako sa vytvárajú mapy. Pri technickej výchove alebo inžinierskych aktivitách si žiaci môžu navrhovať a testovať jednoduché prototypy. Vďaka týmto možnostiam sa 3D pero stáva všestrannou pomôckou, ktorá podporuje tvorivosť, priestorovú predstavivosť a zapája do učenia viac zmyslov, čím robí výučbu atraktívnejšou a núti žiakov aktívne sa zapájať do vyučovania.

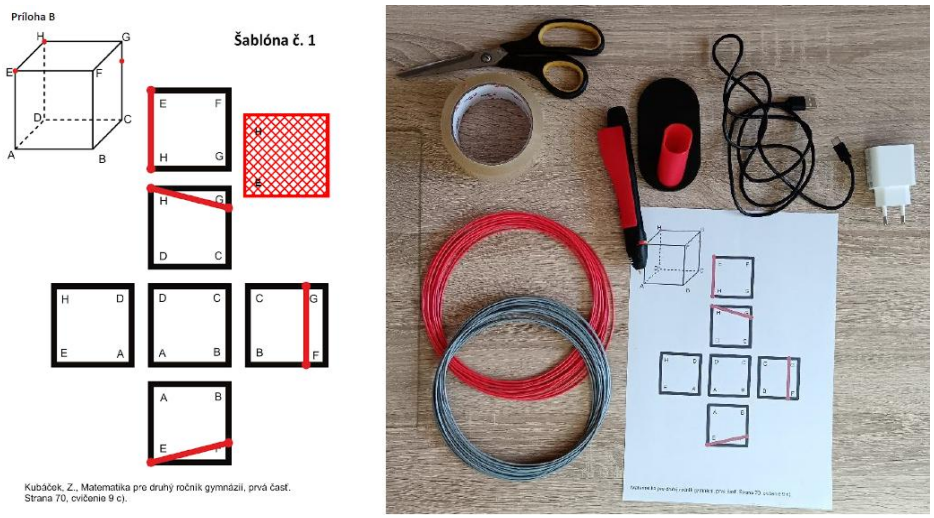
Pracovná dielňa zameraná na výrobu modelov znázorňujúcich rovinné rezy kocky

Pri príprave pracovnej dielne sme vychádzali zo záverečnej práce Redechová [6], ktorej školiteľkou bola autorka príspevku. Práca sa zameriava na inováciu didaktických postupov vo vyučovaní rovinných rezov kocky, ktoré patria k témam, pri ktorých žiaci často zažívajú ťažkosti spojené s predstavou vzájomnej polohy kocky a rezovej roviny. Štandardná výučba sa opiera o rovinné priemety, avšak nie všetci žiaci dokážu z dvojrozmerného náčrtu odvodiť skutočnú priestorovú štruktúru telesa. Práve preto sme vytvorili súbor konštrukčných úloh, ktoré zahŕňajú všetkých šesť základných typov rovinných rezov kocky, pričom sme vychádzali z úloh bežne uvádzaných v aktuálnych učebniciach matematiky pre stredné školy. K týmto úlohám boli vypracované šablóny, pomocou ktorých si žiaci môžu vytvoriť trojrozmerné modely kocky s rezovou rovinou pomocou 3D pera. Fyzická manipulácia s modelom umožňuje žiakom otáčať teleso a porovnávať perspektívy, čo zásadne uľahčuje pochopenie toho, že priamky, ktoré sa v rovine zdajú byť rôznobežkami, sa v priestore nemusia pretnúť, ale môžu byť mimobežkami. Súčasťou práce bol aj metodický návod s postupmi a odporúčaniami pre učiteľov, ako modely efektívne začleniť do vyučovania. V rámci pracovnej dielne si učitelia mohli tieto šablóny aj tvorbu modelov prakticky vyskúšať, čo im poskytlo možnosť reflektovať didaktický potenciál 3D pera priamo prostredníctvom vlastnej skúsenosti.

Účastníkom sme najprv stručne predstavili didaktické východiská a ciele aktivity, pričom sme zdôraznili význam fyzickej manipulácie a priestorovej vizualizácie pri vyučovaní stereometrie. Následne sme im ukázali jednotlivé typy rovinných rezov kocky a krok za krokom sme demonštrovali, ako sa s použitím pripravených šablón tvorí priestorový model. Po úvodnej ukážke pracovali účastníci samostatne alebo v dvojiciach. Počas práce mali možnosť konzultovať postup, pýtať sa, porovnávať medzivýsledky a diskutovať o vhodných stratégiách vedenia žiakov.

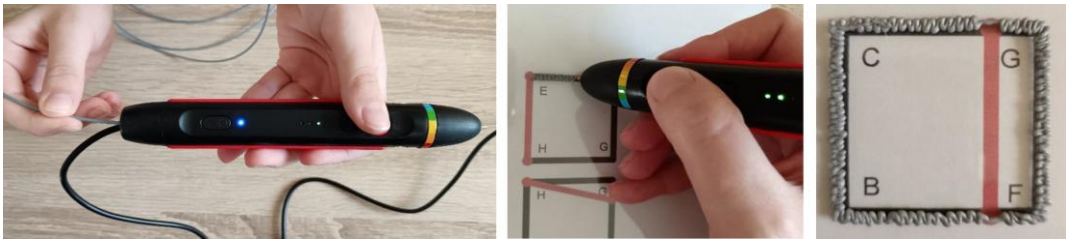
Postup tvorby modelu

Účastníci dostali vopred zalaminovanú šablónu, ktorá slúžila ako pevná podložka pre obťahovanie čiar, a z ktorej sa model po vychladnutí dal ľahko odlepiť (obr. 2). Mohli si vybrať zo šiestich typov šablón podľa toho, aký mnohouholník chceli dostať ako výsledný rez. Účastníci si šablónu uložili na pracovný stôl tak, aby mali dobrý prístup ku všetkým častiam vzoru. Pre lepšiu stabilizáciu bolo možné šablónu prichytiť o stôl lepiacou páskou.



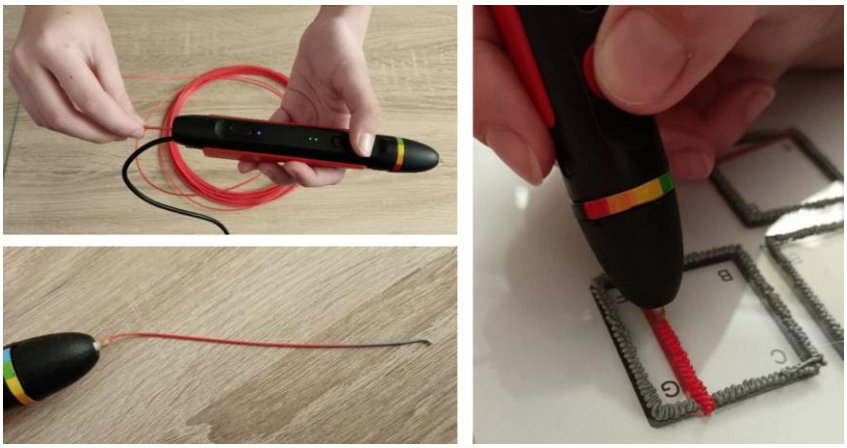
Obrázok 2: Ukážka šablóny na tvorbu modelu znázorňujúceho rovinný rez kocky (vpravo). Naľavo sú zobrazené pracovné pomôcky potrebné pri konštrukcii modelu. Zdroj: [6], str. 63.

Šablóna obsahuje plášť kocky spolu s naznačenými hranami rezu a mnohouholník, ktorý vznikne ako rez zvolenou rovinou. Účastníci si vybrali PLA filamenty dvoch rôznych farieb z ponúkanej palety – jednu farbu na model kocky (napr. sivú), druhú na zvýraznenie samotného rezu (napr. červenú). Tento farebný kontrast zohráva dôležitú úlohu pri následnej interpretácii modelu, keďže žiakom aj učiteľom umožňuje okamžite identifikovať tvar rezu v rámci celej kocky. Po zahriatí pera na potrebnú teplotu zasunuli do horného otvoru pera sivý filament a pridržiavali ho, kým si ho pero samo nezačalo vťahovať dovnútra (obr. 3, vľavo). Rýchlosť posuvu filamentu sme odporúčali nastaviť na najnižší stupeň, aby bola práca presná a stabilná. Účastníci začali obťahovať všetky hrany kocky jemným vlnovkovým pohybom, ktorý zabezpečil vyššiu pevnosť a stabilitu modelu (obr. 3, vpravo).



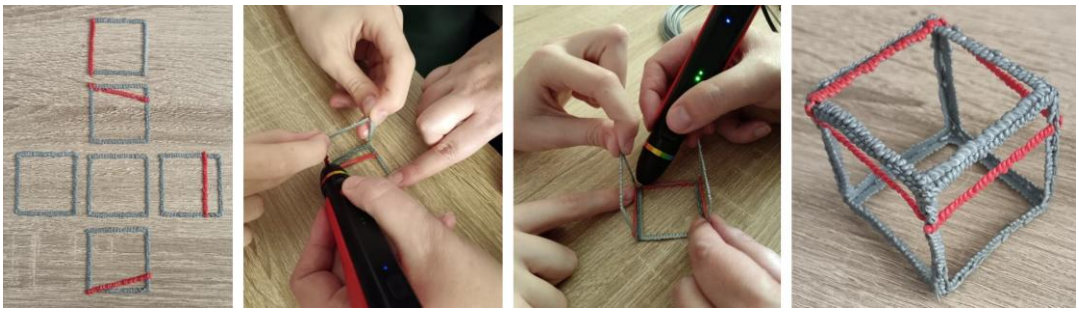
Obrázok 3: Filament sa vkladá do 3D pera v hornej časti zariadenia. Pri tvorbe hrán kocky je vhodné viesť ťah pera mierne vlnovkovým pohybom, čím sa zabezpečí vyššia pevnosť a stabilita výsledného modelu. Zdroj: [6], str. 65, 66.

Po dokončení konštrukcie hrán bolo potrebné spustiť spätný chod pera, aby sa mohol sivý filament opatrne vytiahnuť von. Pre opätovné použitie filamentu je potrebné odstrihnúť roztavený koniec nožnicami, pretože do 3D pera môžeme vkladať filament len s rovným zastrihnutým koncom. Následne bolo potrebné obtiahnuť hrany rezu, ktoré sú na šablónach znázornené červenou farbou. Účastníci zasunuli do pera červený filament. Spočiatku z hrotu ešte vytekala sivá farba, ktorá zostala v tele 3D pera (obr. 4). Túto časť filamentu bolo potrebné nechať odtiecť na okraji šablóny, až kým sa vytekajúci plast nestabilizoval na červenú. Následne červeným filamentom obkreslili hrany rovinného rezu. Tento krok často viedol k diskusii o tvare a polohe rezu, keďže práve farebné zvýraznenie umožnilo jasne identifikovať vzniknutý mnohouholník (obr. 4).



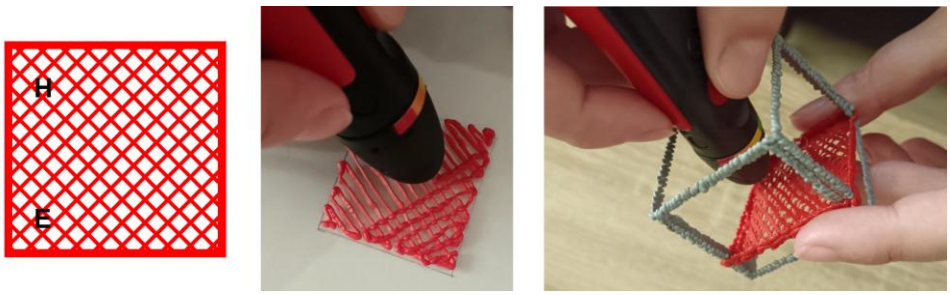
Obrázok 4: Pri zmene farby filamentu je potrebné najskôr nechať odtiecť zvyšky pôvodného materiálu, aby sa zabránilo miešaniu farieb. Hrany rovinného rezu sú zvýraznené odlišnou farbou ako hrany kocky, čím sa zlepšuje názornosť a čitateľnosť modelu. Zdroj: [6], str. 67.

Po vychladnutí plastu účastníci jednotlivé diely jemne odlúpili od šablóny (obr. 5). Následne začali steny kocky spájať pomocou hrotu 3D pera, podobne ako pri práci s tavnou pištoľou. Pri skladaní bolo dôležité zachovať pravé uhly medzi stenami. Na ich dosiahnutie účastníci často využili hranu alebo roh pracovného stola, o ktorý si jednotlivé steny dočasne opreli. Spojenia vytvárali najskôr v rohoch a až potom pozdĺž dlhších styčných hrán. Tým postupne vznikol kompletný priestorový model kocky s vyznačeným rezom (obr. 5).



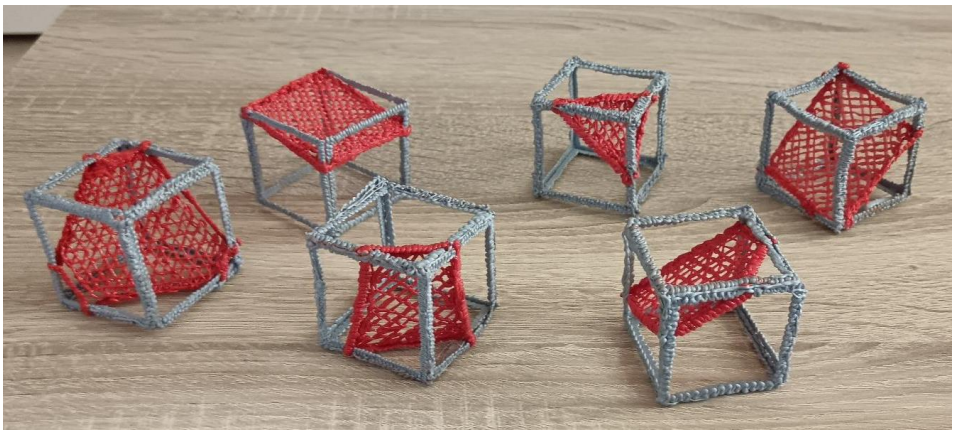
Obrázok 5: Po vychladnutí odoberieme jednotlivé steny kocky z pracovnej podložky a následne ich postupne spojíme do výsledného priestorového modelu. Zdroj: [6], str. 67, 68.

Po zhotovení priestorovej kostry kocky účastníci vytvárali plochu samotného rovinného rezu, aby bol výsledný model kompletne názorný. Najprv si podľa šablóny obkreslili mnohouholník reprezentujúci rovinný rez (obr. 6, vľavo). Tento tvar tvorili tenkou, jemne šrafovanou (vlnovkovou) linkou, aby mal model dostatočnú pevnosť, no zároveň zostal ľahký a presný. Keď plocha rezu stuhla, účastníci ju umiestnili dovnútra kocky – bolo potrebné venovať pozornosť správnej orientácii v priestore, aby jednotlivé strany mnohouholníka zodpovedali úsečkám, ktoré predstavujú rez v jednotlivých stenách kocky (obr. 6, vpravo). Po kontrole orientácie sa plocha rezu pritavila k hranám rezu (ktoré boli predtým zvýraznené kontrastnou farbou filamentu). Pritavenie prebiehalo postupne po obvode mnohouholníka tak, aby plocha plynulo dosadla na všetky vyznačené hrany a nevznikali medzery. Výsledkom bol uzatvorený, prehľadný model kocky so znázorneným rovinným rezom, ktorý umožňoval uchopenie, otáčanie a vizuálnu analýzu rezu z rôznych uhlov pohľadu.



Obrázok 6: Vľavo je zobrazená podoba rovinného rezu kocky na šablóne. Rez najskôr obťahujeme ťahmi pera so šrafovaním (v strede) a následne hotový diel vložíme do priestorového modelu kocky (vpravo). Pri vkladaní je potrebné dbať na správnu orientáciu rezu, aby vnútro rezu presne zapadlo. Zdroj: [6], str. 68, 69.

