# DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2024

## ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Bratislava 5. – 6. 9. 2024

**ORGANIZÁTOR**

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

**PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR**

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
JANA HAVLÍČKOVÁ
EMÍLIA MIŤKOVÁ
PETER VANKÚŠ
MICHAELA VARGOVÁ

**EDITOR**

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2024

**ISBN 978-80-8147-154-4**

# OBSAH

Milé kolegyne, milí kolegovia.

Deviaty ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky sme organizovali v priestoroch Fakulty matematiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Teší nás, že každý rok pribudnú nové tváre na našej konferencii a dúfame, že sa s radosťou vrátia aj na ďalšie pripravované ročníky, či už s príspevkom, alebo bez neho.

V mene programového a organizačného výboru ďakujem aj študentkám a študentom na rôznych stupňoch štúdia na našej fakulte, ktorí pomáhali s organizáciou konferencie a prispeli tak k jej hladkému priebehu. Poďakovanie patrí projektu KEGA č. 076UK-4/2024, tiež kolegom z oddelenia propagácie fakulty za obrazovú dokumentáciu a videozáznamy z vybraných príspevkov. Tie si budete môcť postupne pozrieť na našom FMFI YouTube kanáli.

Tešíme sa na stretnutie s Vami v septembri 2025 na výročnom, desiatom ročníku našej konferencie!

za programový a organizačný výbor želá
Mária Slavíčková

# PREDNÁŠKA 1: BARIÉRY PRI ZVLÁDANÍ MATEMATIKY

MARTA HORŇÁKOVÁ

**Abstrakt.** *Príspevok sa venuje najčastejším dôvodom, pre ktoré má dieťa problémy s matematikou napriek dobrému intelektu. V kontexte diagnostiky a možností podpory pojednáva o poruchách pozornosti, o funkčných oslabeniach, distrese, naučenej bezmocnosti, ako aj o ťažkostiach s porozumením písanému textu.*

## Úvod

Ďakujem za dôveru a príležitosť, ktorá sa mi dostala pozvaním. Bolo veľmi priateľské a ja som ho neodmietla. Hoci aj ja som iba na ceste pochopenia bariér pri zvládaní matematiky a hľadania možností zlepšenia. Myslím, že sa pri tejto téme môžeme vzájomne obohatiť, lebo vy máte cenné skúsenosti.

Pozývateľom na túto cestu bol môj syn. Pred začiatkom školskej dochádzky počítal do sto, poznal písmená a do školy sa tešil. Nečakali sme problémy. Raz doma v novembri sa pri hre na školu začal zajakávať. To bolo nové. Išla som do školy. Pani učiteľka si nič také nevšimla. Pekne písal, čítal ako ostatní.. Následne si ho viac všímala. Videla, že najradšej len sedí, díva sa do okna a vyhýba sa komunikácii. Objednali sme sa do poradne. Čakali sme štyri mesiace. Poruchy učenia sa nepotvrdili. Odporučili mám návštevu u psychiatra. Ďalšie dva mesiace čakania. Dostal lieky proti úzkosti. Tlmili tak dôkladne, že bol v škole celkom mimo. Keďže bol augustový, odporučili nám prerušenie školskej dochádzky.

Po pol roku bol znova prvákom. Hneval sa, lebo všetci jeho kamaráti od škôlky chodili o ročník vyššie. Teraz čítal plynne, s dobrou intonáciou. Pri diktáte napísal prvú a poslednú slabiku a medzi nimi čarbance V matematike raz vedel, raz nie. Doma správne, v škole často zle. Bol nešťastný a často chorý. Nenašla som nikoho, kto by mi vedel povedať, kde má problém. Raz, po dlhšej neprítomnosti v škole v ďalšej triede, keď brali násobilku a delenie, všimla som si, že akonáhle začali s delením, násobenie celkom zabudol. Potom sa naučil aj deliť, ale rôzne druhy príkladov mu robili problém. Akoby nevidel znamienka. Keď prišli k učivu s desatinnými číslami, bol chorý dlhšie. Zdalo sa mi to pre neho v učebnici príliš náročné a tak som skúsila hru: „Pozrime sa, čo sa dá s týmito číslami všetko urobiť!“. V jedno popoludnie sme skúmali sčitovanie, odčitovanie, delenie i násobenie. A on to zrazu vedel aj na druhý deň a potom aj v škole. Uvedomila som si, že sa mu lepšie učí inak – nie postupne a nácvikom, ale hrou a v celku. Tak sme sa potom spolu učili celú základnú školu. Každý predmet bol pre neho akoby v inom jazyku. V škole mu niektorí učitelia dôverovali a tolerovali občasné zlyhania (zvládol prípravu doma len na maximálne dva predmety), vtedy mal výborný prospech. U tých, ktorí ho videli ako lajdáka, bol na prepadnutie. Keď brali Mendelejevovu tabuľku prvkov, vyzeralo to na ten druhý prípad: nezvládol sa postupne každý týždeň naučiť názvy a značky piatich prvkov. Pripravila som mu ich farebne spracované a celú tabuľku so všetkými prvkami sa naučil za pol hodinu.

Ako ôsmak bol na neuropsychologickom vyšetrení. V testoch preukázal nadpriemernú neverbálnu inteligenciu, tá verbálna bola v nižšom priemere. Myslel v obrazoch, a stále mal problém porozumieť vetám, lebo počul len prvú a poslednú slabiku v slove. V slovných matematických úlohách preto potreboval zadanie prečítať opakovane a aj nahlas (to v triede nebolo možné). Doma, alebo aj v škole bez stresu, mu to išlo lepšie. V poslednej triede základnej školy mu hrozilo, že prepadne z matematiky. Učiteľ bol presvedčený, že vôbec nič z učiva nevie: „a ešte chce odpisovať“. Pri písomke nazeral susedom do zošita, chcel si overiť, či úlohu pochopil rovnako. Odpisovať bolo nad jeho sily. Vedela som, že sa vždy učil a vedel. Bol už prijatý na umeleckú školu a tak som bola prosiť učiteľa, aby mu dal ešte šancu si to opraviť. Jedinou možnosťou bola záverečná písomka (tie boli väčšinou katastrofou). Aby „neopisoval“, bol sám zamknutý v kabinete. Vypočítal správne všetky príklady, iba v poslednom zabudol dať desatinnú čiarku. Na vysvedčenie mal štvorku, ale mohol ďalej študovať. Zmaturoval s vyznamenaním.

Aké bariéry môžeme tomto príbehu identifikovať?

- Spôsob učenia – mu vyhovovalo učivo vo veľkých celkoch.
- Porozumenie výkladu učiteľa, bolo to o faktoch a on myslel v obrazoch.
- Nízka sebadôvera – informáciám často rozumel inak, ako ostatní, myslel si, že je hlúpy.
- Situácie bezmocnosti. Škola znamenala pre neho stres natoľko, že bol často chorý a rástol iba cez prázdniny. Bol osamelý.
- Multitasking - nutnosť spracovať naraz viac informácií (napr., počúvať, odpísať príklad, riešiť slovné úlohy).

Nikdy mu neboli diagnostikované poruchy učenia, ani dyskalkúlia.

Ďalší príklad – tohtoročného prváka. Chlapec v dojčenskom veku prekonal zápalové ochorenie mozgu, následne bol v detskom domove, v dvoch rokoch bol adoptovaný. V rodinnom prostredí (napriek prognóze imobility začal chodiť), prestal sa báť a napredoval. Bol vnímavý, súcitný, láskavý, snaživý (veľmi rád pomáhal pri varení – v zvládol sám palacinky). V akademických zručnostiach ale zaostával a preto mal odloženú školskú dochádzku. Tam absolvoval Eľkoninovú prípravu (Mikolajová, Tokárová, Sümegiová, 2014). Po zaškolení sa adaptoval dobre, snažil sa, mal kamaráta. Škola okrem poznámky, že je pomalý a lenivý, žiadne problémy nehlásila. V druhom polroku prišiel domov nezvykle smutný, lebo „pani učiteľka z neho ochorela, pretože sa nevie „naučiť písmená“. Matka bežala do školy. Vypočula si, že chlapec nevie čítať a ba nepozná ani žiadne písmeno. (Doma zvyčajne čítali najprv spolu, keď čítal sám, opakoval zapamätané tak dobre, že to vyzeralo ako čítanie.) Problémy mal aj v matematike – nespájal si tvar číslic s predstavou množstva. Vždy znova používal prsty. Doma správne spočítal predmety do desať a riešil názorné príklady ale ak boli napísané, už nevedel. Nasledoval maratón vyšetrení – potvrdili zaostávanie. V pozadí bola slabá vizuálna pamäť. Ochorenie mozgu v dojčeneckom veku viedlo k poškodeniu sietnice (astigmatizmus) a k obmedzeniu motorického vývinu. K podnetovej deprivácii sa pridala aj emocionálna (vzťahová). Jeho zraková aj priestorová pamäť sa nemohli dobre rozvíjať.

Teraz po štyroch mesiacoch odbornej starostlivosti pozná všetky písmená aj čísla a dúfa, že sa už naučí čítať a počítať. Je nešťastný, že už nebude so svojimi spolužiakmi. Škola odporučila opakovanie ročníka. Keby pomoc prišla hneď, dopadlo by to zrejme inak.

Aké bariéry sa ukázali:

- Oslabené vnímanie priestoru a slabá vizuálna pamäť.
- Úzkostné nastavenie, dieťa sa rýchlo stiahlo a nehovorilo o svojich problémoch.
- Vysoká únavnosť.
- Slabá komunikácia s rodičom a odborníkmi (obehať vyšetrenia a dojednať starostlivosť musel rodič zo svojej iniciatívy).

Oba príbehy ukazujú, že bariéry pri zvládaní matematiky môžu mať veľmi komplikované príčiny i prejavy. Bez ich pochopenia nie je možné ani posúdiť závažnosť a ani nájsť cestu pomoci.

**Dyskalkúlia, strach, úzkosť**

Okolo dyskalkulie je hodne nejasnosti. Podľa Pokornej (2010, s. 56) sa jej dostala pozornosť až v 70. rokoch min. storočia (vo svete aj u nás). Košč (1974) ju charakterizoval ako neuronálnu poruchu: spôsobenú poškodením častí mozgu používaných pri matematických výpočtoch bez súčasného poškodenia všeobecných duševných schopností. Popísal aj vývinovú dyskalkúliu, ktorá má pôvod v génovom alebo perinatálnymi vplyvmi podmienenom narušení tých častí mozgu, ktoré umožňujú používať matematické operácie.

(Kumorovitzova a Novák (1994) spoločne vydali prvú metodiku pre prácu s dyskalkulickými žiakmi: Nauč mě počítat. Dnes už je viac príručiek a odborníkov, ale dostupnosť a intenzita starostlivosti stále nie je optimálna. Oproti svetu sme stále na začiatku.)

**Tabuľka 1:** *Prehľad chápaní pojmu dyskalkúlia*

| Dyskalkúlia - bežné tvrdenia | Iné tvrdenie |
|---|---|
| je neuronálna porucha, oslabenie oblastí mozgu, ktoré umožňuj matematické operácie | nie je spojená s poškodením mozgu (MKCH – 10) |
| typické je, že iné intelektové danosti a schopnosti sú veľmi dobré | môže byť prítomná aj u detí s mentálnym postihnutím (Matejček) |
| môže byť spojená aj so špecifickými poruchami učenia | je vývinová porucha – špecifická porucha učenia |
| stav, ktorý ovplyvňuje schopnosť nadobúdať matematické zručnosti v školskom veku | je to proces, ktorý má korene v prenatálnom veku a v okolnostiach vývinu – treba ho chápať v kontinuu |
| ide o špecifický a pretrvávajúci problém s pochopením čísel | nejde len o čísla, ale aj o problém s chápaním vzťahov, vnímaním priestoru, zvukov |
| dôsledkom nevhodných didaktických postupov a zanedbávania v prostredí | nesmie sa spojiť s didaktickými postupmi alebo inými dennými aktivitami |
| problémy sú len v matematike | sú psychické, psychosomatické, spojené s vyčlenením, s horším uplatnením, sú ohrozujúce pre osobnostný vývin |

Moderné chápanie prináša Medzinárodná klasifikácia funkčnej schopnosti, disability a zdravia (MKF, WHO, 2001) ponúka jednoduchšie ponímanie. Hovorí oslabených funkciách počítania (0 172) a rozlišuje jednoduché (b1720), komplexné (b1721), špecifikované (b1728) a nešpecifikované (b1729) funkcie počítania a percentuálne hodnotí komplexnosť funkčných schopností. Hľadá odpoveď na otázku, nakoľko porucha sťažuje bežný život a ohrozuje zdravie, hľadá možnosti ako pochopiť faktory v systéme poruchy a nájsť možnosti podporiť to zdravé a oslabiť patogénne. Nedáva žiadnu nálepku v podobe diagnózy.

V kontexte inklúzie už nie je prijateľné diferencovať rôzne skupiny detí podľa diagnózy. Tie sa často stávajú nálepkami, preto sú problematické najmä z etického hľadiska. Dieťa nie je iba dyskalkulik, má rôzne danosti. Naša legiskatíva ešte vyžaduje diagnózu, aby bolo možné vôbec pomôcť. Pre spresnenie diagnózy sa používajú aj ďalšie slová: hypokalkúlia (mierne znížená mentálna schopnosť), akalkúlia (neschopnosť naučiť sa počítať napriek pomoci). Ak sú v poprední sociálne, psychické faktory používa sa pojem pseudodyskalkúlia alebo kalkulastenia. V prípade mentálnej retardácie zas oligokalkúlia. Ale etiologické faktory v ich pozadí sú spravidla u všetkých typov veľmi podobné (Novák, 2004, podľa Zajacová 2021).

Podobné je to s prejavmi – dieťa má ťažkosti celkove, alebo len v niektorej oblasti (praktickej, verbálnej, lexickej, grafickej, operacionálnej alebo ideognostickej). K jeho chybe môže prísť aj v dôsledku nepozornosti, únavy, vyrušenia v okolí, alebo zdravotného oslabenia. Diagnostika si vyžaduje, aby sa skúmali jednotlivé symptómy v ich súvislostiach (príčiny, prejavy, dôsledky, okolnosti). Musí ju urobiť odborník ale učiteľ i rodič vidia dieťa v širších súvislostiach a denne. Dobre je preto, ak sú prizvaní k diagnostikovaniu.

Dôležité je však, aby sa učiteľ vedel sa zorientovať a cítil sa kompetentne ak má povedať svoj názor. Pomôže mu ak si všíma, že

- deti používajú nápadne často prsty,
- čo sa jeden deň naučia, na druhý deň zase nevedia,
- zaostávajú v priestorovej a vizuálnej orientácii (strkajú sa, strácajú a hľadajú veci, nevšimnú si, sú neobratné...)
- nerozumejú hodinám, majú slabú orientáciu v čase,
- majú problém so slovnými úlohami,
- vyhýbajú sa počítaniu, nemajú radi hodiny matematiky, reagujú odmietavo až úzkostne.

Dôležité je rozlíšiť, ako rolu zohráva strach z neúspechu, ktorý môže byť spojený so zameraním na výkon, s obavou zo zlyhania. K úzkostným reakciám má bližšie to dieťa, ktoré si ich osvojí často už počas vnútromaternicového života. Ak matka zažíva stres, jej hormóny cez placentu zasahujú ešte nezrelý mozog dieťaťa. Neurovedné výskumy potvrdili (Verny a Kelly 2024, s. 46), že dieťa nielen vníma matkine pocity, ale asi od šiesteho mesiaca tehotenstva si ich dokáže aj zapamätať a začína sa podľa nich správať. Stav dieťaťa po narodení a v ranom detstve (či je šťastné a zdravé, alebo dráždivé, náchylné k ochoreniam) determinujú emócie, ktoré k nemu prichádzali počas tehotenstva. Krátkodobé strachy dieťaťu neublížia ak je milované a osobne sa ho netýkajú. Dlhodobé stresy majú silnejší dopad. Spravidla hrozia u dieťaťa fyzické, alebo emocionálne problémy. Dobrou ochranou je jej láska a tiež podpora zo strany otca. Maté a Maté (2023) uviedli, že vnútromaternicové skúsenosti zanechávajú emocionálne a neurologické otlačky na bunkách a v nervovom systéme ľudského organizmu – sú pamäťou celého tela. Pozitívne skúsenosti prijatia a pohody, rovnako úzkosti a diskomfort sa stávajú danosťou dieťaťa. Zohrávajú rolu pri jeho vývine, vo vzťahoch, sebahodnotení, pri učení, pri zdolávaní nových výziev a ťažkostí.

Strachové situácie (Drinks, internet bez dátumu) môžu prežívať všetky deti, ale medzi deťmi s dyskalkuliou a ostatnými môžu byť vo vzťahu k matematike malé rozdiely.

**Tabuľka 2.** *Porovnanie situácie úzkostných detí a detí s dyskalkúliou*

| Ak je v pozadí len strach/úzkostnosť | Ak je v pozadí aj dyskalkúlia |
|---|---|
| Rozumejú, učia sa, ale očakávajú, že skúšanie dopadne zle | Vedia, že nerozumejú, aj keď sa snažili naučiť, vedia, že skúšanie dopadne zle |
| Robia chyby, lebo strach im bráni sústrediť sa | Robia chyby, lebo zadanie nepochopili |
| Ak počítajú doma, majú lepšie výsledky, lebo tam sa cítia bezpečne | Robia chyby aj doma, ulpievajú na niektorom detaile, celok nezvládajú |

| | |
|---|---|
| Lepšie riešia zadania ak o nič nejde, v dôležitom teste zlyhajú | Trávia veľa času nad zadaniami, výsledky nie sú správne, tipujú |
| Snažia sa vyhnúť písomkám, môžu sa doma cítiť zle (bolí ich brucho, hlava) | Vyhýbajú sa situáciám, kde treba počítať (aj v hrách, pri nakupovaní...) |

## Príčiny oslabení a nárastu bariér pre zvládanie matematiky

Sú známe štyri skupiny príčin (genetické, neurologické, kognitívne a faktory prostredia). Spravidla sú rôzne zastúpené a prepojené. Platí, že ich dôsledky sa vyvíjajú a tvoria rôzne bariéry.

**Genetické príčiny** – je dlho známe, že ťažkosti s matematikou sa vyskytujú v rodine. Bol objaveným chromozóm, ktorý s tým súvisí. Významné je aj genetické predispozície. Všetko čo človek zvládne, prepíše jeho genetickú informáciu. Ak sa rodič vyhýbal počítaniu a nezvládal matematiku, dieťa zdedí pre ňu slabú dispozíciu. Môže si ale vybudovať schopnosti s väčšou námahou a pomocou.

**Neurogénne príčiny** - raný stres, toxíny, alkohol, lieky, zápalové ochorenia, podnetová deprivácia, alebo naopak včasné zahltenie digitálnymi podnetmi (batoľa pred mobilom, v predškolskom veku hodiny pri počítači), ale aj zlá životospráva (fastfood, sladkosti), málo spánku a pohybu, spravidla brzdia vývin, tvorbu zdravých neurónov a vytváranie neuronálnych prepojení/máp v mozgových centrách. Utvorené neuróny (neurogenéza) v prenatálnom vývine putujú na svoje určené miesto chemickou cestou, ale v dôsledku škodlivín sa im nie vždy podarí ho nájsť, niektoré zablúdia. Keď neuronálne axóny dosiahnu cieľ, ich rast sa zabrzdí. Nervové bunky preberajú úlohy špecialistov pre rôzne kvality vnemov. Vytvárajú centra, ktoré sú mnohonásobne poprepájané cez synaptické spojenia. Zvládnuté a používané neuróny tvoria neuronálne mapy. Platí – alebo to používaš, alebo to stratíš (use it o los it). Nepoužívané synaptické spojenia zanikajú. Ich zánik je aj naprogramovaný, Je masívnejší v období troch rokov, pri nástupe do školy a v puberte (apoptóza). Cieľom je efektívnejšie využívanie mozgu a jeho príprava pre špecializované činnosti podľa záujmov. Obľúbené činnosti prezentuje väčšia oblasť mozgu.

Utváranie senzorických centier mozgu(Ostatníková, In Murgaš, 2011) má veľmi individuálny charakter. Výsledok závisí najmä od genetického naprogramovania, od skúseností a od vonkajších vplyvov. Opakované a dostatočne stimulované synaptické spojenia umožňujú rýchlejšie spracovanie a teda aj učenie. Nejde len o podnety. **Učenie je efektívne, ak je spojené s kladnými emóciami a so skúsenosťou, ktorá má pre dieťa zmysel**. Doidge (2012, s. 46) uviedol, že každý človek má niektoré funkcie slabšie až nedostatočné, ale ak sa cvičením posilnia tie slabé miesta, ľudia získajú prístup k možnostiam, ktoré boli predtým zablokované.

Už samotný proces vnímania je veľmi komplexný. Zo zmyslových orgánov (Ostatníková, 2016, s. 116) prichádza do mozgu asi 2-3 miliónov nervových vláken a každé mu dodáva až 300 impulzov za sekundu. Vidíme mozgom – v oku selektuje, čo pôjde ďalej do **primárnej senzorickej oblasti** (tylový lalok). Odtiaľ ako elektrické impulzy putujú do **unimodálnej asociačnej oblasti,** kde sa rozlišujú kvality –farebné odtiene, tvary, pohyb, smer. Je ich asi tridsať (Ramachandran, 2011). Každá z nich má niekoľko funkcií: pri menšom poškodení niektorej z nich sa vedia nahradiť. Potom prechádzajú do **polymodálnej asociačnej oblasti**, kde sa vytvorí obraz skutočnosti. Je to prvý krok k spracovaniu (Grawe, 2007). Sú ďalej vedené do oblasti, ktorá susedí s hipokampom, kde sa integrujú do reprezentácie, ktorá je už menej závislá na pôvodnom obraze. Na ďalšie spracovanie prechádzajú cez talamus, ktorý je centrálnou „spínacou stanicou“ v mozgu a rozhoduje, či prichádzajúca informácia je dôležitá pre prežitie, alebo nie. Talamus je napojený na oblasti prefrontálnej kôry, kde sú premietané aktuálne city a motivačné nastavenie. Keď im človek pripíše vysokú dôležitosť, reaguje hormonálny systém, následne vníma zodpovedajúce emócie (negatívne - amygdala, alebo pozitívne). Talamus je tiež spojený s pracovnou pamäťou a ak ten môže nerušene pracovať, vytvorí sa obsah na zapamätanie. To, čo sa nedostane do pracovnej pamäti, si človek neskôr nedokáže vybaviť. U dieťaťa s funkčnými oslabeniami, v diskomforte, tento proces môže zlyhať. Vidieť neznamená vedieť.

Pri porovnávaní zobrazení mozgu pri počítaní v tuneli magnetického tomografu sa u detí s dyskalkúliou sa zobrazila jedna, prípadne dve aktívne oblasti v parietálnej časti mozgu, kým u detí bez ťažkostí ich bolo šesť až osem. Boli to oblasti pre reč, vnímanie priestoru, symbolov, vzťahov, predstavy, ktoré dobre spolupracovali. Bariéry pre zvládanie matematiky sú teda multifaktorálne podmienené. Ak sa majú zmenšiť, musí najprv prebehnúť zmena aj v mozgu. To nie je rýchle. Ale je to možné - vďaka plasticite mozgu. Feldenkreis (1977) zdôraznil, že ide len o to, aby sa vhodne zmenili podmienky tak, aby človek mohol byť aktívny.

**Kognitívne príčiny -** kognitívne schopnosti sa rozvíjajú až po emocionálnych. Ak je dieťa v bezpečí, vnemy aktivujú neuróny pre učenie. Emocionálne interakcie skôr než tie intelektuálne slúžia ako základný architekt mysle (Maté a Maté, 2023). Opakovaná skúsenosť pri skúmaní, zážitky z interakcie s prostredím podporujú orientáciu a poznávanie. Stimulujú k pohybom – pomocou senzomoriky dieťa v ranom a predškolskom veku poznáva a emočne prežíva svet. Aktivita a kladné emócie sú základom aj ďalšieho kognitívneho vývinu. Maté (2021) videl súvislosť medzi emocionálnou depriváciou v ranom detstve a poruchami pozornosti. Centrum kontroly emócií v prednom mozgu susedí s centrom kontroly motoriky a nezrelosť jedného ovplyvní oba systémy. Výsledkom sú problémy so sústredením, s učením i správaním. Strach, opustenosť, bolesť, vedú k obrane, úniku. Ak boli „naprogramované“ v ranom detstve, v podobných situáciách sú automatické.

Neuronálne obvody v mozgu, ktoré sa rozvíjajú v interakcii génov a skúseností, sú najviac ovplyvnené väzbami medzi dospelými a dieťaťom. Platí to aj pre školský vek. Presvedčenie učiteľa/rodiča, že dieťa nie je schopné, mu bráni v učení. Narušená interakcia s dospelými a nedostatok ich vnímavej prítomnosti prispievajú k vzniku a udržiavaniu disfunkčných modelov správania, ktoré môžu sťažiť dieťaťu prijímanie pravidiel, porozumieť súvislostiam, spolupracovať.

Kým je medzi kognitívnymi schopnosťami v rovine vnímania, pozornosti, pamätania, predstavivosti zrejmá súvislosť, medzi intelektom a matematickými schopnosťami už nie je jednoznačná. Anderlíková (2014) popísala metodiku matematického učenia u detí s ťažkými poruchami motoriky a vývinu reči, o ktorých je okolie presvedčené, že aj ich intelektové schopností sú minimálne. Ich problém je hlavne izolácia, nedostatok pochopenia a príležitostí sa učiť (potrebujú viac opakovaní), ktoré vychádza z presvedčenia okolia, že to nemá zmysel.

Tak sme sa dostali k **sociálne podmieneným** príčinám. Nejedná sa len o deti z marginalizovaných prostredí. Stačí ak nemajú sociálnu oporu, ak ich rodičia nemajú čas, striedajú sa pri nich opatrovatelia, nemajú kamarátov, ani vnímavého dospelého človeka, ktorý si ich uvedomuje a komunikuje s nimi. Osvoja si dysfunkčné modely správania, často sú v strese.

Ťažké to majú aj tie, ktoré vyrastajú v malých bytoch, nemajú miesto pre pokojný spánok, ani stravu primeranú ich veku, majú závislých alebo inak chorých rodičov. Mozog si ukladá do pamäte nové informácie hlavne v noci. Ak rodičia tvrdia „včera to doma vedel“, môže byť málo spánku, alebo nočné rušenie hlukom v spoločnej izbe vysvetlením, prečo si dieťa v škole nespomenie. Bude aj unavené, lebo gliove bunky v noci mozog čistia od odpadových látok a toxínov, ak to pre slabý spánok nestihnú, deti nie sú pripravené na učenie. Aj nekvalitná strava môže viesť k únavnosti, ťažkostiam so sústredením a pamäťou (napr., nedostatok vitamínu D). Podobne pôsobia nedoliečené ochorenia, úrazy, traumatické zážitky. Dieťa nemá energiu, aj keď sa snaží, jeho pozornosť rýchlejšie upadá a neúspech ho demotivuje. Presvedčenie o vlastnej neschopnosti sa stáva veľkou bariérou v napredovaní.

Rodičia môžu svoju neprítomnosť nahrádzať dieťaťu mediálnou technikou, niekedy vidia počítač ako prínos (budú to potrebovať) pre budúcnosť detí. Nemecký psychiater Spitzer (2018) sa desaťročia zaoberal problémami školskej neúspešnosti u svojich detských pacientov. V knihe Digitálna demencia píše, že používanie počítača v ranom a predškolskom veku vedie k problémom s pozornosťou, k poruchám učenia. Zhoršuje sa časová, priestorová a osobná orientácia. Počítačové hry budujú mozog inak ako hra, manuálne činnosti – veľká časť génových informácií sa nevyužuje. Menia tiež sociálne správanie, vedú k závislostiam. Digitálne médiá znižujú aj hĺbku spracovania informácií. Dlhé informácie sa nečítajú, preto sú stále kratšie a komerčne upravené, aby zaujali. Klasické knihy deti zriedka čítajú, vystačia si s SMS správami.

## Koľký detí sa to týka

U nás sa hovorí o dvoch až piatich percentách, vo svete o 20 percentách žiakov Závisí to od prijatých kritérií, systému zachytenia a poskytovania starostlivosti. Problémy detí sa niekedy skrývajú za lajdáckosť, strach z matematiky, alebo znížené mentálne schopnosti. Ja som sa nedopátrala k údaju, koľko detí u nás má diagnózu dyskalkúlia. Je zrejme , že popri nich je ešte veľa iných s bariérami vo vzťahu k matematike. Spájajú ich podobné príčiny i problémy – strach, bezmocnosť a negatívne dôsledky pre vzdelávanie a zdravie.

Pritom dieťaťu s dyskalkúliou môže pomôcť 6-8 týždňov denných cvičení, kým sa jeho bariéry podarí znížiť (u dospelých je potrebné aj 100 hodín). Dlhoročná zahraničná odborníčka v dôchodkovom veku sa vyjadrila, že počas celej praxe stretla iba jedno dieťa (12 r.) ktoré malo gymnaziálne vedomosti z prírodovedy, ale neprešlo v matematike cez desiatku. Napriek pomoci a jej mnohým dobrým skúsenostiam. To stojí za námahu.

Zlé známky nič neriešia. Dieťa potrebuje, aby sa učiteľ stal jeho spojencom. Nesmie získať presvedčenie, že je hlúpe. Nemusí to počuť, stačí vidieť, že prevracajú oči nad jeho výkonom, mávnu nad ním rukou, alebo je prehliadané, aj keď sa hlási. Potrebuje zaobchádzanie s úctou a dôverou.

## Čo možno urobiť doma a v triede

Základom pre pomoc je vedomie, že dieťa s dyskalkúliou je hodnotné dieťa a má mnohé jedinečné vlastnosti, pre ktoré je obohatením v triede i pre spoločnosť. Nemusí zostať zo svojim problémom osamelé a bezradné. Netreba ho nútiť, aby zvládlo to čo iní, ale zamestnať úlohami tam kde je a podporovať posilnenie slabých funkcií preto, aby:

- si vytváralo predstavy o množstvách, aby počítalo pri hrách a pomáhaní,
- aby plánovalo, tvorilo a učilo sa kriticky myslieť.
- cvičiť schopnosť orientácie, presnejšieho vnímania, regulovania emócií.
- ak sa mu nedarí, reflektovať jeho emócie (vidím, že sa snažíš, že veľmi chceš, ale už sa vzdávaš., som v tom s tebou...),
- počúvať dieťa s úctou,
- rešpektovať potrebu oddychu, snažiť sa o aktívny oddych,
- obmedziť izolujúce aktivity – čas za počítačom,

- u úzkostných detí ponúkať príklad rezilientneho konania – učiť ako prekonávať problémy,
- prepájať učenie matematiky so situáciami bežného života a kladnými emóciami.

**Vývin nestojí, alebo sa deje pokrok, alebo sa strácajú príležitosti a narastajú bariéry. Príklad situácií:**

**Tabuľka 3.** *Komunikačné situácie a bariéry*

| Situácia | Bariéra |
|---|---|
| dohováranie (sústreď sa, musíš sa viac snažiť) | pocit zlyhania, neurotizácia |
| výčitky - nedával si pozor, nepripravil si sa | pocit viny a nepochopenia, strata dôvery v učiteľa |
| výsmech (nehraj sa tu s prstami, zase si posledný, čo máš v tej hlave) | zahanbenie, stres zo sociálneho odmietnutia, obrana, únik |
| názor, že rodičia zlyhali (poznámka, zase nemali na teba čas) | hnev z poníženia, strach z reakcie rodičov |
| mlčanie, pokrútenie hlavou, alebo prehliadanie/nehodnotenie dieťaťa | pocit beznádeje, zavrhnutia |
| odkladanie odbornej pomoci | dieťa si rezignuje |
| tlak (toto musíš zvládnuť) | opakované úlohy nad možnosťami dieťaťa poškodzujú dopamínový systém odmeny v mozgu. Dieťa si ho zabezpečuje inak (šaškovanie, vyrušovanie, delikvencia...) |

Ak ide o 10 – 20 % zo školopovinných detí, musí sa s nimi stretnúť na hodinách matematiky každý učiteľ. Niekedy bojujú, inokedy sa spolu na hodinách trápia, nie vždy je ďalší odborník nablízku. Ak si to deti prenášajú ďalej, lebo zostali bez pomoci, trpia celý život. Majú problém so štúdiom, so zamestnaním, v reálnom živote - napr. pri nakupovaní.

Sme v tom s nimi a tiež môžeme spoločným rastom profitovať. Zaoberanie sa s problémami detí a hľadanie možností pomoci je úžasnou a obohacujúcou osobnou výzvou. Treba ju prijať.

## LITERATÚRA


[1]. Anderlíková, L. (2014) Cesta k inkluzi. Úvahy z praxe a pro praxi. Praha: Triton.

[2]. Doidge, N. (2012). Váš mozek se dokáže změnit. Brno: Cerebrum.

[3]. Feldenkrais, M. (1977) Abenteuer im Dschungel des Gehinrns. Der Fall Doris. Frankfurt: Insel.

[4]. Feldenkrais, M. (1996) Feldenkraisova metoda. Pohybem k sebeuvědomění. Praha: Pragma. (originál Tel Aviv, 1967).

[5]. Grawe, K. (2007) Neuropsychoterapie. Praha: Portál

[6]. Janíček-Pavelová, M. 2023, Diagnostika vo vzdelávaní a poradenstve žiakov s dyskalkúliou. UKF Nitra, Dizertačná práca.

[7]. Košč, L. (1971) Základné psychologické problémy vyučovania matematiky. In: Psychologické otázky základného vzdelávania. Bratislava: SPN.

[8]. Kumorovitzová, M., Novák, J. (1994) Nauč mě počítat. 1. vyd. Litomyšl: Augusta.

[9]. Maloney, J. (2022) Überwindung von Matheproblemen zu helfen und wie man sie überwindet. https://www-bytelearn-com.translate.goog/articles/overcome-math-strugle/ 31. 10. 2022.

[10]. Maté, G., (2021) Roztěkaná mysl. Původ léčení poruch pozornosti. Praha: PEPLECOMM

[11]. Maté, G. & Maté, D. (2023. Mýtus normálnosti. Trauma, choroba a uzdravenie v toxickej spoločnosti. Bratislava: Eastone Books. ISBN 978-80-8109-453-8.

[12]. Medina, J. (2012) Pravidla mozku dítěte. Brno: Computer Press.

[13]. Mikulajová, M., Tokárová, O., Sümegiová, Z. (2014) Tréning fonematického uvedomovania podľa D. B. Eľkonina. Predgrafémová a grafémová etapa. 2. prepracované a doplnené vydanie. Metodická príručka. Bratislava: Dialóg, spol. s r.o.,

[14]. Murgaš, M. a kol. (2011) Vývin mozgu a jeho poruchy. Martin: Osveta.

[15]. Novák, J. (2004) Dyskalkulie – metodika rozvíjení základných početných dovedností. Havlíčkův Brod: Tobias.

[16]. Ostatníková, D. (2010) Neurobiologická východiska ikluzívní pedagogiky. In Lechta, V. (ed.). 2010. Základy inkluzívní pedagogiky. Praha: Portál, s. 93-107.

[17]. Pokorná, V. (2010). Vývojové poruchy učení v dětství a dospelosti. Praha: Portál.

[18]. Rmachandran, V. S.(2013) Mozek a jeho tajemství. Praha: dybbuk.

[19]. Šikulová, V. (2001) Zmyslová výchova a základy matematických predstáv. Bratislava: Štátny pedagogický ústav.

[20]. Sellin, R. (2016) Hypersenzitívni ľudia medzi nami. Vysoká senzitivita – od mínusu k plusu. Banská Bystrica: Noxi.

[21]. Sindelar, B. (2008) Deficity čiastkových funkcií. Príčiny porúch učenia a správania u detí a ich náprava. Bratislava: Psychodiagnostika.

[22]. Sindelar, B. (2014) K metodike na zachytenie čiastkových vývinových deficitov v spracovávaní informácií. Bratislava: Vydavateľstvo Kanije.

[23]. Simon, H. (2006). Dyskalkulie. Praha: Portál, 2006.

[24]. Spitzer, M. (2018) Digitálna demencia. Citadella.

[25]. Verny, T. L., Kelly, J. (2024) Tajný život nenarodeného dieťaťa. Bohemica Books.