Záver workshopu patril reflexii, kde účastníci vyjadrili veľkú spokojnosť s konkrétnosťou, názornosťou aj okamžitou prenositeľnosťou aktivity do vyučovania. Viacerí uviedli, že 3D pero vnímajú ako prístupný a motivujúci prostriedok na oživenie výučby geometrie a požiadali o zaslanie dostupných šablón.



Obrázok 7: Súbor modelov vytvorených 3D perom ilustrujúci rozmanitosť mnohouholníkov, ktoré môžu vzniknúť ako rovinné rezy kocky. Účastníci pracovnej dielne pracovali s rovnakými šablónami, aké boli použité pri tvorbe uvedených modelov. Zdroj: [6], str. 69.

Záver

Výsledky prezentované v tomto príspevku a na pracovnej dielni nadväzujú na širší súbor výskumných aktivít zameraných na integráciu 3D pera do výučby stereometrie na základných a stredných školách. Okrem práce Redechová [6], orientovanej na rovinné rezy kocky, vznikli v rámci tohto výskumného smerovania aj ďalšie záverečné práce rozvíjajúce problematiku v odlišných tematických celkoch. Piačková [5] je zameraná na podporu rozvoja priestorovej vizualizácie v úlohách analytickej geometrie využívajúcich metrické vzťahy medzi objektami, najmä pri určovaní dĺžok úsečiek a veľkostí uhlov medzi priamkami a rovinami. Vytvorené šablóny umožnili konštrukciu modelov, ktoré následne slúžili na verifikáciu výsledkov meraním pomocou papierového pravítka. Práca Trubačová [7] sa venuje výučbe voľného rovnobežného premietania u mladších žiakov. Pomocou navrhnutých šablón je možné zostaviť jednoduché telesá, ako sú kocka, kváder či ihlan, pričom vyšrafovanie plôch umožňuje jasne odlíšiť viditeľné a skryté hrany – čo pri bežne používaných papierových modeloch nie je možné. Práca zdôrazňuje význam priamej manipulácie s modelmi, keďže hmatová aj zraková skúsenosť podporuje budovanie presných mentálnych predstáv o priestorových vzťahoch. Žiaci tak dokážu lepšie porozumieť rovnobežnosti či kolmosti hrán a rovín, ako aj rozdielu medzi tým, čo vidia (útvar skreslený premietaním do roviny) a čo tvar reálne predstavuje v priestore.

Spoločným menovateľom uvedených prác je dôraz na prepojenie vizuálneho a hmatového vnímania pri výučbe priestorovej geometrie. Výskumné zistenia naznačujú, že možnosť manipulovať s trojrozmerným modelom podporuje vytváranie presnejších mentálnych reprezentácií, redukuje omyly vyplývajúce z nesprávnej interpretácie dvojrozmerných náčrtov a zvyšuje mieru aktívneho zapojenia žiakov. Do budúcnosti plánujeme rozšíriť súbor úloh na ďalšie triedy priestorových útvarov (napr. hranoly, ihlany, rotačné telesá) a dopracovať metodickú dokumentáciu tak, aby bolo možné materiály systematicky implementovať do vyučovacieho procesu. Súčasťou plánov je aj vytvorenie online platformy umožňujúcej voľný prístup k šablónam a didaktickým odporúčaniam, ako aj realizácia rozsiahlejšieho empirického zisťovania účinnosti daného prístupu v rôznych prostrediach.

Poďakovanie

Tento článok vznikol s podporou grantu KEGA 038UK-4/2024 s názvom *„Mnohovrstevný hybridný kurz elementárnej geometrie zameraný na učiteľov matematiky“*, ktorého spoluriešiteľkou je autorka článku.

LITERATÚRA

[1] Papert S., Harel I.: *Situating constructionism*, In S. Papert and I. Harel (Eds.), Constructionism (pp. 1–11). Ablex, 1991.

[2] Hall, R., Nemirovsky, R.: *Modalities of body engagement in mathematical activity and learning* [special issue]. Journal of the Learning Sciences, 21(2), 207–215, 2012.

[3] Ng, O.-L., Ye, H.: *Doing Mathematics with 3D Pens: Five Years of Research on 3D Printing Integration in Mathematics Classrooms*, in Learning Mathematics in the Context of 3D Printing, Germany: Springer Spektrum, pp.~143--162, 2022.

[4] Ng, O., Sinclair, N.: *Drawing in space: Doing mathematics with 3D pens*, In Uses of technology in primary and secondary mathematics education (pp. 301–313), Springer, 2018.

[5] Piačková, D.: *Využitie 3D pera pri výučbe metrických úloh v stereometrii na SŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2025.

[6] Redechová, V.: *Využitie 3D pera pri výučbe rovinných rezov priestorových telies na SŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2024.

[7] Trubačová, M.: *Využitie 3D pera pri výučbe zobrazovania telies vo voľnom rovnobežnom premietaní na ZŠ*, Záverečná práca, FMFI UK, Bratislava, 2024.

[8] https://aukro.sk/3d-pen-25m-filamenty-vklady-naplne-pla-mix-barev-napln-do-3d-pera-7091592660

[9] https://www.nay.sk/3d-pero-polaroid-play-pre-rucnu-tlac-3d-modelov-3d-fp-pl-2005-00

RNDr. Barbora Pokorná, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

PROJEKTOVÉ VYUČOVANIE NA HODINÁCH MATEMATIKY V KONTEXTE MEDZINÁRODNEJ SPOLUPRÁCE

MONIKA POĽANSKÁ

Abstrakt. *Príspevok je určený učiteľom, ktorí hľadajú nové inšpirácie a metodické prístupy pre svoju pedagogickú prax. Prezentuje moderné trendy vo vzdelávaní a možnosti medzinárodnej spolupráce v školách (konkrétne na hodinách matematiky). Prostredníctvom analýzy dvoch aktivít poukazuje na projektové vyučovanie ako inovatívny pedagogický prístup a na jeho potenciál rozvíjať u žiakov zručnosti 21. storočia.*

eTwinning ako platforma pre realizáciu medzinárodného projektového vyučovania

eTwinning je európska komunita škôl, učiteľov a žiakov, ktorú v marci 2005 oficiálne spustila Európska komisia. V súčasnosti združuje viac ako 1 milión členov z viac ako 40 krajín. Prostredníctvom Európskej školskej vzdelávacej platformy (European School Education Platform – ESEP) učitelia a žiaci nadväzujú partnerstvá, spolupracujú na spoločných projektoch, zdieľajú inšpirácie a zapájajú sa do rôznych aktivít profesijného rozvoja *(eTwinning, 2022)*.

eTwinning umožňuje realizovať projektové vyučovanie ako súčasť bežného vyučovania alebo formou mimoškolských aktivít. Žiaci spolupracujú s rovesníkmi z iných krajín na riešení konkrétnych úloh, učia sa plánovať si prácu, preberať zodpovednosť, rešpektovať iné názory a spolu vytvárať výstupy (Hrbáňová, 2023) . V centre projektového vyučovania stojí aktívny žiak, ktorý objavuje, skúma, diskutuje a reflektuje vlastné učenie (*Didaktika, 2025*). Úloha učiteľa sa mení – z klasického „prenášača poznatkov“ sa stáva koordinátor, facilitátor a sprievodca procesom *(Daniš, 2000).* Tento prístup podporuje rozvoj kompetencií, ktoré presahujú rámec tradičného osvojovania poznatkov: schopnosť spolupracovať, kriticky myslieť, komunikovať, riešiť problémy a používať digitálne nástroje na tvorbu a zdieľanie obsahu.

Každý projekt, ktorý je realizovaný v komunite eTwinning, má v platforme ESEP vyhradený samostatný pracovný priestor nazývaný TwinSpace. Do TwinSpace (virtuálnej triedy) majú štandardne prístup iba učitelia a žiaci z partnerských škôl. Prostredie je viacjazyčné a veľmi intuitívne, nevyžaduje pokročilé digitálne zručnosti. Vďaka možnosti spravovať práva používateľov je bezpečné – žiadne výstupy nie sú verejne dostupné bez súhlasu participujúcich učiteľov. TwinSpace slúži zároveň ako dokumentačný nástroj projektu, ktorý môže slúžiť pri hodnotení žiackej práce, ako portfólio alebo ako zdroj inšpirácie pre ďalšie ročníky (Poľanská, 2024).

Projekt Malé záhady života v edícii Funkcia

Ako príklad medzinárodného projektového vyučovania na hodinách matematiky uvádzame eTwinning projekt *Malé záhady života v edícii Funkcia*, realizovaný v školskom roku 2024/2025. Projekt mal interdisciplinárny charakter a využíval princípy STEM vzdelávania. Do spolupráce sa zapojilo 147 študentov a 6 učiteľov zo šiestich krajín (tabuľka 1). Komunikačným jazykom počas celého projektu bola angličtina.

Krajina	Počet študentov	Škola	ISCED
Slovenská republika	25	Obchodná akadémia (Stará Ľubovňa)	ISCED 3
Česká republika	27	Stredná odborná škola podnikania a logistiky (Praha)	ISCED 3
Bosna a Hercegovina	22	Richmond Park International Secondary School (Sarajevo)	ISCED 3
Chorvátsko	21	Srednja škola Ban Josip Jelačić (Zaprešić)	ISCED 3
Turecko	19	Görele Anadolu Lisesi (Görele)	ISCED 3
Španielsko	13	Instituto de Educación Secundaria (IES) Benazaire (Herrera del Duque)	ISCED 3

Tabuľka 1: Prehľad zapojených krajín v projekte „Malé záhady života v edícii Funkcia“

Kontext a východiská

Moderné vzdelávanie kladie dôraz na rozvoj kompetencií, ktoré presahujú rámec izolovaného osvojovania faktov. Najmä v predmete, akým je matematika, je potrebné vytvárať príležitosti na prepojenie učiva s reálnym životom a podporovať aktívne medzipredmetovo orientované vyučovanie. Projektové vyučovanie sa v tomto smere ukazuje ako efektívny nástroj – zvlášť ak je spojené s medzinárodnou spoluprácou a využitím digitálnych technológií Web 2.0.

Impulzom pre vznik projektu bola potreba zatraktívniť výučbu funkcií pomocou praktických a zmysluplných úloh, ktoré umožnia žiakom objavovať matematiku v kontexte každodenného života. Zároveň sme sa snažili ponúknuť žiakom medzinárodné vzdelávacie prostredie, v ktorom budú spolupracovať s rovesníkmi zo zahraničia, komunikovať v anglickom jazyku a spoločne riešiť úlohy, ktoré vedú k hlbšiemu porozumeniu pojmu funkcie a jej uplatnenia v rôznych oblastiach.

Originálny názov projektu: Life's Little Mysteries in Function Edition

Hlavný cieľ projektu: Podporiť komplexný rozvoj matematických, jazykových, digitálnych a sociálnych kompetencií žiakov prostredníctvom medzinárodného interdisciplinárneho projektového vyučovania zameraného na funkcie ako súčasť reálneho sveta.

Čiastkové ciele projektu:

- zvýšiť motiváciu pre matematiku,
- vnímať funkcie okolo nás,
- získať skúsenosti s interdisciplinárnym projektovým vzdelávaním,
- zvýšiť vedomosti a zručnosti v oblasti nástrojov Web 2.0,
- zlepšiť schopnosť používať anglický jazyk,
- rozvíjať zručnosti v oblasti spolupráce, riešenia problémov a kritického myslenia,
- zlepšiť komunikačné zručnosti a kultúrnu výmenu študentov s rovesníkmi,
- nadviazať vzťahy medzi projektovými partnermi,
- rozvíjať technologickú a matematickú gramotnosť,

- rozvíjať ďalšie zručnosti 21. storočia – kreativitu, sociálne zručnosti, vedenie, iniciatívu, flexibilitu, produktivitu.

Aktivita „Skrytý svet parabol"

(originálny názov: Hidden World of Parabolas)

Cieľ a kontext aktivity

Aktivita *Skrytý svet parabol* mala za cieľ priblížiť žiakom kvadratické funkcie v zmysluplnom a vizuálne atraktívnom kontexte. Žiaci objavovali paraboly v architektúre, technike či prírode a matematicky ich modelovali pomocou predpisov funkcií a grafov. Vzhľadom na medzinárodný charakter projektu sa aktivita stala nielen prostriedkom na upevnenie vedomostí o kvadratických funkciách, ale aj priestorom na rozvoj digitálnych kompetencií, komunikačných zručností a kultúrneho povedomia.

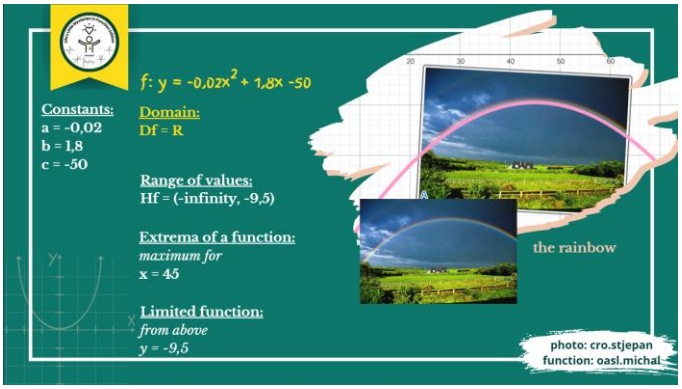
Metodické východiská

Aktivita vychádza z kurikulárnych požiadaviek na tému kvadratickej funkcie – jej graf, vlastnosti a praktické uplatnenie. Dôraz sa kládol na rozvoj matematickej gramotnosti prostredníctvom prepájania teórie s reálnymi javmi a vizuálnymi príkladmi z prostredia, ktoré žiaci sami identifikovali.

Popis aktivity

Žiaci pracovali v 4-členných tímoch, ktoré tvorili dvojice z rôznych škôl. Na začiatku dokumentovali paraboly v bežnom živote – v architektúre, prírode či predmetoch dennej potreby – fotografovali ich mobilnými telefónmi a zdieľali so svojím tímom (Obrázok 1). Následne si každý vybral fotografiu iného partnera, analyzoval ju, pomocou GeoGebry vizualizoval príslušný graf, určil predpis funkcie a opísal jej vlastnosti z grafu. Spracované fotografie žiaci pridávali do spoločnej e-knihy v Canve (obrázok 2), čím vznikol originálny zbierkový výstup. Aktivita zároveň umožnila spoznávať životný priestor a kultúru partnerských krajín prostredníctvom autentických obrázkov.

Obrázok 1: Paraboly v bežnom živote žiakov



Obrázok 2: Spracovanie materiálu v e-knihe

Práca v prostredí TwinSpace

TwinSpace zohrával kľúčovú rolu pri organizácii aktivity – slúžil ako hlavná projektová platforma. Žiaci v ňom mali prístup k popisu úlohy, k postupu riešenia a návodom na prácu s aplikáciami (Geogebra a Canva). TwinSpace zároveň umožnil priebežnú komunikáciu medzi partnermi a slúžil ako digitálny archív všetkých pracovných materiálov. Vďaka nemu mohli žiaci jednoducho sledovať pokrok medzinárodných tímov a inšpirovať sa navzájom.

Digitálne nástroje

Realizácia aktivity si vyžadovala kombináciu mobilných technológií a online aplikácií. Žiaci využívali mobilné telefóny na fotografovanie parabol v reálnom prostredí a na ich okamžité zdieľanie v tímoch. Aplikácia **GeoGebra** umožnila presne vizualizovať paraboly na fotografiách, získať predpis príslušnej kvadratickej funkcie a skúmať jej vlastnosti. Výstupy boli následne spracované v kolaboratívnom online prostredí **Canva**, kde žiaci spoločne vytvorili e-knihu s komentovanými fotografiami.

Výsledky a evaluácia

Evaluácia prebehla prostredníctvom krátkej online ankety v prostredí TwinSpace a formou peer feedbacku. Výsledky ankety ukázali, že 26 % žiakov označilo aktivitu za ľahkú, 10 % za ťažkú, 53 % žiakov ju hodnotilo ako zábavnú, 10 % za nudnú. Iba 1 % žiakov uviedlo, že nemali predstavu, čo majú robiť. Väčšina žiakov ocenila prepojenie matematiky s reálnym životom, možnosť spoznávať iné kultúry a spoluprácu s rovesníkmi.

Rozvíjané kompetencie a zručnosti

Počas aktivity sme u žiakov rozvíjali viaceré kľúčové kompetencie, a to komunikácia v materinskom a cudzom jazyku, matematická a digitálna gramotnosť, kompetencie v oblasti vedy a techniky, kultúrne povedomie a vyjadrovanie. Zároveň sme sa zamerali aj na rozvíjanie zručností 21. storočia, najmä na tímovú spoluprácu, riešenie problémov, kritické myslenie, kreativitu a flexibilitu, IKT a vedeckú gramotnosť, spoločenskú zodpovednosť a etiku, písané komunikačné zručnosti.

Poznámky k implementácii

Pri realizácii aktivity sa ukázalo, že žiaci robili niektoré opakujúce sa chyby, na ktoré je vhodné ich vopred upozorniť. Častým problémom bolo nesprávne umiestnenie paraboly do súradnicového systému – napríklad posunutie grafu bez zohľadnenia vrcholu alebo osi symetrie. Objavili sa tiež nesprávne zvolené fotografie, najmä objekty s kruhovými tvarmi, ktoré žiaci mylne považovali za paraboly.

Aktivita "Obrázky s lineárnymi funkciami v hlavnej úlohe"

(Originálny názov Images with Linear Functions in the Lead Role)

Cieľ a kontext aktivity

Aktivita reagovala na potrebu rozvíjať nielen matematické poznatky, ale aj digitálne zručnosti, tvorivé myslenie a online spoluprácu. Jej cieľom bolo, aby žiaci aplikovali učivo o lineárnych a konštantných funkciách pri vytváraní súboru predpisov týchto funkcií s definičnými obormi, ktoré ich partneri použili na „nakreslenie" obrázka v online grafickom nástroji. Úloha podporovala hlbšie porozumenie funkciám, precvičovala presnosť matematickej formulácie a rozvíjala tvorivosť aj komunikáciu v angličtine.

Metodické východiská

Z hľadiska obsahu vychádzala aktivita z učiva o konštantnej a lineárnej funkcii: tvorba predpisu funkcie pomocou súradníc dvoch bodov, grafické znázornenie, práca s definičným oborom a praktické uplatnenie poznatkov v rôznych kontextoch.

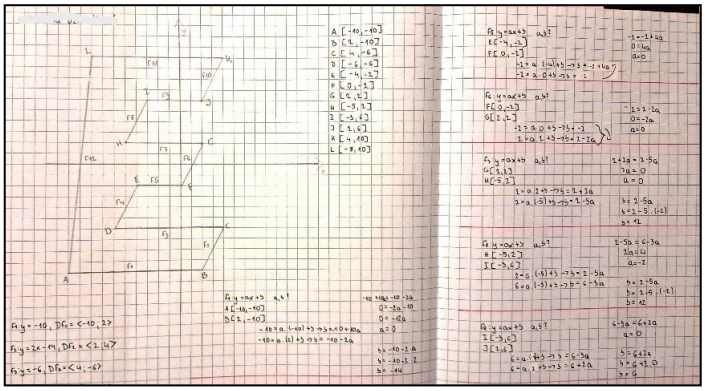
Popis aktivity

Aktivita prebiehala v medzinárodných tímoch zložených zo žiakov dvoch partnerských škôl. Každý tím tvorili štyria žiaci, ktorí pracovali vo dvojiciach. Úlohou bolo vytvoriť kreatívny obrázok pomocou grafov rôznych lineárnych a konštantných funkcií s obmedzenými definičnými obormi.

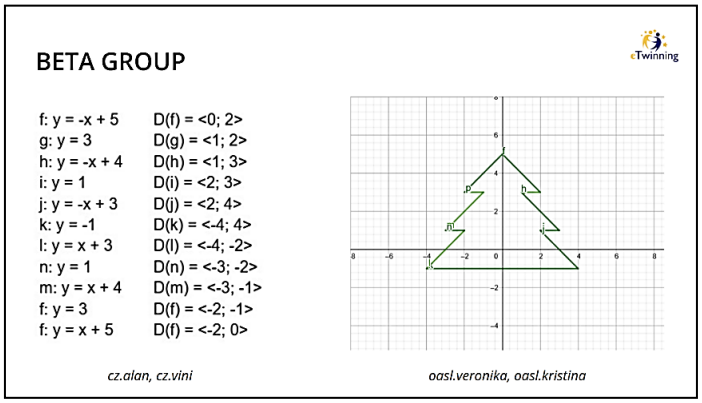
Na základe vlastného náčrtu na papieri (obrázok 3) žiaci popísali jednotlivé „čiary" obrázka pomocou funkčných predpisov s určenými definičnými obormi. Zoznam vytvorených funkcií a ich definičných oborov odovzdali partnerskej dvojici, ktorá tieto predpisy preniesla do grafického nástroja (GeoGebra alebo Desmos) a získala obrázok. Dôraz sa kládol na presnosť matematickej formulácie a logiku zostavenia obrázka (Obrázok 4).

Počas práce žiaci komunikovali v online fóre, kde riešili nepresnosti zadania aj technické problémy. Vzájomne si poskytovali spätnú väzbu k zrozumiteľnosti inštrukcií a kvalite výstupov.

Výsledkom aktivity boli originálne obrázky „nakreslené funkciami", ktoré žiaci prezentovali v spoločnej galérii s krátkym popisom v angličtine. V závere žiaci kolaboratívne vytvorili elektronickú knihu. Pomocou šablóny v Google Slides spracovali svoje výstupy, ktoré boli následne publikované učiteľom v aplikácii BookCreator.



Obrázok 3 Práca žiačky slovenského tímu. Žiačka je zaradená ako žiak so ŠVVP (Zdroj: archív autora)



Obrázok 4 Zadanie (vľavo) českej dvojice a výsledný obrázok (vpravo) slovenskej dvojice v tíme Beta

Práca v prostredí TwinSpace

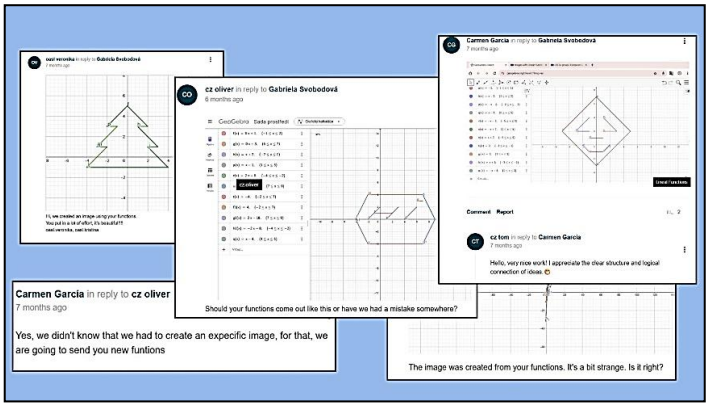
TwinSpace slúžil ako centrálna platforma pre zadania, zdieľanie výstupov a komunikáciu v tímoch. Fórum bolo aktívne využívané najmä na peer feedback a riešenie problémov (Obrázok 5).

Digitálne nástroje

Realizácia aktivity si vyžadovala využitie viacerých digitálnych nástrojov žiakmi. Aplikácie podporovali nielen matematickú presnosť, ale aj kolaboráciu, komunikáciu a tvorbu výstupov:

- GeoGebra, Desmos: vizualizácia predpisov funkcií.
- TwinSpace: koordinácia tímov, zdieľanie výstupov, diskusné fórum.
- Google Slides: kolaboratívna tvorba e-knihy.

Využitie týchto nástrojov prispelo k rozvoju digitálnych kompetencií podľa rámca DigCompEdu – najmä v oblastiach tvorby obsahu, spolupráce a online komunikácie.



Obrázok 5 Ukážky z komunikácie v pracovných skupinách (TwinSpace diskusné fórum)

Výsledky a evaluácia

Hlavným výstupom bola kolaboratívne vytvorená e-kniha v prostredí Google Slides. Žiaci hodnotili aktivitu prostredníctvom krátkej ankety v TwinSpace, v ktorej 51 % žiakov označilo aktivitu za zábavnú, 25 % za jednoduchú, 18 % za ťažkú, 3 % za nudnú a 2 % žiakov uviedlo, že nevedeli, čo majú robiť. Reflexia prebiehala aj formou spätnej väzby v tímoch. Väčšina žiakov ocenila možnosť medzinárodnej spolupráce a zapojenie do tvorivej úlohy.

Rozvíjané kompetencie a zručnosti

Aktivita rozvíjala matematické a digitálne kompetencie, schopnosť učiť sa, tímovú spoluprácu, kreativitu a kritické myslenie. Používanie digitálnych nástrojov prispelo k rozvoju IKT a vedeckej gramotnosti, práca v angličtine podporila jazykové a komunikačné zručnosti. Úloha zároveň viedla žiakov k zodpovednému prístupu a etickej spolupráci v online priestore.

Poznámky k implementácii

Najčastejšou chybou, ktorá sa objavila v úvode aktivity, bolo zakreslenie obrázku s úsečkami, ktoré nie sú časťou grafu lineárnej ani konštantnej funkcie (úsečky kolmé na os x). Ojedinele sa vyskytli nesprávne zápisy súradníc. Práca s GeoGebrou však ponúkla kontrolu riešenia a na väčšinu chýb prišli žiaci samostatne alebo len s malou intervenciou učiteľa.

Ak žiaci nestihli dokončiť prácu počas vyučovania, v aplikácii si uložili súbor vo formáte *.ggb* a neskôr po importe súboru do aplikácie pokračovali v práci. Túto možnosť sme využili aj pri delení práce medzi členov dvojice, ktorí riešili jedno spoločné zadanie.

Aktivitu je možné rozšíriť aj o iné typy funkcií (napr. kvadratické, mocninné atď.)

Záver

Skúsenosti z realizovaných aktivít ukazujú, že projektové vyučovanie môže mať na hodinách matematiky výrazný prínos – nielen z hľadiska prehlbovania poznatkov, ale najmä v oblasti motivácie žiakov a rozvoja ich kľúčových kompetencií. V spojení s medzinárodnou

spoluprácou získava vyučovanie nový rozmer: matematika prestáva byť izolovaným predmetom a stáva sa nástrojom na riešenie reálnych úloh, komunikáciu a tvorivú spoluprácu v globálnom kontexte.

Digitálne nástroje a platformy ako TwinSpace, GeoGebra či spoločné online prezentácie poskytujú žiakom bezpečné prostredie na rozvoj digitálnych zručností, tímovej práce a jazykových kompetencií. Učiteľ v takomto modeli vystupuje ako sprievodca a facilitátor procesu učenia, ktorý podporuje autonómiu, experimentovanie a zodpovednosť žiakov.

Dôležitým prínosom **projektu je aj jeho udržateľnosť** – ku každej aktivite boli vypracované podrobné **učebné scenáre**, ktoré umožňujú ich opakované využitie a adaptáciu v rôznych vyučovacích kontextoch. Tento prístup zabezpečuje dlhodobé rozšírenie pozitívnych efektov projektu a podporuje integráciu inovatívnych metód do bežnej praxe. **Učebné scenáre sú dostupné na https://sdu.sk/1vif**.

Na základe skúseností veríme, že aj náročnejší matematický obsah možno uchopiť zážitkovo, zmysluplne a medzipredmetovo – najmä ak je postavený na dôvere, spolupráci a dôraze na proces, nielen na výsledok. Takéto vyučovanie si síce vyžaduje dôslednú prípravu, ale prináša dlhodobý efekt: žiaci si odnášajú nielen vedomosti, ale aj schopnosti dôležité pre život v 21. storočí.

Poďakovanie

Rada by som vyjadrila úprimné poďakovanie *eTwinning Slovensko* a *eTwinning Europe* za príležitosť profesijne sa rozvíjať prostredníctvom ich bezplatných vzdelávacích aktivít. Vďaka nim mám možnosť učiť sa priamo od kolegov zo zahraničia, obohacovať sa ich skúsenosťami a inšpirovať sa ich pedagogickou praxou. Táto podpora a spolupráca v rámci eTwinning komunity významne prispievajú k môjmu odbornému rastu aj k skvalitňovaniu mojej pedagogickej práce.

LITERATÚRA

[1] DANIŠ, M. *Projektové vyučovanie – cesta k aktívnemu učeniu*. Pedagogické rozhľady, 2000, roč. 9, č. 1, s. 25–28. ISSN 1335-0404.

[2] eTwinning. In: *European School Education Platform* [online]. 2022 [cit. 2025-04-30]. Dostupné z: https://school-education.ec.europa.eu/en/etwinning

[3] HRBÁŇOVÁ, K. – MESZÁROSOVÁ, Z.: *Krok za krokom ku kvalitnému eTwinning projektu* [online]. Žilina: eTwinning Slovensko, Žilinská univerzita v Žiline, 2023 [cit. 2025-05-11]. ISBN 978-80-554-2060-8. Dostupné z: https://www.etwinning.sk/publikacie/krok-za-krokom-ku-kvalitnemu-etwinning-projektu.pdf

[4] POĽANSKÁ, M. – GANAJOVÁ, M. – LETOŠNÍKOVÁ, P.: *eTwinning projekt „Nobelove ceny a náš svet“* [online], In Direktor - portál pre riaditeľov škôl a zriaďovateľov, 2025, ISSN 1339-925X. Dostupné online na: https://www.direktor.sk/sk/casopis/didaktika/etwinning- projekt-nobelove-ceny-a-nas-svet.m-2287.html

RNDr. Monika Poľanská
Spojená škola, organizačná zložka Obchodná akadémia
Jarmočná 108
SK – 064 01 Stará Ľubovňa
e-mail: polanska.mon@gmail.com

STRATÉGIE GYMNAZISTOV PRI ZOVŠEOBECŇOVANÍ RASTÚCICH GEOMETRICKÝCH VZOROV

ENIKŐ SCHNÜREROVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku popisujeme výskum realizovaný na košickom gymnáziu zameraný na zovšeobecňovanie rastúcich geometrických vzorov s dôrazom na rozlišovanie lineárneho a kvadratického rastu. Na základe analýzy žiackych riešení identifikujeme ich rôzne prístupy k riešeniu úloh. Na záver hodnotíme úroveň ich funkčného myslenia.*

Teoretické východiská

Pojem funkcia predstavuje jeden z najdôležitejších matematických pojmov. Funkčné myslenie možno definovať rôznymi spôsobmi. Pittalis a kol. (2020) považuje funkčné myslenie za proces budovania, opisovania a uvažovania o funkciách a s funkciami. Autori rozlišujú tri možné typy funkčného myslenia:

a) rekurzívne – žiak hľadá zmeny v rámci postupnosti hodnôt, zahŕňa slovný opis pravidla vzoru a využíva ho na predpovedanie údajov, resp. pre nájdene ďalšieho člena vo vzore,
b) kovariančné – žiak si predstavuje, ako sa hodnoty dvoch veličín menia súčasne, uvádza pravidlo, ako sa menia veličiny spoločne (napr. „ako sa hodnota *x* sa zväčšuje o 2, hodnota *y* sa zväčšuje o 4“,
c) korešpondenčné – žiak identifikuje vzťah medzi premennými, zapisuje explicitný vzorec, ktorý využíva na predpovedanie vzdialených hodnôt.

Podľa Markworth (2010) geometrické vzory podporujú porozumenie funkcií, premenných a rozvoj schopnosti zovšeobecňovať. Friel a Markworth (2009) vytvorili trojfázový proces riešenia rastúcich geometrických vzorov:

1. fáza „*Využívanie vizuálnych charakteristík“* založená na otázkach: „Ako by si zakreslil nasledujúci obrázok/fázu?“; „Mám 25 štvorčekov. Ktorý obrázok/fázu môžem vytvoriť?“;
2. fáza „*Vytváranie numerických vzťahov s cieľom zovšeobecniť funkciu“* založená na otázke: „Koľko štvorčekov budem potrebovať na vytvorenie obrázku/fázy 10?“;
3. fáza *„Rozšírená analýza vzoru“* založená na otázkach: „Koľko štvorčekov potrebujem na vytvorenie n-tého obrázku/fázy?“; „Ktorý obrázok/fáza obsahuje 100 štvorčekov?“.