[26]. Zajacová, J. (2021) Dyskalkúlia – porucha matematických schopností. Odborné postupy v pedagogickej a poradenskej praxi. Bratislava: VÚDPaP.

[27]. Health Celerates (2024) Dyskalkulie verstehen: Wenn Zahlen keinen Sinn ergeben. [online] [navštívené 5.10.2024]. Dostupné na: https://youtu.be/LZ9yecU7v9Q?t=19

*prof. PhDr. Marta Horňáková, PhD..*
*Katedra liečebnej pedagogiky, Ústav logopédie a liečebnej pedagogicky*
*Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského v Bratislave*
*e-mail: hornakova@fedu.uniba.sk*

## PREDNÁŠKA 2: STUDENTSKÉ POROZUMĚNÍ VE ŠKOLSKÉ GEOMETRII Z PERSPEKTIVY DYNAMICKÝCH KONSTRUKCÍ

LUKÁŠ VÍZEK

Geometrické vzdělávání na druhém stupni základní školy cílí na porozumění struktuře geometrických objektů a logickému systému jejich vlastností, usiluje o jisté zobecnění představ, které studenti mají z předchozích stupňů školy a ze své zkušenosti. Na jedné straně je přirozeně zakotveno v antických Eukleidových Základech, na druhé straně využívá možnosti současných dynamických počítačových prostředí. Přednášku věnuji zasazení klasických konstrukčních postupů pomocí tužky, pravítka a kružítka do dynamické geometrie. Na základě výsledků výzkumných šetření ukáži, jaké informace o studentském porozumění ve školské geometrii lze takovým zasazením získat a jak je lze uplatnit při rozvíjení studentského chápání geometrických objektů a jejich vlastností. Na závěr budu uvažovat o dalším výzkumu v geometrickém vzdělávání a budoucímu směřování školské praxe

*Mgr. Lukáš Vízek, PhD*
*Univerzita Hradec Králové*
*Česká Republika*
*e-mail: lukas.vizek@uhk.cz*

# ZÁBAVNÁ FORMA OPAKOVANIA GEOMETRIE

MONIKA DILLINGEROVÁ,

**ABSTRAKT.** *Na stránke wilma.sk sa pravidelne objavujú tzv. komiksy. Ten posledný bol zameraný na konštrukcie a rysovanie na základnej škole. V článku ukážeme ktoré geometrické vedomosti si žiaci riešením zopakujú.*

## Komiksy na stránke wilma.sk

Na stránke wilma.sk sa okrem návrhov na vyučovanie a rôznej inej literatúry pre učiteľa matematiky objavujú trikrát ročne komiksy. Komiks je aktivita pre žiakov uvádzaná obrázkom s alebo bez deja. Pre učiteľa je pri obrázku tlačidlo k materiálom na stiahnutie. V priečinku s materiálmi učiteľ nájde informácie, ako so súbormi pracovať, zadania zaujímavých úloh a riešenia úloh. Aktuálne sa komiksy tvoria na advent, pred Veľkou Nocou a pred letnými prázdninami. Ich úlohu vidíme v možnosti zábavnou formou počas adventu / prázdnin preriešiť väčšie množstvo inšpiratívnych úloh bez nálepky „povinná domáca úloha“.

## Pirátsky poklad (komiks na leto 2024)

Pred letnými prázdninami 2024 sme vytvorili komiks s hľadaním pirátskeho pokladu. Riešitelia mali k dispozícii mapu ostrova a zápisky starého piráta, ktoré ich viedli mapou. Pritom nešli automaticky od jedného význačného bodu mapy k ďalšiemu, ale práve význačné body museli v mape skonštruovať. Našou intenciou bolo urobiť zaujímavé opakovanie geometrie s rysovaním. Dali sme si za cieľ, že sa nesmie dať urobiť časť úloh a nájsť poklad. Rovnako, by sa nemalo dať na základe vzhľadu mapy odhadnúť, kde poklad leží. To sme riešili za jedno rozložením mapy na dva papiere a určením miesta pokladu až správnym preložením listov máp cez seba, za druhé doplnením dostatočného počtu nadbytočných objektov do mapy a umiestnením pokladu mimo všetky zobrazené objekty. Základným pravidlom pri tvorbe a zostavovaní následnosti úloh bolo pre nás: šikovný šiestak to zvládne, siedmakovi to bude trvať a starší ešte stále budú mať čo robiť. Tento cieľ vyzerá spočiatku nerealizovateľne. V rámci pracovnej dielne sme sa pozreli spolu s učiteľmi na jednotlivé úlohy a ich klasifikáciu v rámci učiva geometrie.

Prvý list mapy obsahoval celkovo 9 úloh. Iba jedna bola taká, že ju žiaci vyšších ročníkov mohli riešiť iným matematickým aparátom, ako mladší. Jedná sa o prvú úlohu s tromi palmami a kameňom, kde mohli využiť znalosť konštrukcie stredu kružnice opísanej trojuholníku. Zároveň ju vnímame ako najťažšiu úlohu tohto listu mapy.

V inštrukciách učitelia dostali odporúčanie listy mapy tlačiť „bez zmeny mierky“. Takže mapa zaberala celú stranu A4. V zápiskoch starého piráta sa potom riešitelia dozvedeli:

*„ Na tomto ostrove som sa kedysi vylodil na jeho ľudoprázdnej strane a zakopal som tu poklad. Ak chceš poklad nájsť, sleduj moje objavovanie ostrova a dopĺňaj mapky, ktoré som ti zanechal.*

*Od pobrežia som prišiel k trom palmám a kameňu. Ležal presne rovnako ďaleko od každej z paliem. Od kameňa som pokračoval kolmým smerom na spojnicu dvoch paliem, ktoré boli najďalej od seba.*

*Narazil som na prvý kameň v močiari s krokodílmi. Postupne som skákal z kameňa na kameň, aby som sa dostal preč z močiara. Vždy som skočil na kameň, ktorý bol ku mne* *najbližšie (teda ak si odmyslím ten, z ktorého som práve prišiel). Musím podotknúť, že počas prekonávania močiara bol môj skok z piateho na šiesty kameň mojim najväčším výkonom. Meral toľko, ako 3 moje kroky.*

*Z posledného kameňa som sa vydal 9 krokov na východ. Odtiaľ som pokračoval ešte 9 krokov na juhovýchod.*

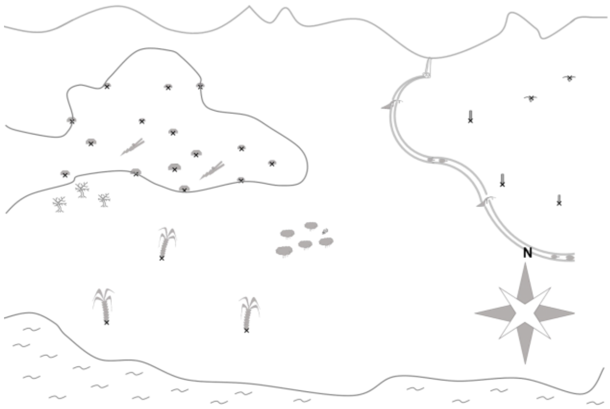
*Za riekou som zbadal nejaké 3 stĺpy. Cestu k nim však znemožňovali mäsožravé pirane. Ako som tak sledoval situáciu, zistil som, že cez rieku sú na dvoch miestach urobené mosty. Vybral som sa teda k stĺpu, ktorý bol pri prekonaní rieky po moste ku mne najbližšie.*

*Pri stĺpe som zistil, že ide o zvyšok domu s verandou. Každý zo stĺpov stál v niektorom rohu domu alebo k domu pripojenej verandy. Veranda mala štvorcový pôdorys a bola na šírku celého domu s obdĺžnikovým pôdorysom.*

*Stojac pri stĺpe som si všimol vchod do podzemia. Bol od zvyšných dvoch stĺpov vzdialený rovnako ako najvzdialenejší kút domu od mojej pozície. Vybral som sa k nemu. Až pri vstupe do podzemia som zistil, že sú vlastne tri. Pri tom, ktorý som videl ako prvý, bolo na kameni vytesané: „Tento nikam nevedie.“ Aj pri druhom bol nápis: „Dole na teba čaká iba smrad.“ S poslednou štipkou nádeje som teda došiel k tretiemu, no ani ten nikam neviedol. Na kameni pri ňom však stálo: „Vezmi všetky tri a doplň nás na rovnobežník. Tam nájdeš tajné dvere do podzemia, ktorými sa dostaneš ďalej.“ A naozaj tam boli. Prvý nájdený vstup do podzemia bol od nich najďalej.*

*Zapálil som fakľu a vošiel do dlhej tmavej chodby.*

*Ani neviem aká bola dlhá, preto pokračovanie mapy kreslím až na ďalší papier.“*




**Obrázok 1:** *Prvý list mapy*

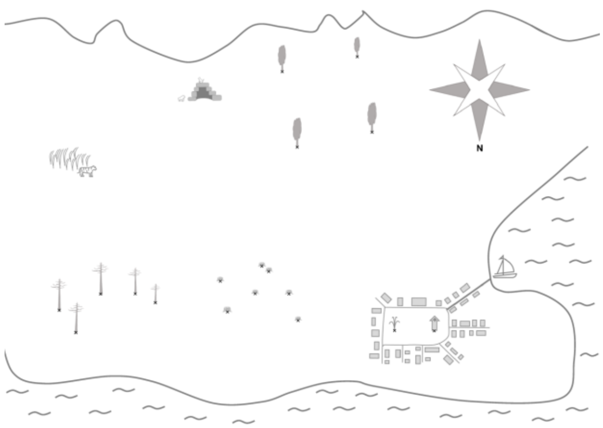
Starý pirát vo svojich inštrukciách spomína aj v mape neexistujúce objekty. Tieto musí riešiteľ postupne dopĺňať. Ich doplnenie je sprevádzané čítaním s porozumením, riešením geometrických úloh a rysovaním.

Po týchto úlohách sa hľadač pokladu ocitne na druhom liste papiera s mapou. Východzí bod je jasne daný. Riešiteľ pokračuje novou sériou úloh. Toto rozdelenie sme volili, aby mohol učiteľ riešiť úlohy so žiakmi na krúžku, alebo na hodinách v škole. Ak by žiaci nestihli všetky úlohy prvého listu na hodine, môžu si ho doriešiť doma. Na druhom liste potom pokračujú opäť všetci z rovnakého počiatočného bodu. Zároveň pri čisto domácej práci tento nový počiatočný bod pomáha žiakovi zorientovať sa  a napriek množstvu úloh získať pocit ukotvenia a bezpečia.

***Tabuľka 1*** *Úlohy prvého listu mapy*

| úloha | použité vedomosti |
|---|---|
| 3 palmy a kameň | Dvakrát os úsečky |
| Pokračovanie smerom | Meranie vzdialeností, konštrukcia kolmice |
| Preskakovanie močiara | Porovnávanie dĺžok |
| 9 krokov na východ | Rysovanie rovnobežiek, prenos vzdialeností |
| 9 krokov na juhovýchod | Rysovanie rovnobežiek, prenos vzdialeností |
| Cesta k stĺpu | Sčitovanie vzdialeností |
| Pôdorys domu | Obdĺžnik, štvorec, uhlopriečka. Dorysovanie objektu |
| Vstup do podzemia | Porovnávanie dĺžok |
| Nájdenie štvrtého vstupu do podzemia | Dorysovanie štvrtého vrchola rovnobežníka z troch zadaných, najdlhšia úsečka v rovnobežníku je jedna uhlopriečka |

Na obrázku 2 vidíme opäť zmenšený druhý list mapy. K nemu sa viaže pokračovanie textu zo zápiskov starého piráta:




**Obrázok 2** *Druhý list mapy*

*„Po vynorení sa z podzemia som si všimol 4 stromy. Niekto ich tu musel vysadiť zámerne, lebo tvorili vrcholy štvorca. Navyše v strede tohto štvorca ležal kameň. Postavil som sa naň a zahľadel na sever. Následne som sa otočil v smere hodinových ručičiek o 45° a pokračoval priamym smerom vo svojej púti.*

*Prišiel som k sosne, ktorá stála spolu s inými v malom hájiku. I napriek stromom som mal výhľad na malé mestečko, prístav a more. Uvedomil som si, že práve teraz je tieň mojej sosny rovnobežný s najvýraznejšou ulicou v meste vedúcou od kostola na prístavné mólo. Keď som sa posunul na koniec tieňa, všimol som si, že tam je polorozpadnutý* *drevený kríž. Pohľad na mesto z tohto miesta bol magický. Uvidel som v zákryte na jednej rovnej línii dva zvláštne kamene, mestskú fontánu i kostol.*

*Navyše som zistil, že ak by som išiel priamo smerom ku kostolu, ale pri bielom kameni sa otočil o 70° doľava a prešiel rovnakú vzdialenosť ako od kríža ku bielemu kameňu, prídem ku soche anjela skrytej v hustom poraste.*

*Ak by som však išiel od kostola priamo smerom ku krížu, pri čiernom kameni sa otočil o 80° doprava a prešiel rovnakú vzdialenosť ako od kostola k čiernemu kameňu, opäť prídem k tomu anjelovi.*

*Medzi kameňmi a anjelom je vysekaný les a zostalo tam veľa pňov stromov. K môjmu pokladu to máš už len kúsok. Teraz nájdi na mojej mape ten peň, ktorý je od spojnice bieleho a čierneho kameňa vzdialený toľko ako je polovica ich vzájomnej vzdialenosti. Ešte ti prezradím, že je od bieleho kameňa tak ďaleko, ako je polovica vzdialenosti od bieleho kameňa k anjelovi.“*

Z textu sme vybrali úlohy a určili, aké vedomosti riešiteľ použije. Všetky sme zaznamenali do tabuľky 2.

Ide celkovo o osem úloh. V tejto časti je najťažšou piata úloha z tabuľky. V skutočnosti žiaci však vnímajú piatu, šiestu a siedmu úlohu ako jednu zložitú geometrickú úlohu. My sme volili rozdelenie na viacero úloh, aby sme mohli jednoduchšie identifikovať a zapísať použité vedomosti. Išlo o naozaj ťažkú úlohu, čo sa prejavilo aj na pracovnej dielni s učiteľmi. Pri zadávaní úlohy sme však predpokladali, že k nej budú riešitelia chcieť pomoc od učiteľa alebo rodiča. Druhou možnosťou je pomoc od spolužiakov formou rovesníckeho vzdelávania.

**Tabuľka 2.** *Úlohy druhého listu mapy*

| **úloha** | **použité vedomosti** |
|---|---|
| 4 stromy a kameň | Stred štvorca |
| Smer ďalšej cesty | Rovnobežky, rysovanie uhla danej veľkosti / smery na kompase |
| Tieň sosny | Rysovanie rovnobežiek |
| Koniec tieňa | Priamka daná dvomi bodmi, priesečník priamok |
| Biely kameň, čierny kameň (pomocná konštrukcia) | Súčet uhlov v trojuholníku, uhly v rovnoramennom trojuholníku, rysovanie uhla danej veľkosti |
| Socha anjela | Priesečník priamok |
| Biely kameň, čierny kameň (umiestnenie) | Os úsečky |
| Peň | Stred úsečky, priamka vzdialená od priamky o danú dĺžku, bod vzdialený od bodu o danú dĺžku |

Pre urýchlenie práce na krúžku je možné časti žiakov zadať prácu s prvým a časti s druhým listom mapy. Po dokončení oboch listov je nutné ich preložiť cez seba a vyriešiť poslednú, finálnu úlohu. Až tá odkrýva, kde je poklad.

*„Pre nájdenie pokladu už stačí jediné. Prelož mapy cez seba. Daj pozor, aby kompasy ukazovali rovnako. Pozri sa na preložené mapy proti slnku. Peň je v strede medzi tajnými dverami do podzemia a pokladom. Samozrejme, že som ho zakopal ďaleko od ľudí. Hľadaj ho na prvej mape.“*

Uvedeným spôsobom sme zabezpečili, že nebolo možné nájsť poklad iba čiastočným riešením niektorého listu mapy.

## Záver

V rámci pracovnej dielne učitelia zhodnotili, že sa im námet s mapou a pokladom páči. Niektorí vyslovili obavy, či by to ich žiaci zvládli. Námet a ukážku takejto práce však hodnotili pozitívne a začali premýšľať, ako by celú aktivitu vedeli skrátiť, zjednodušiť.

Komiksy majú učiteľovi pomôcť popularizovať matematiku, nenásilnou formou nechať žiakov riešiť väčšie množstvo úloh. Zároveň majú tendenciu slúžiť ako možnosť zmysluplnej práce so žiakmi na suplovaných hodinách, na krúžkoch, v škole v prírode a pod. Aktuálny komiks sa postupne presúva do archívu a z neho je naďalej prístupný. Prajeme vám, aby ste si prácu s komiksami užili ako vy, tak aj vaši žiaci.

### LITERATÚRA


[1] Slavíčková Mária et al.: *Webové stránky Inšpirácií a odbornej Literatúry pre učiteľov MAtematiky*, mesto-Bratislava, Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2022, ISBN 978-80-8147-125-4

[2] https://wilma.sk/comics/wilma-comic-assignments-2024-2 (online) citované 06.11.2024



*RNDr. Monika Dillingerová, PhD.*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*Mlynská dolina*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk*

# OSEMSMEROVKY

JANA HAVLÍČKOVÁ

***ABSTRAKT.*** *Riešenie a tvorba osemsmeroviek s matematickými nápoveďami rôznych úrovní obtiažnosti.*

## Úvod

V príspevku predstavíme aktivitu, ktorá bola zverejnená na https://wilma.sk/archiv-komiksov#komiks a bola pripravená ako zaujímavá aktivita pred veľkonočnými prázdninami. Žiaci dostali dvojúrovňovú osemsmerovku. Najprv musia zistiť, aké slová sa v osemsmerovke ukrývajú. Ku každému slovu je jedna nápoveď - hádanka. Jej riešením je jedno slovo s matematickým významom. Nápoveď môže viesť k viacerým možnostiam. V osemsmerovke bude len jedna z nich. Potom treba slovo v osemsmerovke vyškrtnúť. Slovo môže byť napísané v riadku, stĺpci alebo uhlopriečne, odpredu aj odzadu. Zvyšné písmená osemsmerovky tvoria veľkonočnú tajničku.