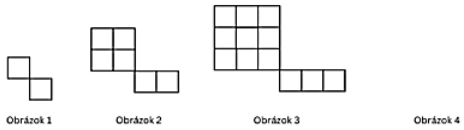
Metodológia výskumu

Výskum bol realizovaný v októbri 2024. Výskumnú vzorku tvorili žiaci druhého ročníka košického gymnázia z triedy s rozšíreným vyučovaním angličtiny. Celkovo sa výskumu zúčastnilo 27 žiakov, z toho bolo 12 chlapcov a 15 dievčat. Výučba prebiehala prostredníctvom autorkou navrhnutého učebného a metodického materiálu zameraného na zavedenie kvadratickej funkcie. Tento materiál je v súlade s princípmi bádateľsky orientovaného vyučovania. V rámci navrhnutého materiálu sú využívané úlohy založené na zovšeobecňovaní rastúcich geometrických vzorov. Žiaci boli pred samotným výskumom oboznámený s cieľom výskumu (zistiť úroveň funkčného myslenia), súhlasili so spracovaním ich osobných údajov len na účely výskumu. Žiaci pracovali s pracovnými listmi samostatne a následne im boli pridelené kódy pre zachovanie anonymity. V tomto príspevku

sa budeme venovať úlohe, ktorá bola zadaná žiakom v rámci pracovného listu vo fáze skúmania. Úloha bola zameraná na kvadraticky rastúci geometrický vzor. Popíšeme žiacke stratégie využívané pri riešení tejto úlohy a vyhodnotíme úroveň ich funkčného myslenia.

V úlohe (Obrázok 8) je zobrazený vzor prostredníctvom postupnosti obrázkov a následne sa k danému vzoru viaže niekoľko úloh s rastúcou náročnosťou. Žiaci dokresľujú obrázok do postupnosti obrázkov, zisťujú koľko štvorčekov bude v nejakom blízkom obrázku, napr. obrázku 5 a aký obrázok by mohol byť vytvorený z určitého počtu štvorčekov.

Nasledujúce obrázky zobrazujú vzor.



a) Dokreslite obrázok 4.
b) Doplňte údaje do tabuľky.

Obrázok	1	2	3	4
Počet štvorčekov				

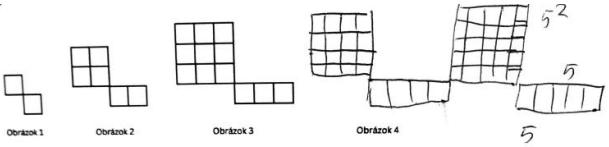
c) Koľko štvorčekov by sme potrebovali na vytvorenie obrázku 5?

d) Na vytvorenie obrázku sme využili 72 štvorčekov. Aké je číslo obrázka, ktorý sme vytvorili?

Obrázok 8: Úloha

Žiacke riešenia

Nasledujúce obrázky zobrazujú niekoľko žiackych riešení. V prvom žiackom riešení (Obrázok 9) je možné vidieť, že žiak dokáže dokresliť obrázok 4 aj 5 a pravdepodobne na základe obrázkov dopočítava počet štvorčekov v obrázku 5. Pri zisťovaní čísla obrázka, v ktorom je 72 štvorčekov, žiak využíva postupné výpočty pre obrázky 6,7 až kým zistí, že daný počet štvorčekov bude v obrázku 8.



a) Dokreslite obrázok 4.
b) Doplňte údaje do tabuľky.

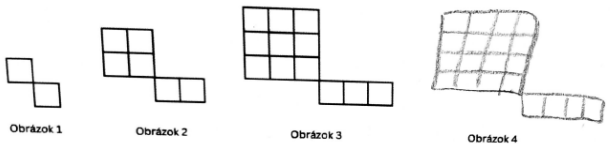
Obrázok	1	2	3	4	5
Počet štvorčekov	2	6	12	20	30

c) Koľko štvorčekov by sme potrebovali na vytvorenie obrázku 5? (30)
d) Na vytvorenie obrázku sme využili 72 štvorčekov. Aké je číslo obrázka, ktorý sme vytvorili? (8.)

6. = 6² + 6 = 42
7. = 7² + 7 = 56
8. = 64 + 8 = 72

Obrázok 9: Riešenie žiaka 1

Žiak 2 vo svojom riešení (Obrázok 10) naznačuje rozdiely medzi počtami štvorčekov v jednotlivých obrázkoch a tento prístup si zachováva aj pri hľadaní čísla obrázka, v ktorom je konkrétny počet štvorčekov. Žiak zapisuje počet štvorčekov potrebný pre pridanie k predchádzajúcemu obrázku, aby získal počet štvorčekov v nasledujúcom obrázku, až kým dosiahne hľadaný počet štvorčekov.



a) Dokreslite obrázok 4.
b) Doplňte údaje do tabuľky.

Obrázok	1	2	3	4	5
Počet štvorčekov	2	6	12	20	30

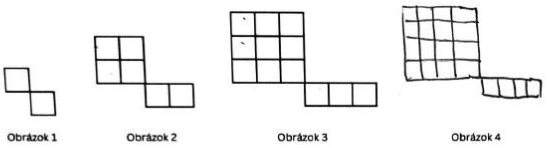
+4 +6 +8 +10

c) Koľko štvorčekov by sme potrebovali na vytvorenie obrázku 5? 30
d) Na vytvorenie obrázku sme využili 72 štvorčekov. Aké je číslo obrázka, ktorý sme vytvorili? (8)

6 12 ... 42
7 14 ... 56
8 16 ... 72

Obrázok 10: Riešenie žiaka 2

V riešení žiaka 3 možno sledovať trajektóriu zovšeobecňovania vzťahu medzi číslom obrázka a počtom štvorčekov v obrázku. Žiak si spočiatku naznačuje rozdiely medzi počtami štvorčekov v obrázkoch, následne vyjadruje počet štvorčekov v obrázku 5 konkrétnym výpočtom a v poslednej časti žiak dokáže vyjadriť vzťah medzi číslom obrázka a počtom štvorčekov v obrázku vo všeobecnosti.



a) Dokreslite obrázok 4.
b) Doplňte údaje do tabuľky.

+4 +6 +8

Obrázok	1	2	3	4
Počet štvorčekov	2	6	12	20

c) Koľko štvorčekov by sme potrebovali na vytvorenie obrázku 5? $(5 \cdot 5) + 5 = 30$
d) Na vytvorenie obrázku sme využili 72 štvorčekov. Aké je číslo obrázka, ktorý sme vytvorili?

$72 = (x \cdot x) + x$ $(8 \cdot 8) + 8 =$
$72 = x^2 + x$ $64 + 8 = 42$

8

Obrázok 11: Riešenie žiaka 3

V nasledujúcej tabuľke uvádzame prehľad stratégií, ktoré gymnazisti využili pri riešení úlohy. Žiaci, ktorí použili viac ako jednu stratégiu, boli klasifikovaní na základe tej najsofistikovanejšej. Žiakom, ktorí neuviedli žiaden zrejmý výpočet a uviedli len číselné výsledky, bola priradená „nejasná“ stratégia. Medzi žiackymi riešeniami sa vyskytlo jedno riešenie, ktoré využívalo výpočet trojčlenkou a jedno neúplné riešenie.

Typ stratégie	Počet žiakov (27)
Počítanie po štvorčekoch	2
Konkrétne výpočty	3
Naznačovanie rozdielov	2
Všeobecný vzťah	7
Trojčlenka	1
Nejasná	11
Neúplné riešenie	1

Tabuľka 1: Prehľad stratégií gymnazistov

Záver

Na základe zistení možno tvrdiť, že 25 % žiakov dokázalo nájsť a využiť všeobecný vzťah pre počet štvorčekov v závislosti od čísla obrázka, t.j. prejavili korešpondenčné myslenie. Rovnaké percento žiakov využilo menej sofistikované stratégie, ako počítanie po štvorčekoch, výpočty pre konkrétne obrázky a kovariančný prístup cez naznačovanie rozdielov. Nedostatkom výskumu je, že nebolo možné identifikovať stratégie u 40 % žiakov. Na lepšie pochopenie ich myslenia je preto v budúcnosti potrebné doplniť zber dát o riadené rozhovory.

Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VVGS-2025-3496 „Rozvíjanie funkčného myslenia žiakov ZŠ a SŠ".

LITERATÚRA

[1] Friel, S. N. – Markworth, K. A. 2009. A framework for analyzing geometric pattern tasks. In Mathematics Teaching in the Middle School. 2009, 15(1), s. 24-33. Dostupné na internete: https://doi.org/10.5951/MTMS.15.1.0024

[2] Markworth, K. A. 2010. *Growing and Growing: Promoting Functional Thinking with Geometric Growing Patterns.* Dissertation thesis. Chapel Hill, NC: University of North Carolina at Chapel Hill, 2010. Dostupné na internete: https://doi.org/10.17615/r63y-a781

[3] Pittalis, M. – Pitta-pantazi, D. – Christou, C. 2020. *Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations.* In Journal for Research in Mathematics Education. 2020, 51, s. 631–674. Dostupné na internete: https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

RNDr. Enikő Schnürerová
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
SK – 040 01 Košice
e-mail: eniko.schnurerova@student.upjs.sk

KLUB UČITEĽOV MATEMATIKY - MATEMATIKA MÁ MOTIVOVAŤ

MATEJ SLABÝ, INGRID SEMANIŠINOVÁ, MONIKA KRIŠÁKOVÁ

ABSTRAKT. *Klub učiteľov matematiky je komunita, ktorá spája učiteľov (ako aj študentov učiteľstva) hľadajúcich inšpiráciu, podporu a komunitu rovnako zanietených kolegov. V príspevku predstavíme niektoré aktivity KUM-u s cieľom vytvoriť priestor, kde sa učíme ako učiť matematiku s radosťou, tvorivo, efektívne a uvedieme jednu aktivitu, ktorú môžete vyskúšať.*

Klub učiteľov matematiky

Klub učiteľov matematiky (skrátene KUM) vznikol v roku 2017 na Oddelení didaktiky matematiky Ústavu matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach iniciatívou Veroniky Hubeňákovej a Ingrid Semanišinovej ako prepojenie dobrej praxe na školách a najnovších výskumov v oblasti didaktiky matematiky. Ide o neformálne stretnutia učiteľov matematiky, študentov učiteľstva matematiky a univerzitných pedagógov s cieľom hlbšie poznávať matematiku a vzájomne si odovzdávať skúsenosti v profesionálnej komunite učiteľov. Učitelia z praxe vnášajú do diskusie konkrétne didaktické problémy, otázky kurikula či skúsenosti z vyučovania v triede. Didaktici prezentujú nové poznatky, inovatívne metodické prístupy a teoretické rámce. Vzájomná výmena poznatkov tak podporuje profesijný rozvoj učiteľov, prispieva k zvyšovaniu kvality výučby matematiky v školách a podnety učiteľov matematiky sú inšpiráciou, motiváciou a zdrojom informácií pri tvorbe prípravy a vzdelávania budúcich pedagógov, ktorí majú taktiež možnosť podieľať sa na týchto stretnutiach. Nie je preto prekvapujúce, že mottom KUM-u je M^3 – Matematika Má Motivovať.

Projekt NCDTV a DitEdu

Aktuálnosť tém, ako je umelá inteligencia a digitálne nástroje v práci učiteľa, vedú k nevyhnutnej potrebe zmien vo vzdelávaní učiteľov a ich príprave na digitálnu dobu. Aj preto od roku 2024 KUM zastrešuje národný projekt DiTEdu (Digitálna transformácia vzdelávania a školy), ktorého cieľom je podporiť profesijný rozvoj pedagógov na všetkých stupňoch vzdelávania a priniesť im praktické nástroje, inšpirácie a zručnosti pre výučbu v digitálnom veku. Poskytovateľom vzdelávania je Národné centrum pre digitálnu transformáciu vzdelávania na pôde dvoch univerzít, a to Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach a Univerzita Komenského v Bratislave. Okrem KUM-u je možné navštevovať aj kluby ďalších aprobačných predmetov, napr. informatiky či dejepisu. Všetky aktivity sú v rámci projektu bezplatné, stačí sa iba registrovať na portáli CCVaPP. Registráciou získate okrem členstva v kluboch a veľkej ponuky aktualizačných či inovačných vzdelávaní aj Microsoft Office 365 konto pod hlavičkou NCDTV pre účely zdieľania dokumentov a online stretnutí.

Program stretnutí KUM-u

Na stretnutiach sa venujeme aktuálnym témam a hľadáme nové prístupy, ktoré zvyšujú zrozumiteľnosť a atraktivitu matematiky pre žiakov, ako je napríklad motivácia žiakov, ťažkosti a miskoncepcie žiakov, umelá inteligencia, práca s digitálnym prostredím a pod. Súčasťou diskusií je výmena skúseností a prezentácia zaujímavých úloh a aktivít, ktoré podporujú rozvoj matematického myslenia. Zameriavame sa tiež na implementáciu týchto

úloh a aktivít do praxe a na zdieľanie skúseností z ich využívania. Stretnutia prebiehajú dvojakou formou – prezenčne a dištančne. Prezenčná forma je vhodnejšia na vytváranie komunity a tiež na otvorenú, kritickú diskusiu. Dištančná forma zasa ponúka možnosť zúčastniť sa KUM-u aj pre učiteľov mimo okresu Košíc, ktorí nemajú možnosť chodiť na prezenčné stretnutia. KUM trvá zvyčajne 90-120 minút a prebieha od 14:30 (15:00) v rôzne pracovné dni, aby sme nediskriminovali učiteľov, ktorí majú v niektorí deň pravidelný program, napríklad krúžok a pod. Raz ročne organizujeme celodenný KUM, zvyčajne cez polročné prázdniny a učitelia počas neho absolvujú dve pracovné dielne a jednu prednášku. Záver celodenného stretnutia patrí matematickému Standupu, ktorý sa nesie v duchu „Len volovi je všetko jasné."

Program a čas stretnutí závisí od časových možností lektorov a pozvaných hostí. Snažíme sa však o to, aby boli témy aktuálne, aby sa neopakovali a aby z nich mali učitelia čo najväčší prínos.

Aktuálne sa v rámci projektu DiTEdu overujú metodiky zamerané na využitie digitálnych nástrojov a zavedenie umelej inteligencie do vzdelávania. Aj o takýchto témach sa budeme s učiteľmi na najbližších stretnutiach rozprávať a niektoré aktivity z daných metodík vyskúšame priamo na KUM-e.

Aktuálny program stretnutí nájdete na stránke www.umv.science.upjs.sk/kum pod kolónkou Najbližšie stretnutia. Okrem toho na tejto stránke nájdete kontakt na organizátorov, prierez tém a termínov predošlých stretnutí s krátkym popisom a fotodokumentáciou. Zároveň sa k nám môžete pripojiť registráciou na portáli CCVaPP, ktorá je na tejto stránke uvedená aj s inštruktážnym videom.

V nasledujúcej časti sa vrátime do začiatkov KUM-u a predstavíme si aktivitu, ktorú sme učiteľom ponúkli ešte na úplne prvom KUM-e. Na workshope sme sa teda počas konferencie Dva dni s didaktikou matematiky zamerali na rozvoj tvorivosti na hodinách matematiky prostredníctvom aktivity – súťaže zameranej na riešenie úloh viacerými spôsobmi.

Rozvíjanie tvorivosti na hodinách matematiky (MSTs súťaž)

Podľa Torranca (1974) je tvorivosť určitá schopnosť, ktorá má štyri základné navzájom prepojené komponenty (zložky), a to fluenciu, originalitu, elaboráciu a flexibilitu. Víťazková (2018) uvádza, že fluencia je spojená so schopnosťou produkovať množstvo nápadov, originalita sa viaže na osobitosť myšlienok a výsledkov jedinca, elaborácia predstavuje zručnosť doplniť riešenie o podstatné detaily, rozvinúť myšlienku až k jej záveru a dokázať ju zovšeobecniť a flexibilita sa týka schopnosti meniť perspektívu, prispôsobovať smer hľadania riešení a orientovať sa v rôznorodých myšlienkach.

Matematická kreativita v školskej matematike je zvyčajne spojená s riešením problému alebo zadaním problému (napr. Silver, 1997). Kwon a kolektív (2006) identifikovali dve kľúčové súčasti matematickej tvorivosti, ktorými sú tvorba nových poznatkov a flexibilné hľadanie riešení problémov. Silver (1997) vo svojom výskume zistil, že originalita sa prejavuje v pokroku pri objavovaní rôznych možností riešenia matematických úloh a v tvorbe neobvyklých, nových riešení a flexibilita sa rozvíja v procese hľadania nových matematických riešení, najmä keď už existuje aspoň jedno riešenie problému.

Medzi niektoré možnosti rozvíjania flexibility v triede patrí napríklad zaradiť do vyučovacieho procesu úlohy, ktoré: majú viacero možností riešenia (napr. úloha, v ktorej máme nájsť kváder, ktorý bude mať objem 12 cm^3); sú modifikované (napr. zmenou

vstupných podmienok); alebo majú viacero stratégií riešenia, tzv. MSTs úlohy (Leikin & Lev, 2007).

V nasledujúcej časti si predstavíme MSTs úlohy a aktivitu v triede, kde vieme práve takýto typ úloh využiť.

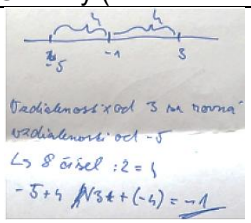
MSTs úlohy

Skratka MSTs je vytvorená z anglického spojenia **M**ultiple **S**olution **T**ask**s**, čo v slovenskom jazyku znamená Úlohy s viacerými možnosťami (stratégiami) riešenia. Za MSTs úlohu sa považuje úloha, v ktorej učiteľ explicitne požaduje, aby ju žiak vyriešil viacerými spôsobmi. Čo myslíme pod riešením viacerými spôsobmi si ukážeme na konkrétnej úlohe:

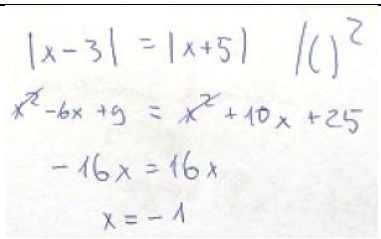
Úloha: Riešte rovnicu s absolútnou hodnotou v množine R: $|x-3| = |x+5|$

Žiacke riešenia:

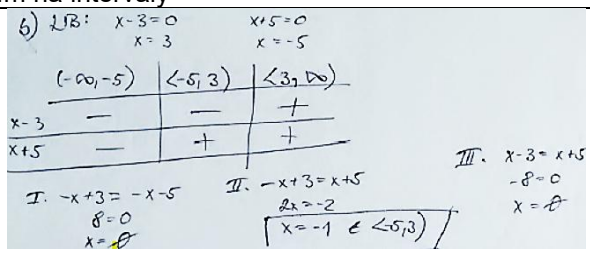
1. Graficky (cez vzdialenosť)



2. Umocnením



3. Rozdelením na intervaly



Za rozdielne budeme používať riešenia, pri ktorých žiaci použijú: rôzne reprezentácie matematickej situácie, resp. matematického pojmu; rôzne vlastnosti matematických objektov (definície, vety) v rámci jedného tematického celku; alebo rôzne vlastnosti matematických objektov (definície, vety) v rôznych tematických celkov.

MSTS úlohy nepomáhajú len rozvíjať flexibilitu žiakov, ale vieme ich využiť aj na spestrenie vyučovacieho procesu, či vytvorenie zdravej súťaživosti medzi žiakmi.

Realizácia v triede

V tejto časti si uvedieme ako môže prebiehať aktivita so žiakmi, kde použijeme MSTs úlohu na rozvíjanie kreativity žiakov v triede. Pravidlá aktivity sú veľmi jednoduché

a nevyžadujú náročnú prípravu učiteľa. Aktivita, ktorú môžete realizovať v triede má nasledovné pravidlá (resp. kroky):

1. Žiakov náhodne rozdelíme do trojčlenných alebo štvorčlenných skupín.
   Poznámky: Na rozdelenie žiakov môžete použiť napríklad karty (žiaci s rovnakým znakom alebo číslom budú tvoriť skupinu). Žiaci si môžu vymyslieť názov skupiny, aby sa jednoduchšie pracovalo pri zapisovaní hodnotenia.
2. Na tabuli budeme postupne zobrazovať 3 MSTs úlohy, každú ďalšiu úlohu o 7 minút neskôr.
   Poznámka: Ideálne je mať pripravenú aj papierovú verziu úloh pre každú skupinu.
3. Každú úlohu žiaci riešia na osobitný papier a snažia sa ju vyriešiť viacerými možnými spôsobmi.
4. Na konci necháme žiakom ešte 10 minút na doriešenie všetkých úloh.
5. Úlohy žiaci odovzdajú a učiteľovou úlohou je obodovať dané riešenia.

Bodovanie úloh prebieha nasledovne:

Za každé správne riešenie úlohy (nielen výsledok aj komentár je dôležitý) žiaci získajú**: bod + „počet skupín“ – „počet skupín, ktoré odovzdali rovnaké riešenie“**.

Poznámka 1: „Rovnakosť“ metódy riešenia posudzuje učiteľ.

Poznámka 2: Čím väčší počet skupín, tým je bodovanie zaujímavejšie, avšak je tu vyššia šanca rovnakých riešení.

Poznámka 3: Súčet bodov za všetky úlohy je bodový zisk skupiny. Skupina, ktorá získa najviac bodov, vyhráva. Ak by nastal rovnaký počet bodov, učiteľ môže mať pripravenú rozstrelovú otázku týkajúcu sa danej témy alebo bude na konci viac víťazných skupín.

V nasledujúcej časti si ukážeme ako prebieha bodovanie jednej úlohy (pri daných riešeniach), ak je počet skupín v triede 5. Pri každej skupine naznačíme ako riešila danú úlohu a koľko bodov, na základe svojho riešenia, získala.

Úloha: Riešte kvadratickú rovnicu $x^2 = 4x$.

Skupina 1

Riešenie úlohy skupiny 1: $x(x-4) = 0$ ... (Žiadna ďalšia skupina nemala toto riešenie.)

Pridelené body skupine: $1 + 5 - 1 = 5$ bodov

Skupina 2

Riešenie úlohy skupiny: Buď $x = 0$ alebo $x \neq 0$ a rovnicu delíme číslom x. Dostaneme $x = 4$. (Žiadna ďalšia skupina nemala toto riešenie.)

Pridelené body skupine: $1 + 5 - 1 = 5$ bodov

Skupiny 3, 4 a 5

Riešenie úlohy: Upravíme na tvar $x^2 - 4x = 0$. Dosadením do vzorca pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice ...

Pridelené body skupinám: $1 + 5 - 3 = 3$ body

Ak ste podobný typ aktivity v triede ešte nerealizovali, je dobré byť pripravený aj na nasledujúce skutočnosti:

Čo sa môže prejaviť počas riešenia úloh?

1. Žiaci, ktorí vždy riešia úlohy štandardne, zmenia svoj prístup.
2. Väčšina skupín nájde aspoň dve rôzne stratégie riešenia, pričom silné skupiny často nájdu neštandardné riešenie.
3. Môžu sa prejaviť niektoré miskoncenpcie, formálne porozumenie pojmom, vlastnostiam, metódam riešenia.
4. Môže sa prejaviť preferovaný kognitívny štýl žiaka (vizuálny štýl - žiak si kreslí k úlohe obrázok; analytický štýl – žiak pristupuje k úlohe logicky, krok za krokom; harmonický štýl – žiak potrebuje mať globálny obraz o úlohe).
5. Ak vyjdú rôznymi metódami riešenia rôzne výsledky, tak sú žiaci motivovaní k tomu, aby sa pozreli na svoje riešenie spätne a identifikovali chybu.
6. Ak je úloha neštandardná, tak niektoré skupiny ju vôbec nevyriešia, prípadne skupiny nájdu iba jedno riešenie.
7. Ak je úloha štandardná, tak zvyčajne každá skupina nájde aspoň jedno riešenie.
8. Počas vyhodnotenia sú pozitívne reakcie žiakov na efektívne riešenia.

V nasledujúcej časti ponúkame ako inšpiráciu niektoré osvedčené MSTs úlohy, spolu s niektorými stratégiami riešenia žiakov, ktoré viete použiť počas vyučovacieho procesu, a ktoré sme použili aj v rámci workshopu na konferencii Dva dni s didaktikou matematiky:

Úloha 1: V dome sa nachádza 8 stolov, niektoré so štyrmi nohami, iné s tromi. Spolu majú 27 nôh. Koľko stolov so štyrmi nohami sa v dome nachádza?

Možné stratégie riešenia:

1. Pomocou rovníc
2. Znázornenie stolov s daným počtom nôh kreslením
3. Systematické vypisovanie možností pre oba stoly
4. Odčítanie od maximálneho počtu (8x4)

Úloha 2: V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku je základňa dlhá 10 cm. Vypočítajte jeho obsah.

Možné stratégie riešenia:

1. Dopočítanie odvesien s využitím Pytagorovej vety
2. Dopočítanie odvesien s využitím goniometrických funkcií
3. Dopočítanie výšky trojuholníka s využitím goniometrických funkcií
4. Využitie Talesovej vety
5. Dokreslenie štvorca

Úloha 3: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve izby. Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti do izieb? (V každej izbe je dostatok postelí, ktoré nerozlišujeme.)

Možné stratégie riešenia:

1. Systematický výpis možností
2. Využitie podmnožín (Binomická veta)
3. Využitie variácií s opakovaním

Možnosti zaradenia MSTs úloh do priebehu vyučovania

Kedy zaradiť MSTs súťaž je individuálne a prispôsobuje sa aktuálnym potrebám a situácii v triede. Súťaž môže byť buď krátkodobá, ak sa koná len na jednej vyučovacej hodine alebo dlhodobá, pričom sa vyhodnotí až na konci istého obdobia. V tomto prípade učiteľ zaradí na vybratej vyučovacej hodine vždy jednu MSTs úlohu a systematicky si zapisuje body za všetky úlohy.

Súťaž môžete zaradiť na konci tematického celku v rámci opakovania alebo na vytvorenie prepojení v rámci tematického celku a tiež s inými tematickými celkami, resp. môžete súťaž zaradiť na začiatku nového tematického celku ako motivačnú úlohu pre žiakov, ktorých chcete nabudiť.

MSTs súťaž je vhodná aj na matematický krúžok, kde žiakov pripravujete na niektoré matematické súťaže. Vhodným zdrojom úloh sú napríklad úlohy z Pytagoriády, pretože sú pomerne jednoduché a majú zvyčajne jeden efektívny spôsob riešenia a niekoľko ďalších menej efektívnych spôsobov.

Ak by však bola pre žiakov takáto aktivita príliš náročná, môžete začať s úlohami, ktoré majú viacero možných výsledkov riešenia až potom sa dostať k úlohám, ktoré majú viacero stratégií riešenia úlohy. Príkladom takejto úlohy je úloha: Nájdite zlomok, ktorý na číselnej osi leží medzi zlomkami $\frac{2}{5}$ a $\frac{4}{5}$.

Záver

Úlohou učiteľov na všetkých stupňoch vzdelávania preto nie je iba odovzdávať poznatky, ale aj vytvárať priestor na rozvoj tvorivého myslenia. Jedným z účinných spôsobov je začleňovanie aktivít a úloh, ktoré žiakov podnecujú k premýšľaniu, k hľadaniu netradičných riešení, k diskusii a reflexii vlastného postupu – teda k neustálemu tréningu myslenia (Leikin & Elgrably, 2022).

Práve o to sa usilujeme aj počas stretnutí Klubu učiteľov matematiky. Naším cieľom je prinášať nové podnety a inšpirácie, ktoré presahujú rámec bežných úloh a často ponúkajú iný pohľad na výučbu konkrétnej témy.

Ak sa chcete stať súčasťou komunity, ktorá sa neustále učí, hľadá nové cesty a snaží sa zvyšovať kvalitu vzdelávania matematiky na školách, srdečne vás pozývame medzi nás. Veríme, že sa čoskoro stretneme na stretnutí Klubu učiteľov matematiky – či už osobne, alebo v online priestore.

Poďakovanie

Tento príspevok bol podporený národným projektom Digitálna transformácia vzdelávania a školy - DiTEdu (401402DVR6) a projektom KEGA 012UPJŠ-4/2025.

LITERATÚRA

[1] Kwon, O. N., Park, J. H. & Park, J. S.: *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*. Asia Pacific Educ. Rev. 7, 51–61, 2006. https://doi.org/10.1007/BF03036784

[2] Leikin, R., & Elgrably, H.: *Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: Focusing on problem posing through investigations*. ZDM – Mathe-matics Education., online first, 2022. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01319-1

[3] Leikin, R., & Lev, M.: *Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity*. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3 (pp. 161–168), 2007. PME.

[4] Silver, E. A.: *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 29, 75–80, 1997. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

[5] Torrance, E. P.: *Torrance Tests of Creative Thinking*, Bensenville (IL) : Scholastic Testing Service, 1974.

[6] Víťazková, D.: *Matematická kreativita u žiakov a budúcich učiteľov matematiky*, Košice, 2018, diplomová práca.

RNDr. Matej Slabý, PhD.
Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Ústav matematiky
Jesenná 5
Centrum celoživotného vzdelávania a podpory projektov UPJŠ
Šrobárova 2
040 01 Košice
e-mail: matej.slaby@upjs.sk

doc. RNDr. Ingrid Semanišinová, PhD.
Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Ústav matematiky
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: ingrid.semanisinova@upjs.sk

RNDr. Monika Krišáková
Centrum celoživotného vzdelávania a podpory projektov UPJŠ
Šrobárova 2
040 01 Košice
e-mail: monika.krisakova@upjs.sk

ARGUMENTAČNÉ VÝZVY V UČEBNICIACH AJ MIMO NICH

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku prejdeme typy argumentov, reprezentácii a úloh k nim vedúcich ako v učebniciach, tak aj v rozširujúcich materiáloch pre učiteľov a žiakov. Poukážeme aj na iný spôsob, ako viesť žiakov v argumentácii..*

Úvod

V súčasnej matematickej edukácii sa dôraz presúva od tradičného osvojovania procedurálnych poznatkov k rozvoju vyšších kognitívnych kompetencií, medzi ktoré patrí schopnosť uvažovať, argumentovať a dokazovať. Viaceré výskumy (napr. [1]-[3] potvrdzujú, že systematické rozvíjanie týchto kompetencií je kľúčové nielen pre hlbšie porozumenie matematickým konceptom, ale aj pre rozvoj kritického myslenia a metakognitívnych zručností. Napriek tomu je argumentácia a dokazovanie v praxi často redukované na formálne dôkazové postupy alebo izolované aktivity, ktoré žiakom neposkytujú dostatok priestoru na autentické skúmanie a zdôvodňovanie.

Argumentáciu možno považovať za jednu zo základných matematických činností. Jej chápanie sa však v literatúre líši. Podľa [4] ide o proces uvažovania, ktorý nemusí byť striktne založený na formálnej logike a neobmedzuje sa iba na dokazovanie. Jeannote a Kieran [5] opisujú argumentáciu ako proces komunikácie s ostatnými alebo so sebou samým, ktorý umožňuje odvádzať matematické výroky z iných matematických výrokov. Podľa portálu NRICH [6] možno argumentáciu chápať ako činnosť, ktorá prepája všetky ostatné matematické zručnosti – ako „lepidlo“, ktoré pomáha matematike dávať zmysel.