Osemsmerovky boli vytvorené pre druhý stupeň základnej školy a pre stredné školy – v tejto osemsmerovke sa nachádzajú matematické pojmy, s ktorými sa žiak stretne až na strednej škole.

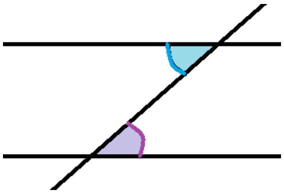
## Osemsmerovka pre žiakov základných škôl

Pre žiakov druhého stupňa základných škôl bola vytvorená osemsmerovka s 23 hľadanými slovami.

### Nápovede - hádanky

1. Geometrický útvar, ktorý vznikne spojením troch bodov, ktoré neležia všetky na jednej priamke.
2. Uhol, ktorý má veľkosť 180° nazývame?
3. Pri výpočte aritmetického priemeru čísel ma vydelíte ich počtom. Čo som?
4. Aby sme zistili, koľko vody sa zmestí do nádoby, musíme vypočítať?
5. Som rovná, rada sa pritúlim k pravítku a mám dva konce. Ako sa volám?
6. Som stotina z celku. Čo som?
7. V mojom zápise sú dve čísla. Jedno sa číta prvé, druhé mi dáva meno. Čo som?
8. Pomocou znaku : porovnávam dve alebo viac hodnôt. Čo som?
9. Som osová alebo stredová. Čo som?
10. Bezo mňa nezapíšeš žiadnu dĺžku, obsah ani objem. Prosto patrím k výsledku. Čo som?
11. Nájdeš ma na číselnej osi. Som jediné číslo, ktoré má súčasne dve znamienka, ale hodnotu to nezmení. Kto som?
12. Koľko má štvorsten hrán, toľko mám ja stien. Čo som?
13. Ak sa obsah štvorca zväčší štyrikrát, tak ja sa zväčším dvakrát. Čo som?
14. Spojnica vrcholu a stredu protiľahlej strany.
15. Teleso s 2 kruhovými podstavami.
16. Teleso s 1 vrcholom a 1 kruhovou podstavou.
17. Číslo nad zlomkovou čiarou.

18. Priamka, ktorá má s kružnicou práve 1 spoločný bod.
19. Priamka, ktorá má s kružnicou práve 2 spoločné body.
20. Štvoruholník s dvomi rovnobežnými a 2 rôznobežnými stranami.
21. Prirodzené číslo, ktoré je deliteľné len 1 a sebou samým.
22. Dve rôzne priamky, ktoré majú jediný spoločný bod.
23. Ako sa nazývajú uhly zvýraznené na obrázku?



*Obrázok 1*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | A | C | I | N | Č | Y | T | O | D | A | V | Ľ |
| A | K | K | U | Ž | E | Ľ | K | O | C | K | A | E |
| A | T | Í | É | V | A | D | E | I | R | T | S | T |
| T | O | N | N | U | L | A | N | S | Ó | M | R | A |
| Y | N | L | V | Ž | O | Č | Ú | D | Ú | Ô | K | T |
| A | D | O | B | J | E | M | Í | P | Z | Č | K | I |
| C | E | H | A | S | E | B | E | N | E | A | E | Č |
| I | J | U | J | R | E | R | O | S | D | C | K | T |
| N | E | J | N | R | C | B | Ú | H | E | N | O | O |
| Ž | A | O | T | E | E | Ó | M | L | C | K | M | B |
| A | S | R | N | Ž | Y | M | A | S | L | I | O | V |
| Ť | Í | T | K | P | R | V | O | Č | Í | S | L | O |
| K | O | Y | Y | M | A | I | R | P | A | | Z | D |

*Obrázok 2: Osemsmerovka ZŠ*

## Osemsmerovka pre žiakov stredných škôl

Nasledujú nápovede a osemsmerovka pre žiakov stredných škôl.

### Nápovede - hádanky

1. Sme čísla. Keď vezmeš ktorékoľvek dve z nás a od menšieho odčítaš väčšie, opäť dostaneš niektoré z nás. Aké sme?
2. Som množina čísel. Nájdeš u mňa dĺžky strán štvorcov. Aké čísla obsahujem?

3. Nepárna goniometrická funkcia.
4. Som tretí a obe súradnice sú u mňa záporné.
5. V štatistike býva mnohofarebný kamarát tabuľky početností.
6. Zapisuje existenciu.
7. Skúma vzájomné polohy v priestore.
8. Záleží na tom, ako je upravený.
9. Najdlhšia strana v pravouhlom trojuholníku.
10. Číslo!
11. Na zistenie hodnoty $x$ z rovnice $5x = 2$ musíme použiť ____________.
12. Časť matematiky, ktorá sa zaoberá prácou s výrokmi.
13. Čísla, ktoré je možné vyjadriť v tvare zlomku, nazývame ____________.
14. Ležatá osmička.
15. Zložený výrok, ktorý má pravdivostnú hodnotu PRAVDA, nezávisle od toho, aké pravdivostné hodnoty nadobúdajú jeho jednotlivé výroky sa nazýva?
16. Štvoruholník, ktorého uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú, je____________.
17. Množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A a súčasne do množiny B, sa nazýva __________ množín A a B.
18. Štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica je_________.
19. Dva trojuholníky, ktoré majú zodpovedajúce si uhly zhodné, sú?
20. Typ zloženého výroku s logickou spojkou "ak, tak".
21. Typ zloženého výroku s logickou spojkou "práve vtedy, keď".
22. Koľko metrov štvorcových má ár?

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | K | I | N | E | I | R | P | O | D | O | B | N | É |
| R | O | V | N | O | B | E | Ž | N | Í | K | D | V | A |
| A | T | T | F | A | K | T | O | R | I | Á | L | Ó | S |
| A | I | C | Á | K | I | L | P | M | I | M | Y | T | V |
| E | O | D | Í | K | O | G | S | R | O | K | E | A | M |
| A | N | J | Z | G | I | U | Ó | N | E | R | E | A | D |
| Ý | K | L | I | Á | N | F | Č | L | E | P | R | E | N |
| K | V | K | Á | Í | P | E | I | O | O | G | O | T | S |
| L | A | O | S | N | N | O | M | T | A | T | A | N | Z |
| A | D | T | V | O | O | E | R | I | N | Ó | U | A | A |
| D | R | M | K | I | T | I | D | N | K | A | R | A | Y |
| N | A | E | S | R | T | L | C | Í | É | Ý | V | K | T |
| É | N | A | I | C | N | E | L | A | V | I | V | K | E |
| A | T | A | | S | U | M | T | I | R | A | G | O | L |

*Obrázok 3: Osemsmerovka SŠ*

## Záver

Na konferencii mali učitelia možnosť preriešiť si obe osemsmerovky. Diskutovali sme o použiteľnosti takýchto osemsmeroviek na vyučovaní. Asi všetci sme sa zhodli, že to môže slúžiť na preopakovanie učiva zábavnejšou formou. S učiteľmi sme diskutovali o vhodnosti našich nápovedí, názory sa rôznili. Niektorí zastávali názor, že nápovede by mali byť jednoznačné, za problémovú považovali napríklad číslo 13 pre ZŠ: Ak sa obsah štvorca zväčší štyrikrát, tak ja sa zväčším dvakrát. Čo som? Tu by odpoveďou mohlo byť slovo strana, ale aj obvod. Iným sa naopak pozdávalo toto skomplikovanie, keď žiak musí vyskúšať v osemsmerovke nájsť niekoľko slov, kým trafí to správne.

V diskusii zazneli aj návrhy, že by osemsmerovky nemuseli byť vytvorené prierezovo cez rôzne tematické celky, ale zasadené do vyučovania priamo v rámci preberanej látky na osvojenie si nových pojmov a zautomatizovanie ich používania. Ako vhodné sa nám zdali tematické celky s väčším množstvom nových pojmov, napríklad logika, objemy a povrchy telies, trojuholník.... Následne boli učitelia vyzvaní, aby sami skúsili vymyslieť niekoľko nápovedí a pomocou online generátora osemsmeroviek sme na záver jednu pripravili.

*Mgr. Jana Havlíčková, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzity Komenského*
*Mlynská dolina F1*
*842 48 Bratislava*
*e-mail: Jana.Havlickova@fmph.uniba.sk*

# STAVBY Z KOCIEK V ROZŠÍRENEJ REALITE PRE ŽIAKOV 1. a 2. CYKLU ZŠ

JANA HNATOVÁ

***ABSTRAKT.*** *Problematika stavieb z kociek je obsiahnutá v učive 1. aj 2. cyklu matematického vzdelávania na ZŠ. Úlohy s ňou súvisiace postupne gradujú od stavania konkrétnych modelov reálnych stavieb až po riešenie problémových úloh využívajúcich záznam stavby vo zvolenom kódovaní. Pri sprístupňovaní pojmov, vzťahov, postupov a praktík, na úrovni požadovanej vzdelávacími štandardami z matematiky, dokáže byť nápomocná technológia rozšírenej reality spájajúca reálny a virtuálny svet do jedného obrazu.*

## Úvod

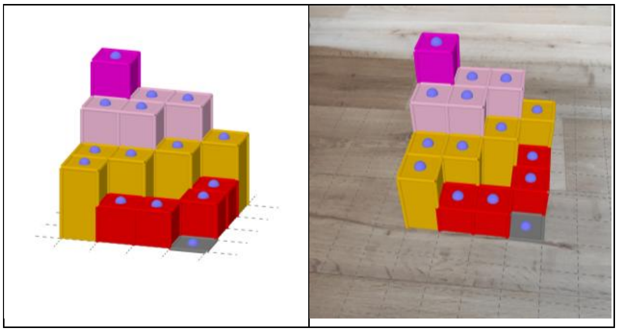
Rozšírená realita (ang. *augmented reality*, skr. AR) patri do skupiny imerzívnych technológií, ktoré možno, z pohľadu používateľa, charakterizovať tromi základnými vlastnosťami: (1) kontextovosť – popisuje možnosť zažiť ponorenie do virtuálneho sveta, kde skutočný svet a virtuálne prvky koexistujú súčasne, (2) interaktivita – zahŕňa možnosti interakcie prostredníctvom manipulácie s objektami doplnenými o virtuálne vlastnosti v reálnom čase a (3) priestorovosť – je zameraná na prepojenie virtuálnych objektov s konkrétnymi bodmi nasnímanými v reálnom priestore a taktiež zahŕňa ich 3D zobrazenie, ktoré AR vizualizácia ponúka [1].

Vďaka týmto vlastnostiam, technologickému vývoju, znižujúcim sa prvotným finančným výdavkom na jej zaobstaranie a prevádzku, sa AR technológia stáva dostupnou a využiteľnou i vo vzdelávaní odborného a všeobecného zamerania. Rovnako sa jej použitie rozširuje z akademickej pôdy a odborného vzdelávania dospelých do školskej pedagogickej praxe, čím sa dostáva aj k žiakom čoraz nižších ročníkov základných škôl. Podľa viacerých autorov má AR technológia vo výučbe matematiky potenciál pomôcť učiteľom modifikovať vyučovacie metódy a organizačné formy práce smerom k personalizácii výučby. Žiakom vie byť nápomocná pri zlepšovaní pochopenia pre nich abstraktných konceptov, pri zvyšovaní ich angažovanosti, motivácie, pri vzájomnej kooperácii a v poskytovaní okamžitej spätnej väzby [2], [3], [4].

## Ako začať pracovať s rozšírenou realitou

Pri práci s AR, tak ako pri práci s každou technológiou, je potrebné zabezpečiť adekvátne hardvérové a softvérové vybavenie. K hardvéru patrí inteligentné mobilné zariadenie (smartfón alebo tablet) podporujúce AR technológiu. Prehľad zariadení pracujúcich pod operačným systémom Android, ktoré podporujú AR technológiu, je dostupný na https://developers.google.com/ar/devices. V prípade chýbajúcej podpory je potrebné do zvoleného zariadenia doinštalovať aplikáciu *Google Play Service for AR*, resp. *Služby Google Play pre RR*. Táto je dostupná v obchode Google Play: https://lnk.sk/dtis. Prehľad zariadení s iOS je dostupný na https://www.apple.com/augmented-reality/.

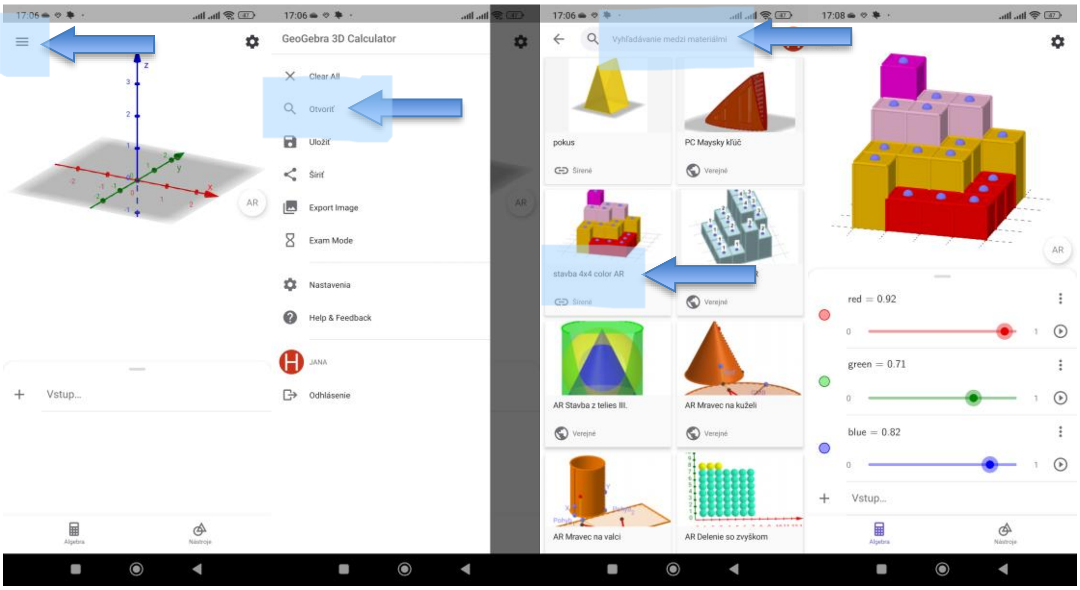
K softvérovému vybaveniu patria mobilné aplikácie a applety, ktoré využívajú AR technológiu na obohatenie reálneho sveta implementovanými virtuálnymi prvkami viditeľnými nepriamo, t. j. len na displeji inteligentného mobilného zariadenia. Jednou zo známych a v matematickej edukácii využívaných aplikácií je *GeoGebra*, dostupná aj online na https://www.geogebra.org/calculator. Jej mobilná verzia *Geogebra 3D Calculator* dovoľuje pracovať s pripravenými appletmi v nielen v priestorovom 3D zobrazení ale aj v rozšírenej realite (obr. 1). Bohatým zdrojom takýchto appletov je domovská stránka https://www.geogebra.org/materials, kde sú celosvetovou komunitou učiteľov pripravované applety bezplatne zdieľané so všetkými zaregistrovanými záujemcami. Konkrétne applety je možné dohľadať pomocou tematických oblastí, názvov appletov alebo pomocou ID kódov.



*Obrázok 1: Zobrazenie stavby z kociek v 3D (vľavo) a v AR(vpravo)*

## Applety pre stavby z kociek

Pre ďalšie použitie v pedagogickej praxi boli nami autorsky pripravené dva applety: *stavba 4x4 mono AR.ggb* a *stavba 4x4 color AR.ggb.* Ich dostupnosť zabezpečuje spomínaná mobilná aplikácia. Dohľadanie appletov v nej možno realizovať pomocou vyššie uvedených názvov alebo ID kódov: *xrarsjzr*, resp. *papujhyr*, zadaných do vyhľadávacieho textového poľa aktivovaného v bočnom paneli možnosťou *Otvoriť* (obr. 2).




*Obrázok 2: Postup vyhľadania a spustenia appletu v aplikácii Geogebra 3D Graphing Calculator*

Ovládanie appletov je jednoduché, postavené na intuitívnej báze. Aktívnymi prvkami sú:

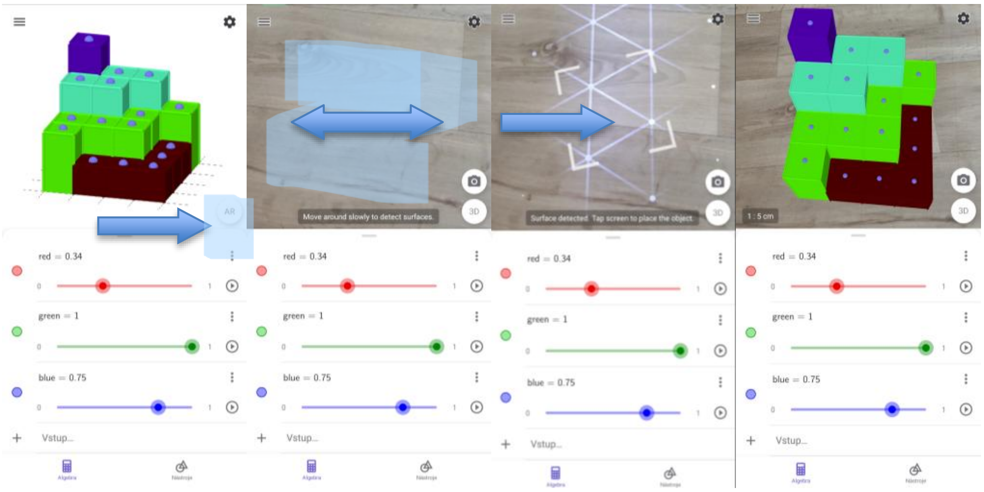
- modrou farbou zvýraznené body nachádzajúce sa v stredoch horných podstáv kociek, ktoré je možné po označení bodu prstom na displeji mobilného zariadenia technikou „ťahaj a pusť" (*drag and drop*) zvislo posúvať na novú pozíciu (obr. 2);
- zväčšenie, resp. zmenšenie zobrazenia stavby úpravou mierky v AR, ktoré prebieha súčasným približovaním alebo odďaľovaním dvoch prstov dotýkajúcich sa displeja mobilného zariadenia;
- ovládače *red*, *green* a *blue* dostupné po kliknutí na tlačidlo *Algebra* umiestnené v dolnej časti, resp. v ľavej časti displeja. Tieto dosahujú hodnoty z intervalu [0,1] a dovoľujú používateľovi nastaviť farebnosť zobrazovanej stavby;
- ovládač *Riešenie* sa nachádza len v applete *stavba 4x4 mono AR a* dosahuje hodnoty {0,1}. V závislosti od nastavenia polohy bežca na ovládači, skryje (pre hodnotu *Riešenie* = 0) alebo ukáže (pre hodnotu *Riešenie* = 1) číselné údaje týkajúce sa počtu kociek v jednotlivých stĺpcoch stavby. V applete *stavba 4x4 color AR* jeho dostupnosť nie je potrebná, nakoľko početnosť kociek v jednotlivých stĺpcoch stavby je signalizovaná ich farebným rozlíšením. Farby sa upravujú dynamicky a v reálnom čase, vždy jednotne podlá konečnej výšky stĺpca.