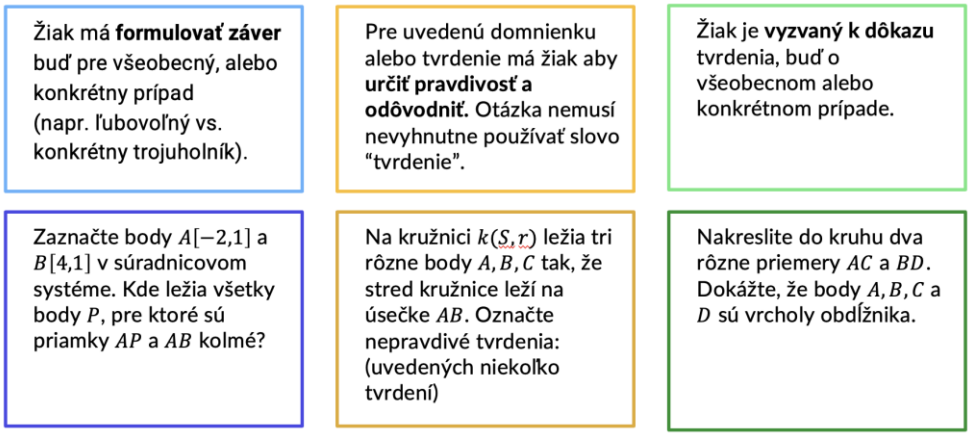
Dôležitosť argumentácie reflektuje aj nový Štátny vzdelávací program [7], ktorý ju spolu s matematickým jazykom a komunikáciou zaraďuje medzi kľúčové činnosti v každom obsahovom štandarde. Ako sa v dokumente uvádza, „schopnosť žiakov používať matematický jazyk, komunikovať o hľadaní stratégií a riešení problémov a schopnosť argumentačne podporiť, resp. zamietnuť matematické myšlienky sú dôležitými predpokladmi aktívneho zapojenia sa do spoločenského života“ (ibid., s. 2). Táto formulácia zdôrazňuje význam matematickej komunikácie a argumentácie ako prostriedku nielen pre učenie sa matematiky, ale aj pre rozvoj občianskej a kultúrnej kompetencie.

Výzvy k argumentácii

a) Učebnica

Pohľad na úlohy v učebnici môže byť v podstate dvojaký: (i) každá vedie k argumentácii, ak ja ako učiteľ položím doplňujúce otázky, alebo (ii) úlohy k argumentácii sú jasne identifikovateľné na základe výzvy k podaniu argumentu, odôvodeniu, vysvetleniu a pod.

Podľa výskumu [8] vybraných učebníc na Slovensku, v Čechách, Maďarsku a Turínsku bolo zistené, že najčastejšie typy úloh na argumentáciu v našom regióne sú: (i) formulovať záver, (ii) určite pravdivosť a odôvodniť, (iii) výzva k dôkazu. Úlohy typické pre jednotlivé výzvy k argumentácii uvádzame na Obrázku 1.



Obrázok 12. Najčastejšie výzvy v učebniciach a typické úlohy (spracované podľa výsledkov prezentovaných v [8])

Teoretický model [9] uvažuje sedem rôznych druhov argumentačných úloh, Szücs [10] rozšírila tento model aj o ôsmy druh. V našich učebniciach, ktoré boli zahrnuté do analýzy, sa však v expozičnej časti ani jeden z ďalších typov nevyskytol.

b) Iné výzvy k argumentácii

Motivácia k argumentácii pritom nemusí vždy vychádzať z tradičných pokynov typu „odôvodnite", „vysvetlite" či „prečo?". Vhodné prostredie pre prirodzenú, autentickú argumentáciu – aj keď niekedy odlišnú od tej, ktorú učitelia v škole preferujú – ponúka Vzdelávanie založené na výzvach (VZV), v anglicky hovoriacich krajinách známe aj ako Challenge-Based Education (CBE). Organizácia práce v rámci VZV pozostáva z troch hlavných fáz: Zapoj sa – Skúmaj – Konaj (z angl. Engage – Investigate – Act). Počas týchto fáz majú žiaci nielen riešiť výzvy, ale aj reflektovať, zdieľať a dokumentovať proces učenia sa, čím sa vytvára priestor pre prirodzené zdôvodňovanie, argumentáciu a tvorbu matematických vysvetlení (pozri aj obr. 2).

V posledných rokoch sa preto VZV ukazuje ako perspektívny rámec pre prekonanie tradičných limitov vyučovania argumentácie a dokazovania ([11], [12]). VZV vychádza z princípov konštruktivizmu a „inquiry-based learning" a predstavuje cyklický proces, ktorý spája teoretické poznatky s praktickou aplikáciou prostredníctvom uvedených troch fáz. V prvej fáze študenti identifikujú a formulujú spoločensky relevantný problém, v druhej fáze ho skúmajú a hľadajú možné riešenia, a v tretej fáze svoje riešenia realizujú a reflektujú ich dopad.

Implementácia VZV v matematike vytvára prirodzené prostredie, v ktorom sa argumentácia môže rozvíjať ako súčasť autentického procesu učenia sa. Riešenie otvorených výziev vyžaduje, aby žiaci (resp. riešitelia výzvy):

- formulovali hypotézy, analyzovali dáta a zdôvodňovali svoje závery,
- overovali platnosť riešení na základe matematických princípov,
- prezentovali a obhajovali svoje tvrdenia pred spolužiakmi a autoritami,
- reflektovali rozdiel medzi dôkazom, overením a vysvetlením.

Pri VZV však prirodzene prevládajú empirické formy argumentácie. Študenti svoje tvrdenia často opierajú o pozorovania, experimenty, zber dát či porovnávanie prípadov –

teda o dôkazy, ktoré sú založené na skúsenosti, nie na formálnej dedukcii. Takéto argumenty sú v matematike často považované za „nižšiu“ formu dokazovania, no vo VZV predstavujú dôležitý vývojový krok smerom k sofistikovanejšiemu, všeobecnejšiemu uvažovaniu.

Obrázok 2: Model VZV (zdroj: [13], s. 10)

Potreba podložiť tvrdenia čo najväčším množstvom dát je vo VZV prirodzenou súčasťou procesu. Ak sa žiak napríklad pýta, ako sa líši spotreba vody v jeho škole v porovnaní s inými, uvedomuje si, že nemôže vyvodzovať závery len na základe jedného pozorovania či jedného rozhovoru. Musí získať širší, komplexnejší obraz o riešenej výzve, čím sa postupne približuje k induktívnemu alebo aj deduktívnemu typu argumentácie. Tento prechod od intuitívneho, empirického k formálnejšiemu spôsobu zdôvodňovania je jedným z hlavných prínosov pre rozvoj argumentácie v prostredí VZV.

Z pedagogického hľadiska je rozdiel medzi takýmto typom výzvy a tradičnou „úlohou z učebnice“ markantný. Zatiaľ čo v učebnici je cieľ aj cesta často vopred určená, vo VZV žiak hľadá odpoveď na otázku, ktorá ho zaujíma, a to spôsobom, ktorý je pre neho zmysluplný. Riešenie výzvy si vyžaduje, aby žiak:

- zhromažďoval a interpretoval údaje,
- prepájal informácie z viacerých predmetov,
- vyhľadával alternatívne prístupy a porovnával ich,
- dokumentoval proces svojho učenia a zdieľal zistenia s ostatnými.

Táto dokumentácia a reflexia nie sú len formálnym výstupom, ale súčasťou učenia – žiak prostredníctvom nich overuje svoje myšlienky, reviduje argumenty a učí sa ich presne formulovať. Takto chápané VZV vedie k rozvoju komunikačných a metakognitívnych schopností, ktoré sú jadrom argumentácia (a neskôr dokazovania), a zároveň podporuje hlbšie pochopenie matematickej povahy dôkazu a zdôvodňovania.

V takto koncipovanom prostredí sa dôkaz nestáva izolovanou formálnou štruktúrou, ale súčasťou širšieho argumentačného a komunikačného procesu, v ktorom matematické poznanie vzniká prostredníctvom dialógu a kolaboratívneho skúmania ([14], [15]).

Záver

Z hľadiska pedagogickej praxe možno VZV chápať ako rámec, ktorý podporuje transfer argumentačných kompetencií medzi matematickým obsahom a reálnymi situáciami. Pri riešení výziev sú žiaci vedení k tomu, aby aplikovali matematické uvažovanie na komplexné problémy s otvoreným koncom, čím si osvojujú spôsob myslenia, ktorý je charakteristický pre matematickú a vedeckú prax.

Integrácia VZV do vyučovania (a prípravy učiteľov matematiky) otvára nové možnosti pre rozvoj argumentácie ako jadra matematickej gramotnosti. VZV vytvára kontext, v ktorom sa matematické myslenie rozvíja prostredníctvom autentických výziev, spoločného hľadania riešení a systematickej argumentácie. Takto chápané prepojenie argumentácie a VZV posilňuje kompetenčný prístup k učeniu sa matematiky a prispieva k formovaniu žiakov aj učiteľov ako aktívnych a reflektujúcich účastníkov procesu poznávania.

Grantová podpora:

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024 *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*.

LITERATÚRA

[1] Stylianides, A. J.: *Teaching mathematical reasoning and proof: Research and practice*, Rotterdam: Sense Publishers, 2007.

[2] Ball, D. L., Thames, M. H. a Phelps, G.: *Content knowledge for teaching: What makes it special?,* Journal of Teacher Education, Thousand Oaks: Sage, 2008, 59(5), s. 389–407, DOI 10.1177/0022487108324554.

[3] Hanna, G. a de Villiers, M.: *Rethinking proof in mathematics education*, Dordrecht: Springer, 2012.

[4] Bergqvist, T. a Lithner, J.: *Mathematical reasoning in teachers' presentations*, PME 36 Conference Proceedings, Taipei: PME, 2012

[5] Jeannotte, D. a Kieran, C.*: A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics*, Educational Studies in Mathematics, Dordrecht: Springer, 2017, DOI 10.1007/s10649-017-9761-8.

[6] NRICH: *Reasoning: The glue that makes mathematics make sense*, Cambridge: University of Cambridge, online dostupné na https://nrich.maths.org/10990

[7] Ministerstvo školstva, výskumu, vývoja a mládeže Slovenskej Republiky: *Vzdelávacie štandardy - Matematika a Informatika*, Bratislava: MŠVVaM SR, 2023, online, dostupné na https://www.minedu.sk/data/files/11820_marematika-a-informatika.pdf

[8] Szűcs, K. a Slavíčková, M.: *Reasoning and proving opportunities related to Thales' theorem in selected lower secondary textbooks from four different regions*,

Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14), Bozen-Bolzano: Free University of Bozen-Bolzano, 2025, hal-05161225

[9] Thompson, D. R., Senk, S. L. a Johnson, G. J.: *Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks*, Journal for Research in Mathematics Education, Reston: NCTM, 2012, 43(3), s. 253–295, DOI 10.5951/jresematheduc.43.3.0253

[10] Szűcs, K.: *Changing the significance of proof-related reasoning in upper-secondary school textbooks – a comparison between different German federal states and Hungary related to the law of sines*, In Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K. a Kónya, E. (Eds.), Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (s. 280–287), Budapest: Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME, 2023, online dostupné na hal-04412044v1.

[11] Johnson, L., Adams Becker, S., Estrada, V. a Freeman, A.: *The NMC Horizon Report: 2009 K-12 Edition*, Austin: The New Media Consortium, 2009.

[12] Nichols, M., Cator, K. a Torres, M.: *Challenge Based Learner User Guide* (Version 2.0), Washington D.C.: Digital Promise & Apple, Inc., 2016, online dostupné na https://www.challengebasedlearning.org

[13] Slavíčková, M., Velmovská, K., Kozánek Kiss, T., Vargová, M., Dillingerová, M., Miťková, E., Haverlíková, V., Vankúš, P., a Jánošková, K.: *Vzdelávanie Založené na Výzvach. Challenge-based education.* Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, 2024, online, dostupné na https://sites.google.com/view/cbe-vzv/domov?authuser=0

[14] Yackel, E. a Cobb, P.: *Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Reston: NCTM, 1996, DOI 10.2307/749877

[15] Boero, P.: Argumentation and mathematical proof: *A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Bologna, 1999

doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

ROZVÍJANIE METAKOGNITÍVNYCH SCHOPNOSTÍ ŽIAKOV PRI RIEŠENÍ PROBLÉMOVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

MATÚŠ STÁŇA

***ABSTRAKT**. V príspevku sa autor zameriava na možné využitie kombinatoriky v procese matematického objavovania na strednej škole. Jeho zámerom je obhájiť vhodnosť kombinatoriky ako nástroja pre rozvoj konštruktivistických prístupov na hodinách matematiky. Autor prináša niekoľko konkrétnych úloh, ktoré so žiakmi riešil a dopĺňa ich pedagogickými postrehmi z hodín.*

Kombinatorika ako podnet k objavovaniu v matematike

S kombinatorikou sa žiaci postupne zoznamujú počas štúdia už na základnej a potom na strednej škole. Spočiatku ide o úlohy zamerané na nájdenie vhodného spôsobu vypisovania možných výberov. Neskôr, keď už sa vypisovanie ukazuje ako neprakticky zdĺhavé, zavádzame nové pojmy a učíme sa vzťahy, ktoré výpočet zrýchľujú. Vtedy sa mozog študenta zoznamuje s kombináciami či variáciami. Vzniká tu však nebezpečenstvo, že zavedením výpočtových vzťahov sa žiak prirodzene radšej začína sústrediť na uskutočnenie algoritmov a nenechá priestor tvorivému mysleniu. Je to totiž rýchlejšie a jednoduchšie. Učiteľ potrebuje hľadať spôsoby, ako tento trend vyvažovať. Jedným zo spôsobov je aj formulácia vhodných úloh.

Ak chceme, aby problém mal potenciál podporovať tvorivosť žiaka, musí spĺňať niektoré charakteristiky. Úlohy z oblasti kombinatoriky tieto charakteristiky napĺňajú:

1. Obmedzenia vyplývajúce z reálneho kontextu úlohy bránia bezmyšlienkovitému použitiu naučených vzťahov. Inými slovami, riešenie vedie žiaka k použitiu vyšších poznávacích funkcií (analyzovať, hodnotiť, tvoriť).
2. Ak učiteľ zadáva úlohy premyslene, je pre žiaka ťažké riešiť ich natrénovanými postupmi. Žiak si zvyká riešiť problémy, ktoré rieši prvýkrát. Týmto spôsobom sa ťažisko práce posúva smerom k procesu riešenia, nie k výsledku.
3. Žiak má dosiahnuteľnú možnosť objavovať nové súvislosti a získavať nadhľad. Veľmi prirodzene sa tak odpútava od memorovania a presúva sa smerom k mysleniu.

Aj pri kombinatorike však možno ľahko formulovať úlohu, ktorá v istej fáze pravdepodobne má svoje opodstatnenie, no k premýšľaniu, tvorivosti a objavovaniu žiaka neprivedie. Vypočítaj počet kombinácií bez opakovania piatej triedy zo siedmich prvkov. To je príklad zadania, ktorého cieľom je pravdepodobne precvičiť vzťah na výpočet kombinácií bez opakovania. Pri zadávaní úloh na hodinách sme sa nechali inšpirovať knihou Emila Caldu Kombinatorika pro učiteľské studium (1996). Odporúčame ju aj ďalším učiteľom, je plná zaujímavých námetov. Konkrétnou témou, ktorú sme si vybrali a na hodinách rozpracovali, sú cesty v štvorčekovej sieti.

Cieľ výskumu

Cieľom výskumu bolo vybrať úlohu, ktorá má potenciál viesť žiaka k rozvíjaniu metakognitívnych zručností a sledovať reakcie žiaka po jej zadaní, počas jej riešenia a následne počas žiakovej spätnej väzby (sebahodnotenia).

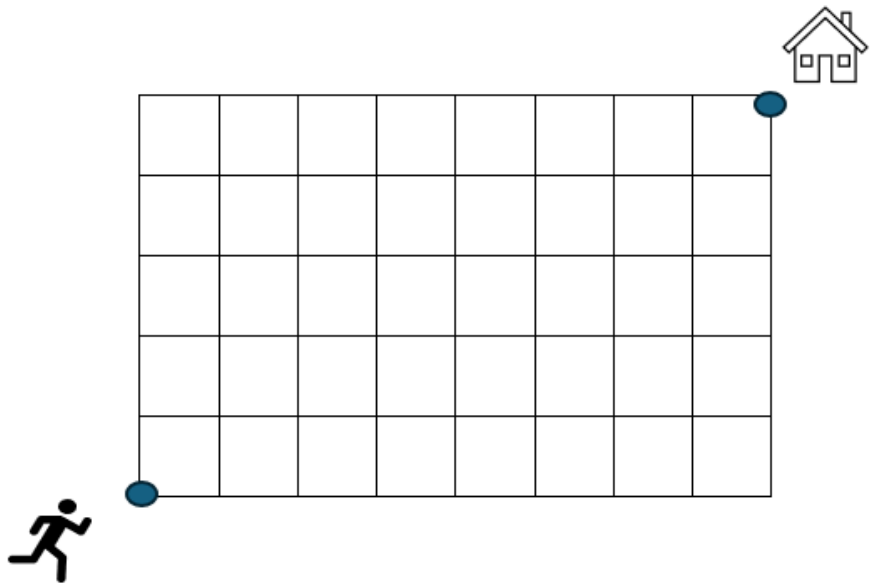
Teoretickým východiskom našej práce je koncepcia didaktického konštruktivizmu (Hejný, Kuřina)

Výskumná vzorka

Výskumnú časť sme realizovali priamo na hodine so žiakmi. Išlo o hodinu „Seminár z matematiky“, ktorú má škola vo svojom vzdelávacom programe formulovanú ako voliteľný predmet. Cieľom tohto predmetu nie je primárne príprava na maturitnú skúšku, ale skôr rozvoj všeobecných matematických zručností pre dlhodobejší horizont („učenie sa pre život“). Predmet tak negeneruje na učiteľa tlak v podobe dodržania štandardov. Učebný plán je voľnejší. Rovnako aj výber tém. Navyše, v rozvrhu hodín je predmet zaradený ako dvojhodinovka, čo znamená, že žiaci môžu riešiť problém dlhšie ako len 45 minút. Takáto forma a zameranie predmetu vytvára vhodný základ pre zaraďovanie „experimentálnych“ úloh a postupov. Výskumu sa zúčastnili žiaci štvrtých ročníkov a oktávy (22 žiakov).

Úloha

Na obrázku je štvorčeková sieť. Panáčik, ktorý stojí v ľavom spodnom rohu siete, sa potrebuje dostať domov do pravého horného rohu. Chce tak urobiť čo najrýchlejšie, preto sa hýbe vždy len doprava alebo hore. Nikdy sa neposunie doľava alebo dole. Koľkými spôsobmi sa môže dostať do cieľa?



Obrázok 13: Zadanie úlohy

Analýza procesu riešenia

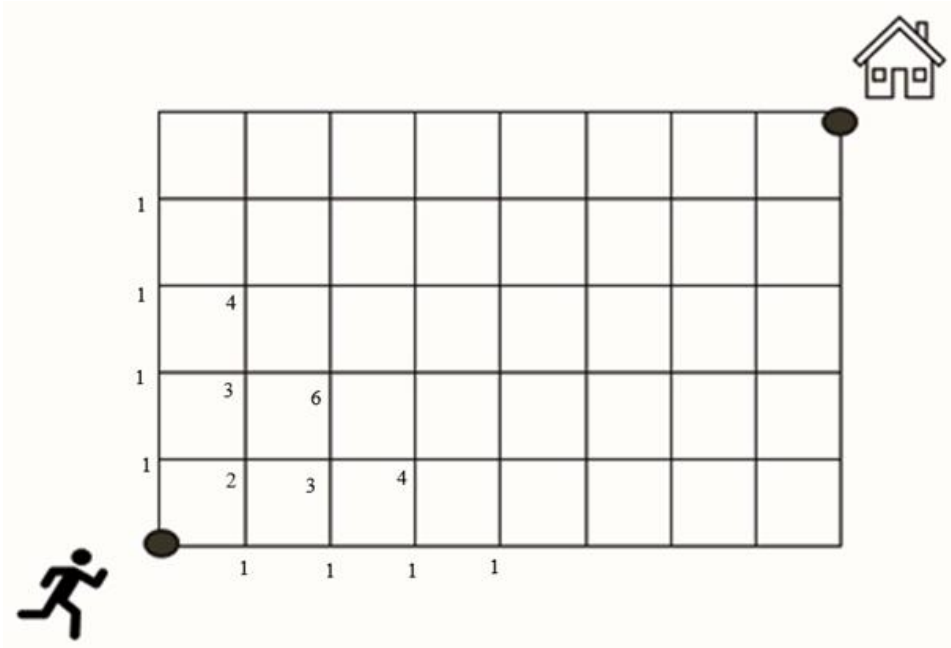
Žiaci dostali na začiatku hodiny túto úlohu. Informácia, že ide o problém z prostredia kombinatoriky, nezaznela. Učiteľ umožnil žiakom pracovať v dvoj až trojčlenných skupinách a tí sa pustili do práce. Prvé reakcie boli prirodzené. Chvíľu žiaci nevedeli, kde začať a pýtali sa učiteľa, ako majú úlohu riešiť. Učiteľ však musí tento počiatočný tlak vydržať a žiakom

nič nenaznačiť, nechať ich začať hľadať. Tento moment je možno najzložitejší. Iniciovať atmosféru hľadania.

V skupinách sa začalo experimentovať. Prvé kroky boli úplne očakávané a aj správne. Žiaci začali niekoľko cestičiek vykresľovať, začali spolu rozprávať a premýšľať. Po krátkom čase sa ozval „kombinatorický inštinkt“, ktorý ich viedol k tomu, aby vykresľovanie vhodných cestičiek nebolo náhodné, ale malo určitý systém.

Nasledovali prvé objavy. Napríklad, že dostať sa na pravý alebo horný okraj siete znamená už jednoznačné dosiahnutie cieľa. Učiteľ v procese riešenia pracoval ako mentor. Prechádzal jednotlivými skupinami. Žiakom pomáhalo, keď si mohli svoje teórie skúšať v menších sieťach. Výhodný z ich pohľadu bol štvorcový tvar siete.

Žiacke riešenia sa potom rozdelili v podstate na dve skupiny. Prvá skupina cestičky postupne „spočítavala“. Na nasledujúcom obrázku je znázornené toto riešenie. Čísla v jednotlivých mrežových bodoch znamenajú, koľkými cestami sa dá k tomuto bodu dostať zo štartu. Keďže do každého mrežového bodu vieme prísť z bodu pod ním alebo z bodu naľavo od neho (ak tieto body existujú), tak počet ciest je súčtom počtu ciest, ktoré viedli do bodu pod skúmaným mrežovým bodom a súčtom ciest, ktoré viedli do bodu vľavo od skúmaného mrežového bodu.



Obrázok 14: Spôsob riešenia založený na spočítavaní ciest

Iní žiaci začali cesty „kódovať“ rôznymi premennými. Napríklad PPPPPPPPHHHHH znamenalo cestu po obvode siete, najprv po spodnej strane až do pravého dolného rohu a potom už len hore. Ďalšie skupiny využili iné kódovanie, napr. pomocou šípok, no typ značky nie je podstatný. Princíp bol, že každú cestu je možné zakódovať pomocou ôsmich znakov P a piatich znakov H. Zároveň, každé rozdelenie týchto znakov predstavuje jednu cestu. V tomto bode už bolo všetkým jasné, že ide o úlohu z kombinatoriky. Aj pri tomto prístupe sa niektoré skupiny rozišli. Časť vnímala úlohu ako kombinácie, t. j. určovali, koľkými spôsobmi môžu vybrať miesto na umiestnenie znaku H, resp. P. Pri výbere miest

nezáleží na poradí ich výberu, preto ide o kombináciu. Druhá skupina žiakov vnímala úlohu ako zápis „slova“ z písmen P a H. V tomto prípade teda záleží na umiestnení písmena a ide o variáciu.

Pozorovania a závery

Základné pozorovania môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

1. Je pozitívne, že žiaci sa úlohy „nezľakli“. Pristúpili k nej ako ku problému a snažili sa ho riešiť.
2. Netrvalo dlho a žiaci experimentovaním objavovali nové súvislosti.
3. Žiacke riešenia sa významne odlišovali a aj pre žiakov bolo veľkým objavom, že viaceré ich postup sú napriek svojej rôznosti správne.
4. Veľkým prekvapením bol pre žiakov fakt, že úlohu možno riešiť aj ako kombináciu aj ako variáciu (permutáciu).
5. Pre rýchlejšie skupiny žiakov učiteľ úlohy obmieňal (pozri prílohu).
6. Riešenie úlohy neumožňovalo žiakom len pasívne aplikovať naučené vzťahy, ale viedlo ich ku skúmaniu. Náročnosť úlohy je primeraná. Žiak má schopnosti, aby niečo nové objavil.

LITERATÚRA

[1]. Calda, E. 1996. Kombinatorika pro učitelské studium. Praha: MATFYZPRESS. ISBN 80-85863-13-8.

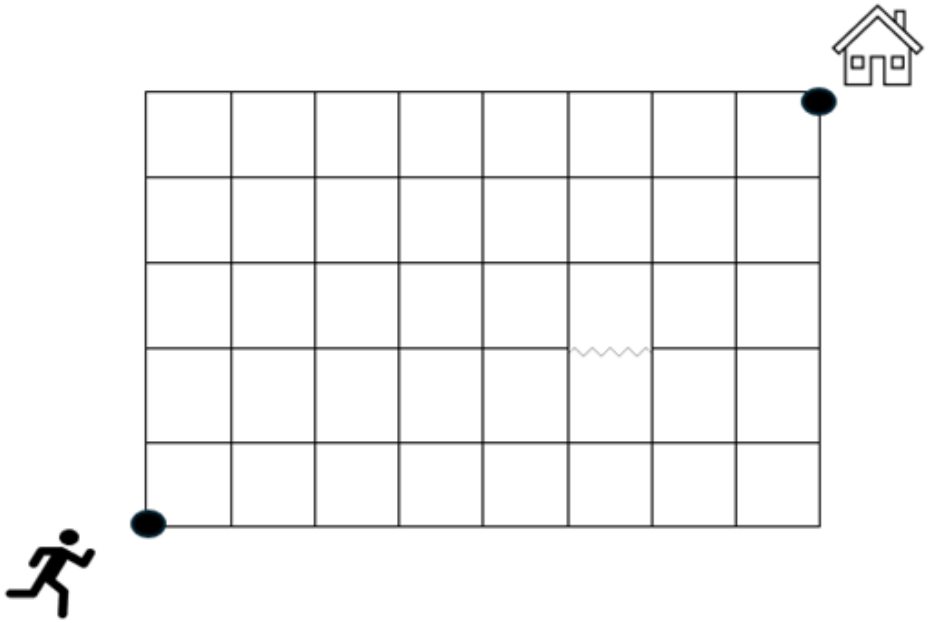
[2]. Hejný, M. a kol. 1987. Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-00014-7.

[3]. Hejný, M. – Novotná, J. – Stehlíková, N. 2004. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova. ISBN 80-7290-189-3.

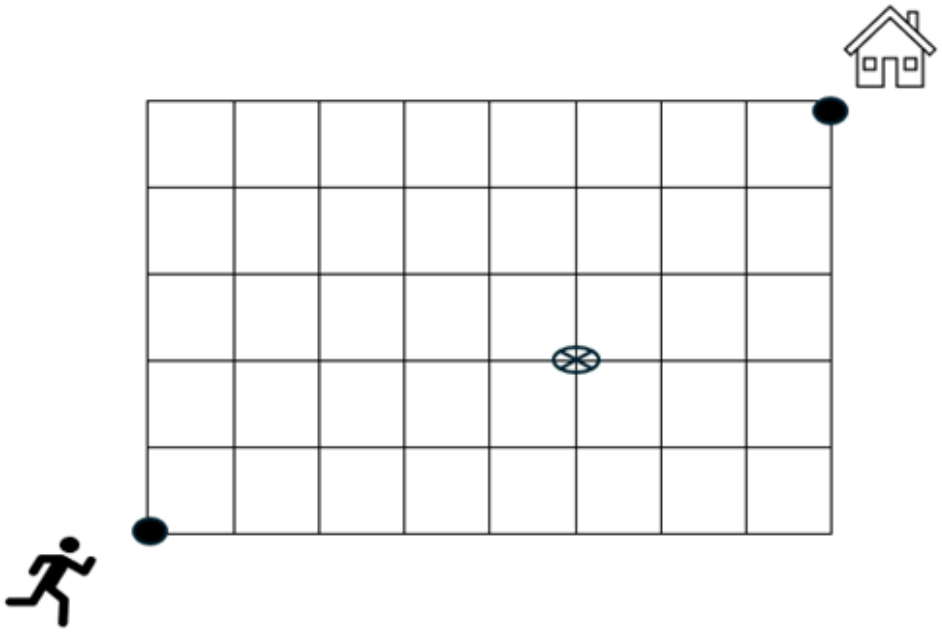
PhDr. PaedDr. Matúš Stáňa
Gymnázium Michala Miloslava Hodžu
M. M. Hodžu 860/9
SK – 031 01 Liptovský Mikuláš
Matus.Stana@gymlm.sk

Príloha

Variant úlohy s jednou cestou v rekonštrukcii (touto cestou sa nesmie prechádzať).



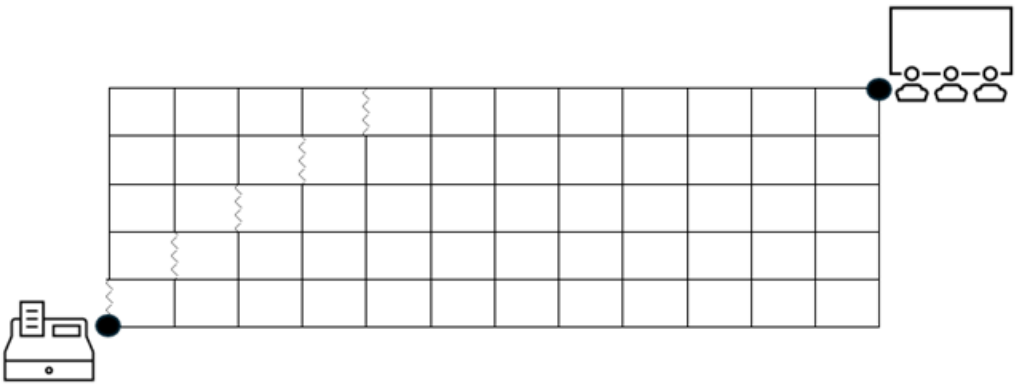
Variant úlohy s jednou križovatkou v rekonštrukcii (týmto mrežovým bodom sa nesmie prechádzať).



Úloha o nepripravenom pokladníkovi

Pokladník predáva lístky do kina. Cena lístka je 5 €. Na predstavenie chce ísť 17 ľudí, z čoho dvanásti majú pripravenú päťeurovú bankovku, no piati majú len desaťeurovú bankovku. Pokladník si nepripravil žiadnu hotovosť. Aby mohol vydávať, musia sa kupujúci zoradiť tak, aby získal pokladník dostatok päťeurových bankoviek na vydávanie predtým, ako príde niekto, komu bude potrebné vydať. Koľkými spôsobmi sa môžu kupujúci zoradiť, aby pre pokladníka nevznikol problém?