Uvedené applety sú určené pre prácu so žiakmi na primárnom i nižšom sekundárnom stupni vzdelávania v rámci 1. a 2. vzdelávacieho cyklu. Žiakom umožňujú modelovať stavby z kociek v rozmeroch 4x4x4 a používať prezentáciu záznamu stavby z kociek v podobe jej plánu a pohľadov na ňu. Učiteľovi dovoľujú začleniť do výučby matematiky rôzne praktiky umožňujúce skúmanie geometrických útvarov v priestore, a to na úrovniach daných ŠVP [5], konkrétne na úrovni:

- pojmov: plán stavby z kociek; pohľad na stavbu z kociek zhora, spredu a zboku;
- postupov: stavanie jednoduchších i zložitejších stavieb z kociek podľa plánu a tvorba plánu podľa stavby; slovný alebo symbolický opis a záznam stavby z kociek; identifikácia a oprava chyby v zázname stavby z kociek alebo v samotnej stavbe; záznam stavby z kociek zhora, spredu a zboku; stavba z kociek podľa daného pohľadu zhora, zboku a spredu;
- praktík: objavovanie jednoznačnosti plánu stavby z kociek a využívanie vzťahov medzi plánom a počtom kociek v stavbe; objavovanie nejednoznačnosti troch pohľadov (zhora, spredu, zboku) na stavbu z kociek.

Pri zaradení appletov do vzdelávacích činností je potrebné rešpektovať základné pokyny práce s AR technológiou.

- Applety sú v aplikácii dostupné online, preto je potrebné pri práci s nimi zabezpečiť bezproblémové pripojenie na internet.
- Aplikácia využíva markerless AR (t. j. bezznačkovú AR technológiu) vyžadujúcu načítanie vodorovnej plochy pomalým pohybom zariadenia a následné označenie miesta vizualizácie virtuálneho obsahu kliknutím na značku zobrazenú na displeji zariadenia. Plocha (napr. snímaný povrch pracovného stola, lavice alebo podlaha v miestnosti) by mala byť matná, najlepšie textúrovaná a vhodne osvetlená (obr. 3).




*Obrázok 3: Postup zobrazenia stavby z kociek v AR*

## Návrhy úloh s využitím appletov vo výučbe školskej matematiky

V úlohách týkajúcich sa stavieb z kociek možno v rámci nižšieho sekundárneho vzdelávania riešiť rôzne matematické úlohy typu MST (z ang. *multi-solution tasks*, úlohy s viacerými riešeniami):

Úloha 1. Vymysli a postav stavbu z kociek, v štvorcovej sieti nakresli jej plán.
Úloha 2. Vymysli a postav zo štyroch kociek aspoň tri rôzne stavby, v štvorcovej sieti nakresli ich plány.
Úloha 3. Vymysli a postav aspoň tri rôzne dvojposchodové stavby zo štyroch kociek, v štvorcovej sieti nakresli ich plány.
Úloha 4. Nakresli v štvorcovej sieti 4x4 plán stavby a podľa neho postav stavbu.
Úloha 5. Nakresli v štvorcovej sieti 4x4 aspoň rôzne tri plány stavieb. Na každú môžeš použiť len 5 kociek. Podľa plánov postav stavby.
Úloha 6. Nakresli z 5 kociek v štvorcovej sieti 4x4 tri rôzne plány trojposchodových stavieb a podľa nich stavby postav.

K úlohám 1 a 4 možno pre konkrétne návrhy maximálnych rozmerov 4x4x4 žiadať dopočet kociek k pôvodnej stavbe tak, aby vo výslednom zobrazením novej stavby vznikli ucelené stavby tvarov kvádra alebo kocky. K úlohám 4, 5 a 6 možno pri využití appletov doplniť požiadavku zdokumentovať vytvorené stavby fotkou v rozšírenej realite. V úlohách 2, 3, 5 a 6 možno tiež diskutovať o existencii ďalších riešení a požadovať argumentačné zdôvodnenie zhodnosti alebo rôznosti nájdených stavieb. Všetky uvedené úlohy propedeuticky pracujú s pohľadom na stavbu z kociek zhora, na ktorom je kreslenie plánov stavieb založené.

Ďalší súbor úloh rozvíja možnosti využitia rôznych pohľadov na stavby z kociek.

Úloha 7. Postav aspoň ... stavby/stavieb z kociek s rovnakým pohľadom zhora/ spredu/ zboku. Nakresli ich plány.
Úloha 8. Postav aspoň ... stavby/stavieb z kociek s daným pohľadom zhora a spredu/ zhora a zboku / spredu a zboku. Nakresli ich plány.
Úloha 9. Postav aspoň ... stavby/stavieb z kociek s daným pohľadom zhora, spredu a zboku.

K úlohám 8 a 9 (za predpokladu rozumného zadania maximálnych rozmerov) možno požadovať dohľadanie všetkých možných stavieb spĺňajúcich podmienku daných tvarov pohľadov. V konkretizácii úloh 7 až 9 možno v rámci rozvoja geometrickej predstavivosti žiakov kreatívne využiť aj špecifické tvary znakov, napríklad:

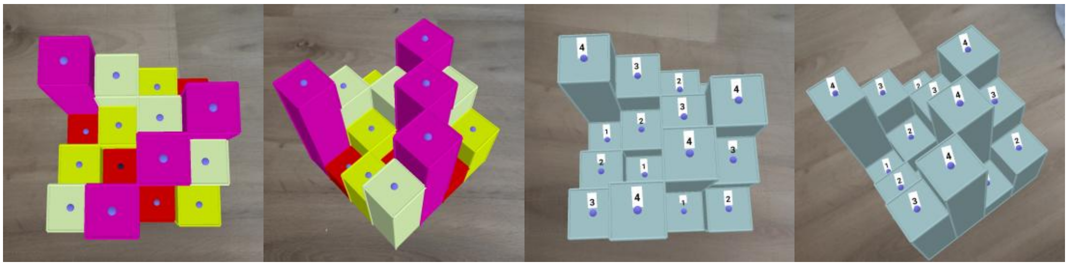
Úloha 10. Postav stavbu z kociek, ktorá má pri pohľade zhora tvar písmena T.

Úloha 11. Postav stavbu z kociek, ktorá má pri pohľade spredu tvar písmena L.

Úloha 12. Postav stavbu z kociek, ktorá má pri pohľade zhora tvar písmena T a pri pohľade spredu tvar písmena L.

Úloha 13. Postav stavbu z kociek, ktorá má pri pohľade zhora, spredu i zboku tvar písmena U.

Ako ostatnú, nami odskúšanú aktivitu možno odporúčať použitie appletov hravou formou (nielen) na hodinách matematiky, napríklad pri modelovaní stavieb rudoku, t. j. stavieb, ktorých plány pri pohľade zhora spĺňajú podmienky známejšieho číselného hlavolamu sudoku, avšak hraného v štvorcovej sieti 4x4 (obr. 4).



*Obrázok 4: Stavby rudoku v AR*

## Záver

Schopnosť AR technológie prepojiť v reálnom čase skutočný a virtuálny svet ponúka nové možnosti pre interaktívne a pútavé učenie matematiky, ktoré môže motivovať žiakov a zlepšiť ich kognitívny výkon. Úspešné včlenenie AR do školskej výučby však vyžaduje nielen technické zabezpečenie, ale aj pripravenosť a ochotu učiteľov využívať nové technológie a inovovať zaužívané vyučovacie metódy a formy práce. S postupným odstraňovaním týchto prekážok sa AR môže stať bežnou súčasťou moderného vzdelávacieho procesu, ktorý bude pripravený na prichádzajúce výzvy a podnety.


## Grantová podpora

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika* riešenom na PF PU v Prešove.


### Literatúra


[1] J. Krüger, A. Buchholz, a D. Bodemer, *Augmented Reality in Education: Three Unique Characteristics from a User's Perspective*. 2019.

[2] AFNAN, K. MUHAMMAD, N. KHAN, M.-Y. LEE, A. S. IMRAN, A M. SAJJAD, “SCHOOL OF THE FUTURE: A COMPREHENSIVE STUDY ON THE EFFECTIVENESS OF AUGMENTED REALITY AS A TOOL FOR PRIMARY SCHOOL CHILDREN’S EDUCATION”, *APPLIED SCIENCES*, ROČ. 11, Č. 11, ART. Č. 11, 2021. DOI: 10.3390/APP11115277.

[3] J. M. JABAR, R. HIDAYAT, N. A. SAMAT, M. F. H. ROHIZAN, A N. ’AIN ROSDIN, “AUGMENTED REALITY LEARNING IN MATHEMATICS EDUCATION: A SYSTEMATIC LITERATURE REVIEW”, *JOURNAL OF HIGHER EDUCATION THEORY AND PRACTICE*, ROČ. 22, Č. 15, S. 183–202, 2022.

[4] J. YU, A. R. DENHAM, A E. SEARIGHT, “A SYSTEMATIC REVIEW OF AUGMENTED REALITY GAME-BASED LEARNING IN STEM EDUCATION”, *EDUCATION TECH RESEARCH DEV*, ROČ. 70, Č. 4, S. 1169–1194, 2022. DOI: 10.1007/S11423-022-10122-Y.

[5] MŠVVAŠ SR, *VZDELÁVACIE ŠTANDARDY. VZDELÁVACIA OBLASŤ MATEMATIKA A INFORMATIKA*. BRATISLAVA, 2023. CIT: 10. JÚN 2024. [ONLINE]. DOSTUPNÉ NA HTTPS://WWW.MINEDU.SK/DATA/FILES/11820_MAREMATIKA-A-INFORMATIKA.PDF

[6] Z. BEROVÁ A P. BERO, *MATEMATIKA 5 PRACOVNÝ ZOŠIT 1*. BRATISLAVA: LIBERATERRA. CIT: 28. JÚL 2024. [ONLINE]. DOSTUPNÉ NA: HTTPS://WWW.LIBERATERRA.SK/II-STUPEN-ZS/5-ROCNIK/MATEMATIKA-5-PRACOVNY-ZOSIT-1

*RNDr. Jana Hnatová, PhD.*
*Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta,*
*Katedra matematickej edukácie*
*Ul. 17. novembra 15*
*SK – 08001 Prešov*
*e-mail: jana.hnatova@unipo.sk*

# MATEMATICKÁ GRAMOTNOSŤ ŽIAKOV SO ZRAKOVÝM POSTIHNUTÍM

MÁRIA JEŽÍKOVÁ

***Abstrakt:*** *Hlavným cieľom príspevku je v teoretickej rovine popísať problematiku matematickej gramotnosti a v empirickej rovine prezentovať výsledky výskumu hodnotenia úrovne matematickej gramotnosti u žiakov so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka základnej školy. Prostredníctvom nami vytvoreného Testu hodnotenia matematického porozumenia pre žiakov so zrakovým postihnutím sme v edukačnom kontexte v numerickej a v geometrickej oblasti hodnotili a hlbšie kvalitatívne analyzovali úroveň matematických kompetencií a matematizácie, resp. matematickej gramotnosti ako jednej z kľúčových kompetencií potrebných pre vzdelávanie.*

## Teoretické východiská pojmu matematickej gramotnosti

V minulosti sme pod matematickou gramotnosťou v tradičnom ponímaní v zmysle „*trívia*“ elementárnej gramotnosti rozumeli okrem schopnosti „*čítať a písať*“ i schopnosť „*počítať*“. Avšak, pri súčasnom ponímaní pojmu gramotnosti, resp. matematickej gramotnosti ako už nie „*trívia*“ elementárnej gramotnosti, ale dnes ako „*kontinua*“ širokospektrálneho a multidimenzionálneho fenoménu, ktorý je integrovaný do jednotlivých modelov a typov gramotnosti. Ako súčasť čitateľskej gramotnosti (kompetencie čítať numerické informácie), pisateľskej gramotnosti (kompetencie zapisovať matematické znaky a symboly), komunikačnej gramotnosti (kompetencie matematicky sa vyjadrovať), senzorickej gramotnosti (kompetencie prijať, spracovať a interpretovať matematické informácie), sociálnej gramotnosti (kompetencie riešiť matematické problémy reálneho života), finančnej, počítačovej, e-gramotnosti a v konečnom dôsledku ako súčasť funkčnej gramotnosti, ktorá je vedeckou spoločnosťou v zahraničí OECD, UNESCO, IEA, ICMI, IALSS vnímaná ako schopnosť funkčne spracovávať informácie z (písaného, tlačeného, elektronického) textu a rôznymi spôsobmi pri (čítaní, písaní a počítaní) vyjadriť, používať a interpretovať osvojené vedomosti, schopnosti a zručnosti v rôznych životných situáciách a kontextoch každodenného života.

O tom, že súčasťou funkčnej gramotnosti je i gramotnosť matematická píše aj Gavora (2003, s. 14), ktorý uvádza, že mnohé texty, ktoré človek používa v bežnom živote, obsahujú nielen verbálnu zložku, ale i čísla ako napríklad rôzne tabuľky, návody, schémy, cestovné poriadky a podobne. Pričom matematickú gramotnosť definuje ako používanie aritmetických operácií, v praktických situáciách, obyčajne „zapustených“ do textu.

Podobnú definíciu matematickej gramotnosti môžeme nájsť i v pedagogickom slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009) ide o schopnosť jednotlivca identifikovať a pochopiť úlohu, ktorú zohráva matematika vo svete, vykonávať správne matematické operácie a zaoberať sa matematikou takým spôsobom, ktorý bude spĺňať potreby súčasného a budúceho života jednotlivca.

Na druhej strane skupina odborníkov Palečková, Tomášek, 2005; Thomson, Hillman, Bortoli, 2013; Ficová, et. al., 2015; Stacey, Turner, 2015 ai., ktorí sa priamo zaoberajú problematikou matematického vzdelávania a matematickej gramotnosti sa pri jej vymedzení a definovaní najčastejšie opierajú a predovšetkým vychádzajú z definície medzinárodnej štúdie PISA (2022), ktorá definuje matematickú gramotnosť ako schopnosť jednotlivca rozpoznať, pochopiť, formulovať, použiť a interpretovať matematiku (úlohu, pojem, jav, problém) v rôznych situáciách a kontextoch a súčasne robiť zdôvodnené hodnotenia a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho občana. Pričom zhŕňa používanie matematického myslenia a kompetencii, matematických pojmov, faktov, algoritmov a nástrojov na opis, verbálne a písomné vyjadrenie, interpretáciu a predpovedanie, vyriešenie javu v rôznych intenciách.

V rámci medzinárodného prieskumu životných zručností IALSS je pojem matematickej gramotnosti definovaný ako nielen súhrn aritmetických vedomostí, schopností, zručností, návykov a presvedčení, ktoré ľudia potrebujú, aby sa účinne zapojili a vedeli sa orientovať v kvantitatívnych situáciách, ktoré vznikajú v každodennom živote a v práci, ale ako široké spektrum kompetencií, ktoré sú primárne podmienené a závislé od úrovne schopnosti čítať a porozumieť obsahu prečítaného.

Vzhľadom na vyššie uvedené definície a aktuálne názory, pohľady a trendy na chápanie pojmu matematickej gramotnosti sa domnievame a zdôrazňujeme, že je potrebné nazerať na tento pojem i vo vzťahu k problematike zrakového postihnutia, pre ktoré je z pohľadu koncepcie gramotnosti okrem zníženia kvality vizuálneho vnímania a poznávania, čiastočnej až úplnej straty kompetencie na požadovanej úrovni kedykoľvek a kdekoľvek vizuálne percipovať a interpretovať textové informácie a podnety obsiahnuté v súvislom a nesúvislom texte, charakteristická najmä veľmi individuálna a rozdielna úroveň presnosti a úplnosti prijímaných informácií.

## Z výskumu zisťovania úrovne matematickej gramotnosti u žiakov so zrakovým postihnutím

Hodnotenie úrovne matematických vedomostí a zručností, matematickej gramotnosti sa v súčasnosti v školskej praxi v základných školách okrem použitia tradičných hodnotiacich metód, spôsobov a postupov ústneho alebo písomného skúšania realizuje aj formou organizovaním hromadných skúšok národných a medzinárodných meraní, zadávaním štandardizovaných testov. Výsledky týchto národných a medzinárodných meraní nás z hľadiska kvality poskytovaného vzdelávania žiakom v základných školách upozorňujú nielen na to, ako sú naši žiaci málo gramotní, že úroveň gramotnosti v oblasti matematických zručností je nedostatočná a nízka, ale upozorňujú nás aj na to, že je potrebné zmeniť tradičný spôsob vzdelávania za taký, ktorý núti žiakov nie k memorovaniu poznatkov a ich hodnoteniu prostredníctvom klasifikácie a prirovnávaniu výkonov k normám, ale núti ich prostredníctvom slovného hodnotenia a individuálneho prístupu hodnotiť ako žiak dokáže analyzovať problémovú situáciu, argumentovať, či tvoriť hypotézy, a kriticky analyzovať matematické problémy. Zložitosť problematiky v kontexte týchto problémov vnímame však aj z hľadiska hodnotenia žiakov so zrakovým postihnutím vzdelávaných na základných školách.

V snahe o identifikáciu úrovne matematickej gramotnosti a špecifík matematického uvažovania a predstavivosti u žiakov so zrakovým postihnutím našim hlavným cieľom bolo v edukačnom kontexte v numerickej a v geometrickej oblasti hodnotiť výsledok činností matematických postupov matematického porozumenia a matematizácie u žiakov so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka ZŠ a zároveň u týchto jednotlivcov identifikovať a opísať jednotlivé špecifiká matematického uvažovania a matematickej predstavivosti.

Výsledok činností matematických procesov a postupov matematického porozumenia, resp. nameranú úroveň matematickej gramotnosti sme u žiakov so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka ZŠ hodnotili individuálne prostredníctvom nami vytvoreného hodnotiaceho nástroja Testu hodnotenia matematického porozumenia.

Test hodnotenia matematického porozumenia obsahuje tri subtesty.

1. **Subtest numerácie** – umožňuje hodnotiť elementárne matematické schopnosti v oblasti používania rôznych spôsobov kvantitatívneho vyjadrenia a overuje správnosť realizácie základných počtových operácií.
2. **Subtest matematizácie** – pozostáva zo súboru matematických úloh a otázok, ktoré vychádzajú z rôznych oblastí každodenného života, ako napríklad: nakupovanie, varenie, cestovanie a pod. v prepojení na kontext matematický. Táto časť testu obsahuje spolu 16 rôznych matematických zadaní. Každé zadanie pozostáva zo 6 úloh zo stúpajúcou náročnosťou. V tejto časti si participant náhodne ťahá jedno zo zadaní a toto zadanie rieši. Základným cieľom jednotlivých úloh v subteste matematizácie je hodnotenie úrovne matematických vedomostí a kompetencií na úrovni 1. numerácie, 2. percepcie a interpretácie, 3. reprodukcie, 4. integrácie, 5. fluencie, 6. reflexie.
3. **Subtest geometrizácie** – hodnotí matematické schopnosti v oblasti geometrického myslenia (matematickej manipulácie, vizuálneho porozumenia, abstraktného myslenia a priestorovej predstavivosti).

Nameranú úroveň matematickej gramotnosti je možné kvalitatívne i kvantitatívne analyzovať, pričom definovaná úroveň gramotnosti je diferencovaná do 6. základných úrovní od veľmi nízkej, cez nízku, základnú, priemernú, vyššiu až po veľmi vysokú úroveň matematickej gramotnosti.

Na testovaní sa zúčastnilo spolu 41 žiakov so zrakovým postihnutím. Bližšiu špecifikáciu uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

**Tabuľka 1** *Výskumný súbor*

| Slabozrakí žiaci | Nevidiaci žiaci | Dievčatá | Chlapci | Segregované vzdelávanie | Integrované vzdelávanie |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 12 | 17 | 24 | 26 | 15 |

## Vyhodnotenie výsledkov výskumu

Nameranú úroveň matematickej gramotnosti sme u žiakov so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka ZŠ hodnotili individuálne prostredníctvom nami vytvoreného hodnotiaceho nástroja Testu hodnotenia matematického porozumenia.

### Oblasť numerická

Z analýzy výsledkov realizovaného výskumu nám vyplýva, že úroveň matematickej gramotnosti **žiakov so zrakovým postihnutím 7. a 8. ročníka v oblasti numerickej sa nachádza na základnej úrovni matematickej gramotnosti**, pre ktorú je charakteristická aplikácia základných matematických vedomostí a zručností pri riešení matematických problémov v rutinných a jednoduchých situáciách.

Úroveň matematickej gramotnosti **žiakov so zrakovým postihnutím 9. ročníka v oblasti numerickej sa nachádza na vyššej priemernej úrovni matematickej gramotnosti**, na ktorej žiaci so zrakovým postihnutím preukazujú schopnosť aplikovať matematické vedomosti a zručnosti pri riešení matematických problémov nielen v jednoduchých ale aj v zložitejších a náročnejších situáciách.

Žiaci so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka ZŠ dosiahli **v oblasti numerickej podstatne vyššiu úroveň matematického porozumenia ako v oblasti geometrickej**. To znamená, že dokážu samostatne a bez väčších problémov a obmedzení matematizovať matematické problémy **predovšetkým v rovine objavovania a poznávania kvantitatívnych vzťahov, najmä v matematickom kontexte algebrických štruktúr, aritmetických operácií matematickej analýzy a syntézy.**

Síce žiaci so zrakovým postihnutím sú schopní a dokážu matematizovať kvantitatívne vzťahy avšak iba na **reprodukčnej a integračnej úrovni matematickej gramotnosti**, ktorá zahŕňa reprodukciu poučiek a definícií, vykonávanie základných výpočtov a operácií a tiež schopnosť v obmedzenej miere pracovať s rôznymi reprezentáciami predovšetkým jednoduchého kvantitatívneho vyjadrenia používaných vo vzorcoch, rovniciach a iných algebrických výrazoch.

Najväčšie ťažkosti mali žiaci so zrakovým postihnutím v oblasti numerickej s delením a správnym usporiadaním čísel. Najviac správnych odpovedí sme zaznamenali u žiakov so zrakovým postihnutím 9. ročníka ZŠ.

**Oblasť geometrická**

Pri definovaní úrovne matematického porozumenia **v oblasti geometrickej** môžeme na základe zistení uviesť, že úroveň gramotnosti u žiakov so zrakovým postihnutím 7. 8. a 9. ročníka v tejto oblasti je **veľmi nízka, nedostatočná a takmer žiadna**.

Pri kvalitatívnej analýze odpovedí žiakov so zrakovým postihnutím na jednotlivé otázky v geometrickej oblasti sme pri procesoch matematického porozumenia nespozorovali medzi žiakmi jednotlivých ročníkov významné rozdiely. Ich úroveň matematického porozumenia zobrazovaných geometrických útvarov a tvarov v rovine a v priestore bola u žiakov všetkých ročníkov a u oboch skupín (nevidiacich aj slabozrakých) takmer **identická**.

Pri porovnaní výkonov pri riešení matematických úloh medzi chlapcami a dievčatami dosiahli vyššiu úspešnosť chlapci so zrakovým postihnutím ako dievčatá so zrakovým postihnutím.

Celkovo vyššiu úspešnosť sme zaznamenali u žiakov so zrakovým postihnutím, ktorí sú vzdelávaní v základných školách pre žiakov so zrakovým postihnutím oproti žiakom so zrakovým postihnutím vzdelávaných v relatívne integrovaných podmienkach.

**Tabuľka 2** *Zhrnutie výsledkov výskumu*

| Ročník ZŠ | Oblasť numerická | | Oblasť geometrická | | Spolu | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | body | % | body | % | body | % |
| 7. ročník | 161 | 37,27 | 126 | 29,17 | 287 | 33,22 |
| 8. ročník | 184 | 42,59 | 112 | 25,93 | 296 | 34,66 |
| 9. ročník | 406 | 62,65 | 262 | 40,43 | 668 | 51,54 |

Okrem toho jedným z cieľov nášho výskumu bolo aj u spomínanej skupiny žiakov identifikovať a opísať **špecifiká matematického uvažovania a matematickej predstavivosti**, ktoré sa u žiakov so zrakovým postihnutím prejavujú najmä v obmedzenej schopnosti používať rôzne spôsoby kvantitatívneho vyjadrenia a v zníženej schopnosti až neschopnosti na rôznych úrovniach presne a správne abstraktne uvažovať a vizuálne porozumieť priestorovým vzťahom geometrických modelov a rôznych grafických reprezentácií.

Výsledky výskumu nám v tom smere explicitne naznačujú, že myslenie týchto žiakov v tejto oblasti je málo abstraktné a viac konkrétne, a omnoho viac závislé na subjektívnej vizuálnej skúsenosti a možnosti priamo prostredníctvom zraku percipovať, resp. poznávať.

Rozsah a úroveň ich vizuálnej percepcie nedokáže a nie je schopné presne, úplne a komplexne matematizovať nielen niektoré vyššie a zložitejšie ale i nižšie a jednoduchšie myšlienkové operácie a algoritmy matematického uvažovania a matematickej predstavivosti, pri realizácií takých a tých matematických procesov a činností, ktoré súvisia s odhadom vzdialenosti, určovaním a meraním dĺžky, konštrukciou a znázornením geometrických útvarov a tvarov, rysovaním, pozorovaním a poznávaním, resp. vizuálnym porozumením, abstraktným myslením a vytváraním priestorových predstáv o geometrických útvaroch a tvaroch, priestorových telesách, vzťahoch a súvislostiach matematického jazyka, ktorými sa matematika v edukačnom kontexte po obsahovej stránke zaoberá.

Predpokladáme, že výrazne zlyhávanie žiakov so zrakovým postihnutím v geometrickej oblasti a čiastočne aj v oblasti numerickej je determinované nielen druhom a stupňom zrakového postihnutia, obdobím kedy došlo k poškodeniu zraku, prognózou, ale predovšetkým mierou a kvalitou poskytovanej špeciálnopedagogickej podpory v priebehu edukácie.

Nazdávame sa, že pre optimálne rozvíjanie a postupné zvyšovanie dosiahnutej základnej úrovne matematickej gramotnosti v oblasti numerickej a zvyšovania veľmi nízkej úrovne matematickej gramotnosti v oblasti geometrickej, je podľa nášho názoru nevyhnutné cielene upriamiť pozornosť na analýzu podmienok edukácie z aspektov materiálno-technického vybavenia, odborných kompetencií pedagóga, digitálnych zručnosti žiakov so zrakovým postihnutím, a na zvyšovanie povedomia o aktuálne dostupných možnostiach vzdelávania žiakov so zrakovým postihnutím prostredníctvom inovatívnych metód a postupov moderných digitálnych technológií v oblasti matematických softvérov a alternatívnych možnostiach kompenzácie parciálnosti taktilného vnímania a celistvosti vizuálnej predstavivosti.

## LITERATÚRA


[1] FICOVÁ, L. et al., 2015. *Matematická gramotnosť v testových úlohách*. Bratislava: NÚCEM, 2015. 50 s. ISBN 978-80-89638-24-6.

[2] GAVORA, P. 2003. *Modely a úrovne gramotnosti*. In. GAVORA, P., ZÁPOTOČNÁ, O. et al., *Gramotnosť vývin a možnosti jej didaktického usmerňovania*. Bratislava: UK, 2003. s. 11–25. ISBN 80-223-1869-8.

[3] HENDL, J. 2016. *Kvalitativní výzkum: základní metódy a aplikace*. Praha: Potrál, 2016. 440 s. ISBN 978-80-262-0982-9.

[4] PALEĆKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V. 2005. *Učení pro zítřek: Výsledky výskumu OECD PISA 2003*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2005. ISBN 80-211-0500-3.

[5] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŚ, J. 2009. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2019. 395 s. ISBN 978-80-7367-647-6.

[6] THOMSON, S., HILLMAN, K., BORTOLI. L. 2013. *A teacher´s guide to PISA mathematical literacy*. Victoria: ACER Press, 2013. ISBN 978-1-74286-226-2.

[7] *Správa o realizácii medzinárodnej štúdie PISA 2022 a prvé výsledky za SR*. Bratislava: NIVAM, 2023. Dostupné na: https://www2.nucem.sk/dl/5715/PISA_2022_Kratka_sprava_SVK.pdf

[8] STACEY, K., TURNER, R. 2015. *Assessing Mathematical literacy*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. ISBN 978-3-319-10120-0.

[9] UNESCO, 2017. *Reading the past, writing the future: Fifty years of promoting literacy. Paris: United Nations Educational, Scientefic and Cultural Organization*, 2017. ISBN 978-92-3-100214-4. Dostupné na: http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002475/247563e.pdf.

*PaedDr. Mária Ježíková*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami*
*Šafárikovo námestie 6, 814 99 Bratislava*
*tel.: +421 2 9010 2019*
*e-mail: maria.jezikova@uniba.sk*

# POROZMĚNÍ ČASU V UČIVU MATEMATIKY

MICHAELA KASLOVÁ

*ABSTRAKT. Proces zobecňování je různě vymezován. Výzvy k zobecňování jsou spojeny s kompetencemi popsanými v RVP, v ŠVP, s úlohami v přijímacím řízení na vyšší stupně škol, v testech inteligence. Zaměříme se na otázky: Jak vidí zobecňování žáci? Jak odpovídá reálný proces zobecňování na vybraných situacích modelům uváděným v odborné literatuře? Jak ovlivňuje forma komunikace úroveň prezentace výstupu tohoto procesu?*

## 1. Čas ve školní matematice

Musíme rozlišit tři roviny: a) čas ve vzdělávacích programech pro ZŠ, případně i pro mateřské školy, b) čas v pojetí autorů učebnic, c) čas v pojetí aktuálně vyučujícího učitele. Tyto tři roviny, jak ukazuje praxe v některých školách, se mohou a také nemusí protínat. Příčiny mohou být různé, zrekapitulujme, co danou situaci ovlivňuje.

**Filosofie pojetí času** je v současnosti poněkud nejasná, respektive není jediná. Jde o pohledy, které jednak navazují na vývoj filosofie, jednak reagují na současné výzkumy nejen ve fyzice. Pro některé čas neexistuje, pro jiné existuje jen čas přítomný, pro jiné je omezený zdola (vznik světa), pro jiné je závislý pouze na existenci člověka či živočicha, čas je pak omezen zdola i shora, vázán na druh či jednotlivce. Další jsou ti, kteří vidí čas poskládaný z úseků, ne všichni charakterizují čas jako spojitý, podobně někteří nechápou čas jako rovnoměrně plynoucí. Najdeme tvrzení, že čas je čtvrtou dimenzí prostoru, že čas je jen vzdálenost či rozdíl mezi paralelními světy a podobně. Autoři učebnic s vlastní filosofií pracují intuitivně, Rámcové vzdělávací programy se tím nezabývají.

**Psychologie vnímání času** (vývojová či kognitivní) zdůrazňuje, že čas je subjektivní, týká se mezilidské aktivity. Emoce člověka odhalují relativitu času v procesu jeho vnímání (co jednoho baví a čas mu „letí", druhému se „táhne"); vnímání času je úzce propojeno s osobními, lidskými potřebami, jako například emočními, sociálními, biologickými včetně stárnutí, s intelektuálními potřebami (nepodnětnost a nuda). Tato subjektivita nás provází celý život, pro dítě je dominantní. Vnímání času může být spjato s biorytmy a prostředím. Čas primárně není spojován s jeho měřením.

**Český jazyk a literatura** dávají čas najevo více nástroji. Jednak prostřednictvím sloves, kdy se používají různé nástroje (např. šel jsem - jdu – půjdu, učil jsem – učím se – budu se učit, naučím se), někdy jde o složitější situaci z pohledu časoprostorových představ (skákal jsem - skáču – budu skákat; poskakoval jsem - poskakuji – poskočím/budu poskakovat). Ve hře se objevuje otázka (ne)dokonavosti (šel – chodil – chodíval), opakování slovesa (běhal, běhal a běhal, dokud…), která navozuje míru opakování; dále jsou to předpony, které avizují dokončení či zkrácení průběhu děje (stojí, postává - postojí). Dalšími nástroji zpřesnění časových představ jsou příslovce času (potom, zítra, nikdy), příslovce způsobu, kde je vztah prostoru a času (rychle, pomalu), nebo citoslovce (frrrrrrrnk, bum, báááác) – průběh děje, jeho trvání podtrhuje dynamika řeči, intonace. Citoslovce se používají při „čtení" průběhu funkce u žáků se zbytky zraku. Jindy zdánlivé slovní zpřesnění informací vede ke sporům (brzy, často). Pokud je nestupňujeme pomocí komparativu či superlativu (častěji než minulý týden; nejčastěji ze všech). Jazykový cit hraje v textu slovní úlohy podpůrnou roli v tvorbě a zpracování představ. Neuvádíme slovní zásobu popsanou v kapitole 2.

**Grafické kódování** času v umění vytváří bohatou zkušenost již před vstupem dítěte do školy, kterou někdy nevědomky užíváme v matematice: a) barva a specifické objekty umožňují hrubou identifikaci času: tma za oknem, hvězdy – noc; padající listí podzim; b) sekvence obrazů ukazuje změny, ke kterým postupně dochází a které si propojováním obrazů domýšlíme, tedy doplňujeme plynutí času; c) nestabilní poloha objektu …. d) čáry naznačují změny či rychlost změn; e) šipky směr pohybu, zakřivení čar případně i tvar, průběh pohybu; f) méně běžný tvar, např. uschlý list, tající sněhulák, zlomená noha. Podobné kódování najdeme i v obrázcích ke slovním úlohám (Kaslová, 2021, 2015).

**Dějepis** pracuje s měřením času, kam patří kalendáře, datace událostí a označování epoch. V souvislosti s dějinami umění pak spojuje čas s uměleckými styly.

Résumé: naše učebnice staví na existenci času počínajícím velkým třeskem s otevřeným koncem, nejasné, zda je do budoucna nekonečný. Čas se prezentuje zčásti jakoby nezávisle na prostoru (převody jednotek času, úlohy o věku osob), ale podmíněný existencí změn ve zbývajících typech úloh a cvičení. Přijměme tvrzení, že čas je kategorie a je součástí veškerého učiva ZŠ, především v předmětech prvouka, přírodověda, matematika, fyzika.

**Modely plynutí času** v učebnicích: a) ručičkové hodiny, b) časová přímka, c) grafy. Problematika modelování času je především u časové přímky, protože se s ní pracuje jako s číselnou osou, ale ve skutečnosti jde o měřítko, kde bod nula je předělem mezi prvním rokem před narozením Krista a prvním rokem po narození. Z toho plyne, že by se s časovou přímkou mělo pracovat jako s měřítkem, pak by i vymizely diskuse o (ne)existenci roku nula. Učebnice dějepisu používají různé způsoby práce s časem: u vyznačování epoch pracují časovou přímkou jako s měřítkem, u historických dat jako číselnou osou. Tato nejednotnost se promítá i do učebnic matematiky a způsobuje nedorozumění.