Grafické znázornenie úlohy o pokladníkovi pomocou štvorčekovej siete



MOBILNÝ ČÍSELNÍK A MATEMATIKA

VIERA UHERČÍKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku budú uvedené možnosti motivácie prostredníctvom úloh zadaných v prostredí mobilného číselníka. Úlohy sú vhodné na začiatku vyučovacej hodiny matematiky ako matematická rozcvička.*

Úvod

Matematika nás sprevádza celým životom. Rozvíja v nás vlastnosti a schopnosti, ako je napr. priestorová predstavivosť, ktoré môžu prispieť podľa psychológov dokonca k našej životnej úspešnosti. O čo väčšie možnosti majú vo výbere štúdia, ako aj v uplatnení v spoločnosti tí, ktorí ovládajú matematiku?!

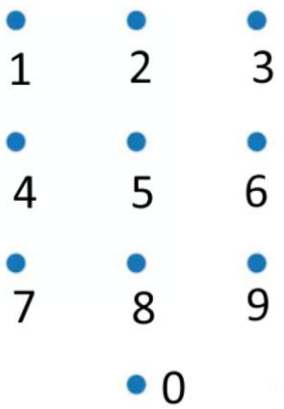
Vzťah k matematike úzko súvisí s prístupom vyučujúceho tohto nie práve obľúbeného predmetu. Významnú úlohu zohráva dostatočná motivácia.

V súčasnosti je medzi mladými veľmi obľúbený mobil. K jeho používaniu je veľa oprávnených výhrad. Ale uvažovala som, či by sa nedal tento pozitívny vzťah využiť k motivácii pri vyučovaní matematiky. Netreba mať mobil pri sebe. Stačí, keď si predstavíme mobilný číselník s malou úpravou. Výsledky tohto môjho uvažovania som zhrnula do štyroch kapitol.

Úlohy sú vhodné:

- na začiatok vyučovacej hodiny ako matematická rozcvička,
- na opakovanie učebnej látky,
- na rozvíjanie priestorovej predstavivosti,
- na rozvíjanie tvorivosti.

K úlohám je vhodný mierne upravený mobilný číselník (MČ). Vyžadujeme, aby boli jednotlivé číslice umiestnené rovnomerne, v uzloch štvorcovej siete.



Obrázok 1: mobilný číselník

Nasledujú 4 kapitoly zadaní:

- A) Hráme sa na výskumníkov
- B) Hľadáme písmená
- C) Zaujímavé geometrické útvary
- D) Rôzne obrázky

A) Hráme sa na výskumníkov

Úloha.

Skúmame, čo vieme povedať o jednotlivých čísliciach na MČ. Aké sú to číslice? Možné témy sú:

1.	Prirodzené čísla	6.	Nepárne čísla
2.	Prvočísla	7.	Mocniny
3.	Prvočíselné dvojčatá	8.	Odmocniny
4.	Zložené čísla	9.	Dokonalé číslo
5.	Párne čísla	10.	Čo vieme o nule

Obrázok 2

V zaujímavej knihe od autora (Beatty a Jackson, 2013) *Matematika, 100 objavov, ktoré zmenili históriu*, sa dočítame:

„Matematika u Grékov, postavená na geometrii, nevyžadovala nulu až do druhého storočia pred n.l., keď ju Hipparchos zaviedol na použitie v astronómii. O tisíc rokov neskôr povýšili nulu na úroveň ostatných čísel indickí matematici, ktorí ukázali, že výsledkom niektorých výrazov je nula. Tento objav vydláždil cestu záporným číslam, t.j. číslam menším ako nula."

Viete o daných čísliciach niečo viac? Kto vie, nech odpovie!

B) Hľadáme písmená

Úloha. Pospájajme čiarami nasledovné číslice mobilného číselníka.

O aké písmená ide, keď zadáme:

1) 7, 4, 1, 5, 9, 6, 3 (*Výsledok: N.*)
2) 7, 4, 1, 5, 3, 6, 9 (*Výsledok: M.*)
3) Ktoré písmená vieme takýmto spôsobom vytvoriť? (*Výsledok: E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, X, Y, Z.*) Niektoré písmená sa dajú zobraziť aj rôznymi spôsobmi. Môžeme ich znázorniť aj v rôznych polohách. Napr. 9, 8, 7, 5, 1, 2, 3.
4) Vieme takto vytvoriť aj nejaké číslice? (*Výsledok: 1, 4, 7.*)

C) Zaujímavé geometrické útvary

Hovoríme číslice a žiaci majú povedať o aký útvar ide, resp. o koľko rôznych útvarov.

Skúmame vzniknuté geometrické útvary a ich vlastnosti.

Snažíme sa nakresliť útvar jedným ťahom.

Vymýšľame si nové útvary, prípadne ich pomenujeme.

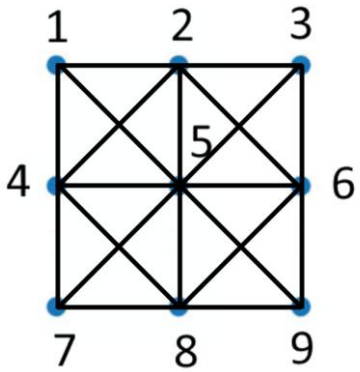
Pri zadávaní útvarov si môžeme:

Zapamätať alebo zapísať číslice a potom geometrický útvar nakresliť.

Nakresliť obrázok a následne priradiť číslice, ako vznikol.

Úloha.

1) Pospájajme čiarami nasledovné číslice mobilného číselníka:
   7, 4, 1, 2, 3, 6, 9, 8, 7.
   O aký útvar ide? (*Výsledok: štvorec.*)
2) Pospájajme čiarami nasledovné číslice mobilného číselníka:
   2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 1, 2, 6, 8, 4, 2.
   O aký útvar ide? (*Výsledok: štvorec v štvorci.*)
   Nakreslite tento útvar jedným ťahom. (*Výsledok: napr. 6, 9, 8, 7, 4, 1, 2, 3, 6, 8, 4, 2, 6.* Nájdite aj ďalšie riešenia.)
3) Koľko rôznych geometrických útvarov na obrázku 3 vidíte? Vymenujte ich číslami. (*Výsledok: štvorce, obdĺžniky, trojuholníky, rovnobežníky, lichobežníky.*)



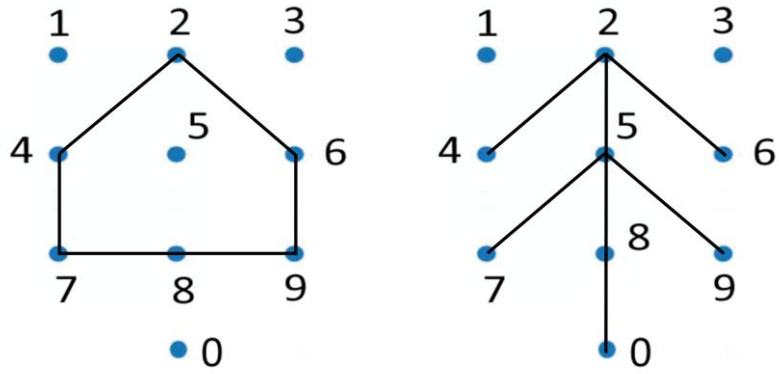
Obrázok 3

D) Rôzne obrázky

Vymyslime si podľa fantázie rôzne obrázky. Nasledujúce, ako aj ďalšie obrázky vymysleli moji šikovní a motivovaní vnuci.

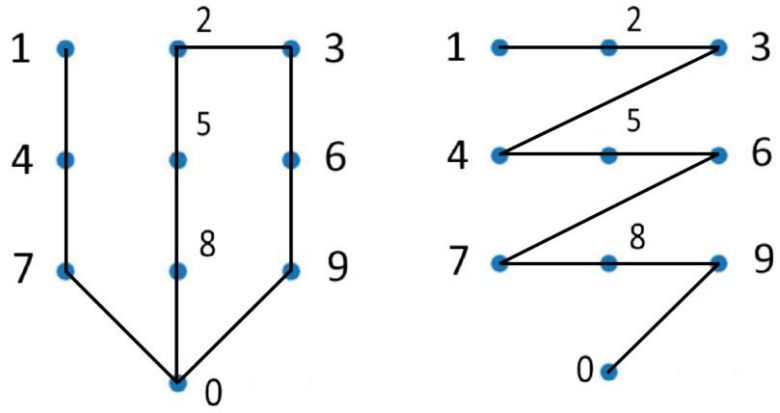
Úloha. Spájaním číslic na mobilnom číselníku tvoríme rôzne obrázky a pomenujeme ich:

1) 8, 7, 4, 2, 6, 9, 8 (*Výsledok: domček.*)
2) 4, 2, 6; 7, 5, 9; 2, 5, 8, 0 (*Výsledok: stromček.*)



Obrázok 4

3) 1, 4, 7, 0, 9, 6, 3, 2, 5, 8, 0 (*Výsledok: „slimák“.*)
4) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 – (*Výsledok: „slalom“.*)



Obrázok 5

Záver

Úlohy na mobilnom číselníku umožňujú:

- precvičovať a opakovať matematické pojmy hravou formou,
- pripravovať úlohy s rôznou obťažnosťou,
- rozvíjať predstavivosť, tvorivosť, ako aj komunikáciu,
- riešiť úlohy aj formou súťaže, prípadne aj na čas,
- realizovať diferencovaný prístup pri vyučovaní.

Ako darček na záver vám ponúkame bonusový obrazec, ktorý sa skladá z troch súvislých čiar a na ktorom si môžeme precvičiť všetko čo bolo v článku uvedené:

2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 1, 2, 6, 8, 4, 2, 5, 8, 0

7, 0, 9

4, 5, 6

Aké útvary tam nájdete?

Prajeme Vám veľa úspechov a radosti pri riešení úloh.

LITERATÚRA

[1] Beatty, R., & Jackson, T. (2013*). Matematika: 100 objavov, ktoré zmenili históriu* ([1. vyd.], přeložil Marian MARIČÁK). Slovart.

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com

STREDNÉ HODNOTY

MICHAELA VARGOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci príspevku budeme prezentovať sekvenciu úloh zameraných na hľadanie stredných hodnôt. Úlohy sú zostavené v súlade s princípmi konštruktivistického vyučovania a cieľmi kurikulárnej reformy.*

Úvod

V rámci našej pracovnej dielne sme predstavili sekvenciu úloh zameranú na pojem očakávaná (stredná) hodnota. Tieto úlohy sú určené pre žiakov strednej školy a snažíme sa v nich o konštruktivistická budovanie daného pojmu (Piaget, & Inhelder, 1967). Gradácia úloh smeruje k postupnému prepojeniu základného konceptu aritmetického priemeru s pojmom váženého priemeru a napokon so všeobecným výpočtom očakávanej hodnoty. V nasledujúcej časti príspevku uvedené úlohy podrobnejšie predstavíme.

Použitá sekvencia úloh

Prvá úloha (obrázok 1) opakuje základné pojmy a vedie k výpočtu aritmetického priemeru hodnôt.

- Hádžeme kockou 60-krát. Tento pokus opakujeme dostatočne veľakrát.
  - A) Aká je predpokladaná (očakávaná) početnosť padnutia hodnoty 1?
  - B) Aká je početnosť padnutia hodnôt B) 2, C) 3, D) 4, 5 alebo 6?
  - C) Aká je pravdepodobnosť padnutia 6 na kocke v tomto pokuse? Aká je očakávaný pomer počtu padnutia 6 na kocke k počtu hodov v tomto pokuse?
  - D) Aká je predpokladaná priemerná hodnota hodov?

Obrázok 1: úloha č. 1

V nasledujúcej úlohe (obrázok 2) žiaci pracujú s „falošnou“ kockou, pri ktorej majú jednotlivé steny rôzne pravdepodobnosti padnutia. Na riešenie úlohy preto musia využiť vzťah pre vážený priemer.

- Majme falošnú kocku. Číslo 6 na nej padá s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$.

Ostatné hodnoty padajú s pravdepodobnosťou $\frac{1}{10}$. Kocku hodíme 60-krát. Tento experiment opakujeme dostatočne veľakrát.

A) Aký je očakávaný počet padnutia hodnôt 6 v týchto 60 hodov?

B) Aký je očakávaný počet padnutia hodnôt B) 1, C) 2 alebo 3.

C) Aká je očakávaná priemerná hodnota jedného hodu?

Obrázok 2: úloha č. 2

Tretia úloha (obrázok 3) vedie k porovnaniu výpočtu očakávanej hodnoty pomocou početností padnutia jednotlivých súčtov na dvoch „falošných“ kockách, resp. pomocou pravdepodobností týchto súčtov.

- Majme **dve falošné kocky** z predošlej úlohy. (6 na nej padá s pravdepodobnosťou 1/2.Ostatné hodnoty padajú s pravdepodobnosťou 1/10.) Obe kocky naraz hodíme 600-krát. Tento experiment opakujeme dostatočne veľakrát.
- V nasledujúcej tabuľke vyplňte očakávané početnosti jednotlivých padnutých súčtov. Na základe týchto početností stanovte očakávanú strednú hodnotu padnutého súčtu.
- Doplňte v tabuľke, aká je pravdepodobnosť padnutia jednotlivých súčtov. Dokážete vyjadriť očakávanú strednú (priemernú) hodnotu padnutého súčtu pomocou týchto pravdepodobností?

Obrázok 3: úloha č. 3

Posledná úloha (obrázok 4) vedie k aplikácii pojmu očakávanej hodnoty v kontexte hodnotenia „výhodnosti“ navrhnutej hry. Pri výpočte očakávanej hodnoty môžu žiaci uplatniť buď prístup založený na váženom priemere, alebo postup vychádzajúci z pravdepodobnostného výskytu jednotlivých farieb. Úlohou vyučujúceho je následne sformalizovať oba prístupy a diskutovať ich vhodnosť v rôznych typoch situácií. Počas riešenia sekvencie úloh si žiaci pravdepodobne uvedomia, že v niektorých prípadoch sú oba prístupy ekvivalentné. Tieto zistenia je vhodné v záverečnej diskusii zovšeobecniť a prepojiť s formálnym vyjadrením pojmu očakávanej hodnoty.

- Hráme hru, v ktorej vyťahujeme náhodne jednu farebnú guličku z vrecka. Vo vrecku sa nachádza 20 guličiek: 2 červené, 3 žlté, 4 modré, 5 zelených a 6 čiernych guličiek. Po ťahu guličku vraciame do vrecka a dostaneme vyplatenú výhru resp. prehráme určitú sumu, podľa priloženej tabuľky.

Červená	Žltá	Modrá	Zelená	Čierna
-10 EUR	5 EUR	2 EUR	7 EUR	-15 EUR

- Myslíte si, že je táto hra pre vás výhodná?
- Ak by sme hru opakovali dostatočne veľakrát, aká by bola očakávaná stredná hodnota výhry resp. prehry?

Obrázok 4: úloha č. 4

Záver

V príspevku sme predstavili pracovnú dielňu zameranú na zavádzanie pojmu očakávanej (strednej) hodnoty na strednej škole. Tento pojem sme rozvíjali prostredníctvom premyslenej sekvencie matematických úloh, ktoré nadväzujú na známy vzťah pre aritmetický priemer. Ten sme následne zovšeobecnili na vzťah pre vážený priemer a ďalej na výpočet očakávanej hodnoty využívajúci pravdepodobnosti jednotlivých javov.

Veríme, že predstavená sekvencia úloh môže byť inšpiráciou pre vyučovanie pojmu očakávanej (strednej) hodnoty a prispieť k jeho hlbšiemu pochopeniu zo strany žiakov.

Grantová podpora

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024: *Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní*.

LITERATÚRA

[1] Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). The Child's Conception of Space. See especially "Systems of Reference and Horizontal-Vertical Coordinates." p. 375-418. New York: W. W. Norton &Co.

[2] Harman, R. (2009). Náhodná premenná a jej stredná hodnota. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského. http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/misc/SUS_QED.pdf

Mgr. Michaela Vargová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: michaela.vargova@fmph.uniba.sk

doc. PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

Dva dni s didaktikou matematiky 2025. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	126
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
	Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2025

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978-80-8147-164-3
EAN 9788081471643