## 2. Atributy času z pohledu budoucích učitelů

Studenti matematiky, českého jazyka, historie a 1. st. ZŠ mohli na interaktivní nástěnku napsat, co/jaký je pro ně čas, co je pro ně významné, když se řekne „čas“. Byly popsány tři archy formátu A0 a výpovědi lze zařadit do kategorií: a) **spojitost, trvání, pohyb**: *čas plyne, čas prchá, letí, čas se řítí, pádí, se vleče, se táhne, běží, probíhá, nezastaví se, zrychluje, nezpomalí, zhojí, semele, měří všem stejně, odměřuje, tiká ti čas, pořád, vždycky, kdykoli, furt, bez přestání;* b) **charakteristika či lokace času:** *přesný čas, pozdní čas, čas na.., čas her, Velikonoc, vánoční, posunutý, letní /zimní čas, prodloužení (sporty), prodloužený čas (na Hromnice, fotbal), běžecký, rekordní, příjezdu, úmrtí, pro alibi, změny, zlomu, doletu;*

c) **personifikace času**: *čas je krutý, neúprosný, mě svazuje, mě nutí, mě drtí, odkrajuje, ti to sečte,* d) **omezení času, konečnost**: *všeho do času, načas, včas, zavčas, často, občas, dočasně*, *časně, za dávných/starých časů, kdysi;* e) **popření času, nulový čas:** nikdy, ani náhodou, až opadá listí z dubu, až naprší a uschne; f) **jednotky času**: *den, měsíc, týden, hodina, půlhodina, minuta, sekunda, rok(y), léta, výročí, narozeniny; g)* **časový úsek** (ne vždy jednoznačně určen, často kulturně či geograficky podmíněn): *svítání, rozbřesk, východ, ráno, dopoledne, poledne, popolední, odpoledne, navečer, stmívání, šeření, soumrak, zapadá S., tma, noc, půlnoc, jaro, léto, podzim, zima, pozimek, předjaří, předlétí, babí léto, měsíce, snídaně, přesnídávka, oběd, svačina, večeře, (noční) spánek, zdřímnutí, siesta, přestávka; čas: vlka, ledu, chladu, větru, deště, období dešťů*; h) **limity:** *odsud – posud, od - do, nevidím, svítání, od večera do rána, dokud, tak dlouho - až, dokud - až zakokrhá kohout, mezi skřivánkem a sovou;* i) **epocha:** *starověk, novověk, středověk, baroko, první světová válka, stěhování národů, třetihory, za časů krále…., za Rudolfa II.;* j) **vysoká rychlost provedení**, **nečekanost:** *momentík, chvilka, co by dup, na to šup, v cuku letu, než mrknu, v mžiku oka, okamžitě, než bys řekl švec, vteřinečka, skokem, vtom, najednou,* *náhle, naráz, fofrem, teď, ihned, jako z čistého nebe, úderem blesku; k)* **časová avíza spojená s měřením***: hodinky, hodiny, zvon, budík, stopky, kalendář, svíčka, časová osa.*

Studentská i žákovská slovní zásoba k času ukazují na bohatost toho, co vše se váže k času. Převažuje v ní subjektivní vnímání a emoce, intuitivní užívání. Exaktní vyjádření času představuje jen menší procento užitých slov. Slovní zásoba se utváří v matematice, fyzice, i např. v dějepise. Slovní zásobu ovlivňuje komunikace doma, ve škole, s kamarády, rozvíjí se čtením, sledováním filmů. Čas je dominantně vnímán ve vztahu ke změnám v prostoru, nikoli izolovaně.

## 3. Vnímání a měření času ve vývoji člověka

Ve vývoji lidstva se vnímání času utvářelo především díky přírodním cyklům jako je pravidelné střídání světla a tepla s tmou a chladem; vznikaly pracovní cykly, rituály. To bylo provázáno s opatřováním potravy a vytvářením bezpečného prostředí. Později přišlo stanovování poledne, polohy Slunce a Měsíce, určování směrů, světových stran (např. strana východní, polední), vnímání měsíčních cyklů a případně ročních období včetně příchodu dešťů či sněhu, příletu a odletu ptáků, což se u nás projevilo i v pranostikách. První kalendáře, časové signály pro všechny (zvon, troubení, později střelba z děla) byly prvními nástroji v širší společnosti na ujednocení vnímání času a práce s ním. Potřeba měřit čas vyvstala po dlouhém vývoji do popředí především v souvislosti s plněním povinností, s průmyslovou výrobou, organizací práce a s potřebou hromadné dopravy mimo dochozí vzdálenosti. První věžní hodiny měly pouze jednu ručičku, která ukazovala celé hodiny, minutová ručička přišla na hodiny později. Ve dvacátém století měli v rodinách „velké hodiny" (kukačky, pendlovky,…), osobní hodinky měl zpravidla jen otec. Teprve po druhé světové válce se v Evropě stávaly náramkové hodinky běžnější i pro další členy rodiny; ještě v 60. letech 20. století dárek k 15. narozeninám. O problému v orientaci v čase se nikde nepsalo. Později docházelo postupně ke změnám v kvalitě měření času, např. ve sportu. To znamená, že ve vývoji lidstva k přesnému měření času plošně dochází až v posledních 50 letech, proporčně vzhledem k historii mnohem později než prezentují naše vzdělávací programy. Tlačíme na dítě vzhledem k jeho mentálnímu vývoji, aby „skočilo" do poslední fáze vývoje práce s časem, často již v předškolním věku, což je v rozporu i s kognitivní psychologií podporující geneticko-historickou paralelu. Úlohy s cykly a úpodporující kontinuitu se téměř nevyskytují v českých učebnicích matematiky (více nakladatelství).

## 4. Žákovy zkušenosti od mateřské po ZŠ a diagnostika žáka

Zkušenosti práce s časem se v Evropě liší. Např. Itálie začíná důsledně historicko-genetickou paralelou vnímáním cyklů, především pozorováním Slunce (např. Lanciano, Lorenzoni) s důrazem na smysluplnost žákovských aktivit. Na rozdíl od toho ČR od mateřské školy tlačí na jmenování dnů v týdnu, práci s kalendářem (přírody), někde i odečtem času z ručičkových hodin, i když je dítě v předškolním období omezeno ve vnímání struktury na nejvýše sedm části strukturovaného celku. Poradny testují orientaci v čase např. tak, že dítě vyjmenuje roční období, dny v týdnu, nebo části dne, nebo se ptají na slovo následující v dané řadě slov za vysloveným (ráno). Pro mnohé z testovaných jde o prázdné pojmy, slova bez představ, bez chápání vztahů v dané struktuře, jak ukázalo mé šetření. Vynecháním důrazu na cykličnost spojenou s pozorováním změn v okolí se tak vytrácí vnímáním kontinuity času a odděluje se „školní čas" od subjektivního, čas je odtržen od prostoru a vnímání změn v něm. To může ovlivnit i řešení úloh na 2. st. ZŠ. Sonda prováděná v ZŠ v 1.

a 3. ročnících položila žákům následující otázky: „Kdy začíná a končí pondělí? Jak poznáš, že musíš jít do školy? Co znamená, že dnes máš narozeniny? Vysvětli, co znamená, že je ti právě osm/devět let.“ Ukázky nejfrekventovanějších odpovědí: a, b) *Když se ráno probudím, když jdu do školy a když ze školy odcházím/ když jsem po večeři, když je po pohádce/Večerníčku, když jdu spát, když se zhasne. Máme říká? Zase pozdě/dělej, spěcháme, tak honem, zvoní budík,…; c, d) Že jdeme do Mekáče, že dostanu dort, dárky, že přijdou kamarádi, že tam jsou svíčky, balónek s osmičkou.* Týden u nich tedy odpovídá **sledu časových úseků s mezerami** - s bezčasím, nikoli cyklickému sledu na sebe plynule navazujících časových úseků (dnů). Domácí denní ranní rituály nejsou spojeny s konkrétním časovým údajem u většiny. Narozeniny neznamenají dovršení entého cyklu od narození, ale oslavu, jeden den, **izolovaný moment vytržený ze struktury**, podobně jako Silvestr.

Práce s časem v matematice 1. st. ZŠ se u nás silně orientuje na odečet hodin na ciferníku či naopak nastavení ručiček bez ohledu na smysluplnost z pohledu dítěte, na řešení úloh o věku (rok je pro šestileté dítě „nezvladatelně velká jednotka“), což vede k tomu, že čísla vytrhnou z kontextu, použijí ke kalkulu, ale při návratu do reality kontextu se objevují obtíže, případně nižší schopnost odstranit chybu, je-li výsledek nereálný.

## 5. Úlohy o čase v učebnicích

**Aritmeticko-algebraické úlohy** sice nepojednávají o čase, avšak čas se promítá do jejich „čtení“. Příklady: a) 123+234=357 platí vždy v poziční desítkové soustavě ve smyslu, že rovnost <u>platila, platí a za daných podmínek i bude</u>; to znamená sloveso *rovná se* má sice z pohledu gramatiky slovesný čas přítomný, avšak z pohledu matematiky jde o „nadčasovost“. b) 2x+8=10 v N, kde x=1 *je* jediným řešením za daných podmínek, tedy *„rovná se“* a *„je“* hodnotíme rovněž nadčasově; c) 20–x=40 v N *nemá* řešení, sloveso se záporkou ve významu neexistence hodnotíme rovněž nadčasově. Funguje nadčasovost v každém číselném oboru? Jak toto chápe žák? Bude tato nadčasovost funkční, pokud učebnice neuvádí obor, ve kterém má být úloha řešena? (Kaslová, 2022) K daným úlohám řadím i převody jednotek. Tyto úlohy z pohledu žáka nemusí vyznívat nadčasově. Například: 1 km = 1 000 m, kde jsem hledali počet metrů, sice čteme „*rovná se*“ nebo „*je*“, „*měří*“, avšak v rámci sondy na 2. st. ZŠ v roce 2018 jsem zaregistrovala 6 žáků z 58, pro které nejde o nadčasový vztah: „*1 km musíme rozdělit na stejné kusy, metry, a těch tam potom bude 1 000.*“, tedy metry. Časová omezenost daného vztahu plyne mimo jiné ze silné provazby žáků na jedinečnou situaci vázanou na realitu, podobně opačně 1 000 m = 1 km chápou jako konstrukci. V úlohách zaměřených na převody jednotek času se hlavně prezentují čísla izolovaně od reality, u některých žáků jde o operace s prázdnými pojmy, mechanické užití návodu (žák 6.r. „hodiny vynásob 60 a dostaneš minuty“).

**V konstrukčních úlohách,** do jisté míry podobně, funguje chápání času, které zasahuje pojmotvorný proces i konstrukční úlohy. Příklad čtení popisu konstrukce trojúhelníka ABC, který je dán třemi stranami (a= 4 cm, b = 3 cm, c = 4 cm): *Sestrojíme* úsečku AB o délce / která *měří* 4 cm; kolem bodu A *opíšeme* kružnici $k_1$ o poloměru 4 cm (kde r se *rovná* 4 cm); kolem bodu B opíšeme kružnici $k_2$ o poloměru 3 cm; průsečík obou kružnic *označíme* C a *vyznačíme* strany a, b. To znamená, že do té doby bod A, B, C/ trojúhelník ABC neexistoval? Diskuse s žáky 7.-9.r. ZŠ ukázala, že se dělí filosoficky do dvou hlavních skupin: a) každá konstrukce dává vzniknout geometrickým objektům, které do té doby neexistovaly, je svým způsobem jedinečná, i když to mají všichni žáci „stejně“; b) konstrukce jen vyznačuje, zviditelňuje to, co již existuje.

**Matematické věty** pracují s časem dvojím způsobem: některé užívají slovesa ve smyslu nadčasovém, jiné staví zpravidla na podmínce. To znamená, že dle výpovědí žáků 2. st. ZŠ pro některé žáky „pravidlo“ dosud neplatí, teprve až dospějeme ke konstrukci dané situace.

**Pojmy a jejich vymezení, charakteristiky** Většina pojmů je opět charakterizována nadčasově, ovšem s jistým nevysloveným omezením v závislosti na formulaci. Žákovské příklady: čtverec je pravoúhlý čtyřúhelník, má všechny strany shodné. Sudé číslo je celé (přirozené) číslo, které je dělitelné dvěma. Kvantifikátory, které odkazují na univerzálnost všeplatnost nezávisle na čase či unicitu, se v běžné řeči nepoužívají.

**Slovní úlohy** se zpravidla dělí na statické, text má podobu popisu stavu ze dvou různých úhlů pohledu, a dynamické, které staví na vyprávění (Kaslová, 2017, 2015), mají zpravidla jeden děj. U úloh o pohybu se v opakovaných sondách v 8. a 9. ročníku ZŠ (2012-16) ukázalo, že více než polovina 94 sledovaných žáků hledá nějaké vzorce, nemá přesnou představu popsané situace, vytrhává čísla z kontextu úlohy, proto nevidí souvislosti mezi dvěma slovními úlohami typu „jedou dvě auta proti sobě“ – v přímce; „přijíždím ke křižovatce a zleva přijíždí jiné auto“ – v pravém úhlu k sobě, „jdeme si naproti lesem“ – po křivce. Dramatizace situací ve třídě některým žákům 2. st. pomáhá, jiným nikoli zřejmě proto, že tato učitelská strategie přichází pozdě z pohledu vývoje žáka, měla by se používat dříve.

V dynamických slovních úlohách se vyskytuje i více dějů v různých strukturách. S oporou o didaktiku cizích jazyků (Hendrich, 1988) můžeme identifikovat děje jednosměrné i protisměrné, souběžně, střídající se, jeden zasahující do druhého a podobně. Jde o jeden z fenoménů, které hrají roli v obtížnosti textu z pohledu tvorby představ a orientace v nich. Čas, ve kterých jsou úlohy formulovány je dle mé analýzy učebnic formulován dominantně v minulém čase, minimálně v čase budoucím (Kaslová, 2013, 2017); otázky či výzvy ve slovních úlohách rovněž málokdy směřují do budoucna (Kaslová, 2022). Tato omezená zkušenost s budoucím časem může negativně ovlivnit schopnost plánovat, např. ve finanční gramotnosti.

U dynamických slovních úloh rozlišuji úlohy: a) ve kterých čas hraje důležitou roli; b) ve kterých je čas v jádru nepodstatný, tvoří kontext (časová lokace) nebo nadbytečnou informaci. Rozlišuji šest důležitých skupin situací: 1) časový **bod** (bez rozměrového momentu), 2) Měření trvání, **délka časového úseku, (de)kompozici úseku;** 3) **hranice** (ohraničení) časového úseku; 4) **plynulost** času od jednoho časového bodu, porovnání, směr (návaznost), zejména tam, kde se pracuje s více pohyblivými objekty; 5) **návaznost** či **mezery** mezi časovými úseky; 6) **relativní** nekonečnost, neukončenost nebo nepředstavitelnost konce (např. práce s časovou přímkou; pohádky: „a žijí dodnes“).

Nabízím vlastní **typologii slovních** úloh z pohledu práce s časem:

a) **Vztah** mezi dvěma časovými **body** (např. co nastalo dřív)**; b) Délka** časového úseku (např. znáš čas odletu, příletu, urči dobu letu); c) **Limity**/hranice jednoho časového úseku (jsou dané, nebo je nutné je identifikovat); d) **Vztah** mezi dvěma časovými **úseky bez přímé vazby na prostor** (např. kdo byl na cestě déle) nebo s vazbou na prostor (práce s rychlostí)**;** e) **Vztah** mezi jedním časovým **bodem** a jedním časovým **úsekem** či jeho **limity** (i úlohy o pohybu); f) **Vztah** mezi dvěma **délkami** úseků (sem patří i převody jednotek času; lze spojit i s rychlostí); g) **Charakter** časového **bodu/ úseku,** (nahodilost, cykličnost, unicita) případně určení **periody výskytu;** h) **Směr** plynutí času (po nebo proti toku času, či kombinace). Na kterýkoli z bodů a-h) lze pohlížet dvojím způsobem: A) je součástí zadání slovní úlohy; B) vyžaduje se v odpovědi.

## 6. Závěr

Příspěvek se nezabýval úlohami o čase, které se opírají o nové technologie, protože to je závislé na učiteli, co a jak zvolí, nepodléhá udělení doložky ministerstva školství danému didaktickému materiálu. Shrneme-li současnou situaci v učebnicích matematiky, je patrné, že fenomén času v nich není dobře a systematicky rozpracován. Žákova zkušenost praktická i lingvistická se poněkud rozchází s pojetím úloh o čase. Podobně testy na orientaci v čase neposuzují míru porozumění danému pojmu jako kategorii. Analyzujeme-li obtíže v řešení slovních úloh z pohledu tohoto příspěvku, pak lze konstatovat, že jsou spjaty s chybami v didaktických postupech více, než ve zrání žáků, použijeme-li klasifikaci chyb a omylů dle Torotory (2019). Rezervy spatřuji v rozpracování celé didaktické řady, respektive struktury s nutností provázat čas více s prostorem, s historií, s vývojem kultury, Na to upozorňují světově uznávaní didaktici matematiky již od 80. let 20. století (např. Castelnuovo, Pellery). Slovy profesora Brousseau: nevytváříme dostatečně silné didaktické situace, aby se staly adidaktickými.

## LITERATÚRA


[1] Avery, D. *Jak dlouho trvá rok?* Fraus : Praha, 2008. ISBN: 978-80-7238-814-1

[2] Bednářová, J. a V. Šmardová *Diagnostika dítěte předškolního věku*. Computer Press : Brno, 2016.

[3] Brousseau, G. *Úvod do teorie didaktických situací.* UK PEDF : Praha, 2012. ISBN 978-80-7290-600-0

[4] Cestelnuovo, E. *Didattica della matematica*, vol. I, II. La Nuova Italia E. : Firenze, 1999.

[5] Hart-Davis, A. *Kniha o čase*. Rebo : Praha, 2013, ISBN: 978-80-2550-648-6

[6] Hawkins, S. *Stručná teorie času*. Dokořán : Praha, 2023, ISBN 978-80-7675-036-4

[7] Hednrich, J. *Didaktika cizích jazyků.* SPN : Praha, 1988.

[8] Herto., T. *O původu času*. Dybbuk : Praha, 2013. ISBN 978-80-7690-045-5

[9] Kant, E. *Kritika čistého rozumu*. Oikoymenh : Praha, 2001.  ISBN: 80-7298-035-1

[10] Kaslová, M. *Orientace v čase*. In Martina Uhlířová (Ed.) Sborník EME, UPOL: Olomouc, 2013,

[11] Kaslová, M. Obrazové informace. In Naďa Vodnrová (Ed.) *Sborník Dva dny s didaktikou matematiky.* UK PEDF : Praha, 2015, ISBN 978-80-7290-843-1

[12] Kaslová, M. Otázky v učebnicích. In Vondrová, Naďa (Ed.) *2 dny s DM*, s. 39 -44. UK PEDF, Praha, 2022. ISBN

[13] Kaslová, M. *Orientace v čase v mateřské škole*. KVIC, Plzeň, 2020. (bez ISBN)

[14] Kaslová, M. Cesta ke grafickému znaku. In Kaslová, M. *Předmatematické činnosti*, Raabe: Praha, 2021.

[15] Kaslová, M: Příprava na slovní úlohy. EFS : Kralupy nad Vltavou, 2017.

[16] Lanciano, N. *In Sole, Luna et Stellis.* Apeiron Editori : Roma, 2018. ISBN 978-8885978928

[17] Lorenzoni, F. *Con il Cielo negli occhi*. Marcon Colnalab Editorale, 1991 EAN 9788861530973

[18] Pellerey, M. a kol. *Scoprire perché.* Fabri editori: Milano, 1989.

[19] Penrose, R. a *Povaha prostoru a času.* Dokořán : Praha, 2019. ISBN 978-80-257-2581-8,

[20] Pleskotová, P. *Tajemný rozměr času.* Albatros : Praha, 1979.

[22] Rovelli, C. *Řád času.* Dokořán, Praha, 2020. ISBN: 978-80-7363-951-8

[23] Torotora, R. *Very often student´s erros are all but mistakes*. Přednáška 13.3. 2019, IV. konference ISCMT. Pedagogical Univerzity Krakow.

*PhDr. Michaela Kaslová*
*UK PEDF Praha*
*M. Rettigové 4*
*ČR – 116 39 Praha 1*
*e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz*

# RÓMSKE DETI A DELITEĽNOSŤ - POSTREHY A AKTIVITY

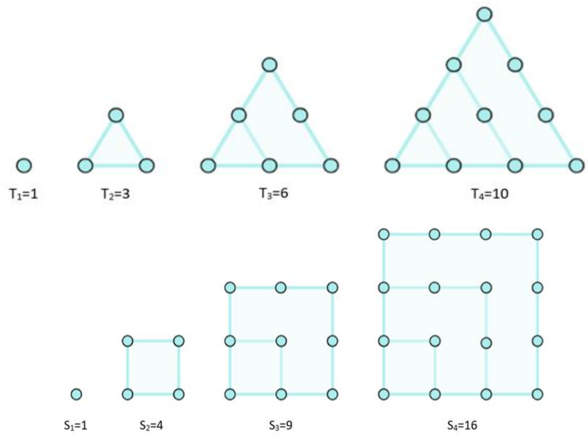
MIRIAMA KMECIKOVÁ

*ABSTRAKT. Príspevok je zhrnutím pozorovaní z overovania metodík zameraných na vyučovanie kritérií deliteľnosti. Toto overovanie bolo realizované v 6. ročníku základnej školy v triede, ktorú navštevujú rómski žiaci. Zhrnieme problémy, na ktoré sme počas overovania narazili. Tiež navrhneme riešenia týchto problémov a úpravu metodík pre špecifické prostredie rómskych tried.*

## Deliteľnosť

Deliteľnosť je v matematike témou, ktorou sa žiaci zaoberajú na 1. aj 2. stupni ZŠ a tiež na strednej škole. V priebehu rokov sa zvyšuje sofistikovanosť zápisu deliteľnosti - žiaci na stredných školách už na tieto zápisy používajú premennú. Napríklad pri téme dôkazových úloh vie stredoškolák slovnú informáciu o tom, že prirodzené číslo $k$ je deliteľné 2, zapísať pomocou matematického zápisu $k = 2n\,, n \in \mathbb{N}$. Ako sa ale k takémuto zápisu dostať? Využitie premennej sa v školskej matematike ponúka až v 8. ročníku ZŠ, kedy sa s ňou žiaci prvýkrát stretnú pri téme algebraické výrazy. Kritéria deliteľnosti sa k žiakom dostanú už v 6. ročníku, kedy znalosťou premennej nedisponujú. Preto je potrebné hľadať iné spôsoby, ako žiakom pravidlá pre deliteľnosť odprezentovať.

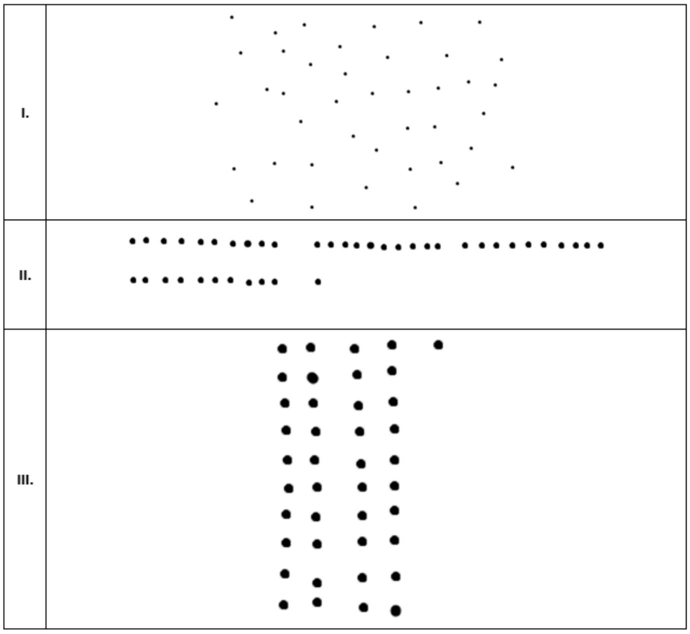
Jedno z riešení ako obísť premennú pri výučbe kritérií deliteľnosti nám ponúka história matematiky cez Pytagorejské figurálne čísla. Pytagorejci pracovali s trojuholníkovými, štvorcovými či inými mnohouholníkovými číslami a hľadali medzi nimi zákonitosti. Tak prišli na to, že $n$ - té trojuholníkové číslo je súčtom celých kladných čísel menších ako $n$ a že $n$ - té štvorcové číslo je druhá mocnina čísla $n$ (Čižmár, 2017).




*Obrázok 1: Trojuholníkové a štvorcové figurálne čísla*

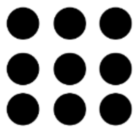
Zaujímavé je, že tieto čísla sú reprezentované pomocou bodiek (historicky kamienkov). Práve to je inšpiráciou pre vysvetľovanie deliteľnosti čísel žiakom 6. ročníka.

Okrem reprezentácie množstva pomocou bodiek je dôležité aj usporiadanie týchto bodiek. Vhodné usporiadanie nám umožňuje interpretovať vlastnosti čísla z reprezentácie vytvorenej bodkami. Na Obrázku 2 môžete vidieť tri reprezentácie čísel.



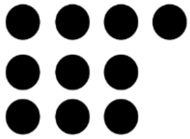

*Obrázok 2: Koľko bodiek je na obrázku? (zdroj: metodika IT akadémia)*

Ak by sme mali rýchlo odpovedať na otázku, koľko bodiek je na obrázku, najrýchlejšie by sme to zvládli pri usporiadaní III., keďže ide o systematické postupné usporiadanie do riadkov a stĺpcov. To nás privádza k transparentným a netransparentným reprezentáciám pre určitú vlastnosť čísel (Zazkis, 2008).



*Obrázok 3: Transparetné a netransparetné reprezentácie I.*

V usporiadaní na Obrázku 3 nás nezaujíma, aké číslo bodky reprezentujú. Je pre nás ale dôležité, že sú usporiadané v 3 riadkoch/stĺpcoch, čo hovorí o jeho deliteľnosti číslom 3. Toto usporiadanie je transparentné pre deliteľnosť číslom 3. Usporiadanie ale nebude transparentné pre deliteľnosť číslom 2, keďže z neho nie je viditeľné, či sa dajú bodky rozdeliť do dvoch riadkov/stĺpcov. Z vhodného usporiadania vieme vyčítať aj nedeliteľnosť čísla a zvyšok po delení. Napríklad na Obrázku 4 (usporiadanie transparentné pre deliteľnosť 3) vidíme, že číslo nie je deliteľné 3 a zvyšok po delení tromi bude 1.



*Obrázok 4: Transparetné a netransparetné reprezentácie II.*

## Rómske deti a ich učenie (sa)

Okrem výzvy s reprezentáciou čísel pri vyučovaní kritérií deliteľnosti sme museli počítať aj s ďalšími prekážkami, ktoré sa vyskytujú pri vyučovaní rómskych žiakov. Prvou prekážkou je jazyk. Pre rómske deti je slovenčina druhým jazykom. Kvôli tomu je pre nich niekedy ťažké zapamätať si pojmy, alebo rozumieť zložitejším zadaniam úloh. Špecifikom rómskeho jazyka je aj jeho verbálna forma. Rómske deti nemajú skúsenosť s písaným textom. Je pre nich jednoduchšie mentálne počítanie, ako počítanie na papieri (Stathopoulou, Kalabasis, 2006). Problém s mentálnym počítaním nastáva vo fáze, kedy sú príklady zložitejšie a je nutná nejaká forma abstraktného myslenia. V neposlednom rade je problémom aj nízky socioekonomický status väčšiny týchto žiakov a tiež to, že pochádzajú z málo podnetného prostredia. Vzhľadom na tieto okolnosti bolo nutné vytvorené metodiky upraviť tak, aby boli prínosné pre deti z tohto prostredia.

## Postrehy z overovania

V rámci témy kritérií deliteľnosti sa overovala séria metodík z projektu IT akadémia (k metodikám sa je možné bezplatne dostať po registrácii na stránke https://registracia.itakademia.sk/). Názvy a poradie metodík môžete vidieť v Tabuľke 1. Tieto metodiky boli v rámci projektu IT akadémia overované v bežných triedach a na základe overovania boli metodiky upravované. Našim cieľom bolo zistiť, či budú metodiky fungovať aj v špecifickom prostredí školy s rómskymi žiakmi a ak nie, aké zmeny je nutné urobiť, aby fungovali.

| **Názov metodiky** | **Ciele** |
|---|---|
| Hra počet deliteľov | objaviť čísla, kt. majú práve 2/menej ako 2/viac ako 2 delitele; pojmy prvočíslo a zložené číslo; pojem deliteľ čísla a jeho prehĺbenie; nájdenie všetkých deliteľov daného čísla |
| Najmenší spoločný násobok | pojem spoločný násobok; jeho nájdenie vypisovaním; porovnať množiny násobkov dvoch prirodzených čísel a vyhľadať ich spoločné prvky |
| V tých číslach sa čosi opakuje | žiak rozumie pojmu deliteľný; vie vysloviť kritérium deliteľnosti 10 a 100 a rozumie, prečo funguje; vie uplatniť kritérium deliteľnosti 10 a 100 |
| Keď 2+3 nie je 5 I. a II. | žiak formuluje kritéria pre deliteľnosť 2,5 a 4; vie rozhodnúť či je dané číslo deliteľné 2,5 a 4; žiak si uvedomuje súvislosti medzi zvyškami sčítancov a súčtu |
| Deliteľnosť deviatimi a tromi I. a II. | vie rozhodnúť o deliteľnosti 9 na základe ciferného súčtu; vie doplniť číslicu do čísla tak, aby bolo deliteľné |

| | |
|---|---|
| | 9; rozumie, že ak poprehadzujeme číslice, tak číslo bude stále deliteľné 9 |
| O šestke | žiak vie formulovať kritérium pre deliteľnosť čísla 6; vie rozhodnúť o deliteľnosti číslom 6; rozumie podstate kritéria a vie tvoriť kritéria pre iné zložené čísla; vníma, že nie vždy zistíme deliteľnosť zloženého čísla tak, že ho rozložíme na dva delitele |

*Tabuľka 1: Metodiky IT akadémia*

Overovanie metodík prebiehalo na ZŠ Ľudmily Podjavorinskej na Luníku IX. v 6. ročníku ZŠ. Vzhľadom na špecifiká učenia sa rómskych žiakov sme hneď v úvode overovania zaviedli niekoľko zmien:

- žiaci mohli používať násobilkové tabuľky (našim cieľom nebolo overovať ich schopnosti násobiť spamäti)
- ak to bolo možné, aktivity z metodík sme upravili tak, aby žiaci mohli pracovať v skupinách/dvojiciach
- zmena aktivít tak, aby nemuseli sedieť v laviciach a aby pracovali s reálnymi objektmi, ktoré si môžu chytiť (nižšia potrebná miera abstrakcie)

V nasledujúcej časti popíšeme niekoľko aktivít, ktoré sme so žiakmi overovali a tiež to, na aké prekážky sme pri nich natrafili.

*Úvodná aktivita*

Úlohou úvodnej aktivity bolo porozumenie pojmom násobok, deliteľ a vzťahov medzi číslami - číslo delí iné číslo, číslo je deliteľné iným číslom, číslo je násobkom iného čísla.

Žiaci dostali kartičky s číslami, pričom dané čísla si boli navzájom násobkami a deliteľmi. Následne bolo ich úlohou nájsť svoj násobok, alebo svojho deliteľa. Priradenie nebolo jednoznačné a preto mohli vzniknúť dvojice aj trojice žiakov. Keď žiaci vytvorili skupinky, každý z nich podľa kartičky, ktorú mal v ruke, doplnil nasledujúce vety:

Ja som číslo ____. Som deliteľom čísla ____. Som násobkom čísla ____. Som deliteľný číslom ____.

V ďalšej aktivite žiaci opäť dostali kartičky s číslami a mali vytvoriť súčiny - teda dva činitele si mali nájsť svoj súčin. Potom opäť dopĺňali vyššie spomenuté vety.

Poslednou aktivitou bolo delenie sa žiakov do skupín s rovnakým počtom. Pri tejto aktivite si žiaci uvedomili, že nie každé číslo sa dá deliť každým menším číslom (napr. 15 žiakov sa má rozdeliť do 4 rovnakých skupín) a pochopili tiež pojem zvyšku po delení.

Postrehy z úvodnej aktivity:

- problém so slovným spojením „byť deliteľný“, v rómskom jazyku nemajú trpný rod - je potrebné používať slovné spojenie „dá sa deliť“
- učitelia majú tendenciu učiť žiakov, že násobok je vždy to väčšie a deliteľ vždy to menšie, čo je problém pri iných množinách čísel - je potrebné dbať na porozumenie pojmov násobok a deliteľ

Keďže žiaci mali aj naďalej problém s pojmami násobok a deliteľ, doplnili sme aktivitu na uvedomenie si delenia so zvyškom a bezo zvyšku, kde žiaci pracovali s kockami a podložkou. Vo dvojiciach mali 20, 21, 23 a 25 kociek rozdeliť postupne do 2, 3, 4 a 5 rovnako veľkých skupín. Ukážku môžete vidieť na Obrázku 5. Táto aktivita pomohla žiakom uvedomiť si, že rôzne čísla majú rôzny počet deliteľov.

*Obrázok 5: Práca s kockami na podložke*

*Metodika: Hra počet deliteľov*

Hra počet deliteľov prebieha na hracom pláne, ktorý môžete vidieť na Obrázku 6. Hru hrajú dvaja hráči - prvý hráč si zvolí číslo a označí ho svojou farbou (napr. modrou) a druhý hráč označí svojou farbou (napr. červenou) všetkých jeho deliteľov. Následne druhý hráč označí svojou farbou (červenou) ďalšie číslo a prvý hráč označí všetkých jeho deliteľov (modrou). Ak niektorý hráč označí číslo, ktoré už na hracom pláne nemá žiadneho neoznačeného deliteľa, prichádza o ťah a číslo sa vyškrtne. Na konci hry si hráči spočítajú čísla, ktoré sú označené ich farbou. Hráč, ktorý má väčší súčet vyhráva.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

*Obrázok 6: Hrací plán - hra počet deliteľov*

Žiaci zvyčajne v prvom kole hry vyberajú čísla náhodne. Potom si ale začnú uvedomovať, čo je výhodné a začnú protihráčom vyberať čísla, ktoré majú čo najmenší počet čo najmenších deliteľov. Okrem hracieho plánu by mali žiaci zapisovať na papier vedľa, ktoré číslo ich protihráč zvolil a ktoré delitele označili. Tento zápis slúži ako informácia pre učiteľa, ktorý potom vie skontrolovať, či žiaci ovládajú delitele čísel.

Po tejto aktivite žiaci prešli na pracovný list, v ktorom pre čísla od 1 po 30 vypisovali ich delitele a rozhodovali, či ide o prvočíslo, alebo zložené číslo.

Postrehy z metodiky Hra počet deliteľov:

- žiaci pri hre nezapisovali na vedľajší papierik čísla a aké jeho delitele označili - je potrebné vytvárať trojice žiakov pričom jeden žiak bude „zapisovateľ" a vo svojich úlohách sa budú striedať
- po hre sme pridali aktivitu s Eratostenovým sitom

*Metodika: Najmenší spoločný násobok*

Metodika začínala aktivitou, pri ktorej učiteľ postupne hovoril čísla od 1 po 30. Polovica triedy tlieskala pri všetkých násobkoch čísla 2 a druhá polovica triedy dupala pri všetkých násobkoch čísla 3. Postupne sa menili kombinácie čísel (napr. 3 a 4, 2 a 4). Žiaci si pri tejto aktivite uvedomili, že pri niektorých číslach sa aj tlieska aj dupe. Tieto čísla sú spoločnými násobkami oboch čísel.

Metodika pokračuje pracovným listom, kde žiaci ďalej pracujú s násobkami čísel. Vypisujú si násobky dvoch rôznych čísel, označia spoločné násobky a následne vyberú najmenší z nich - najmenší spoločný násobok.

Postrehy z metodiky Najmenší spoločný násobok:

- žiakov veľmi zaujala aktivita na úvod, kde prišlo k uvedomeniu spoločných násobkov viacerých čísel, vtiahla ich do témy natoľko, že nebol problém s ďalšou prácou v pracovných listoch - v tejto metodike sme nerobili žiadne zmeny

*Metodika: V tých číslach sa čosi opakuje*

Prostredníctvom aktivít tejto metodiky sa prehlbuje porozumenie delenia so zvyškom a bezo zvyšku. Žiaci pracujú s úlohami v pracovnom liste, príklad úloh môžete vidieť na Obrázku 7. V pôvodnej verzii metodiky mali žiaci pracovať iba s pracovnými listami. V upravenej overovanej verzii mohli využívať kocky a podložky ako v úvodnej aktivite.

**AKO SA ČÍSLA DELIA**

**DELENIE ČÍSLOM 2**

*Vyplň tabuľky a zodpovedz otázky pod nimi.*

| | | |
|---|---|---|
| **1**:2 | = | zv. |
| **3**:2 | = | zv. |
| **5**:2 | = | zv. |

| | | |
|---|---|---|
| **2**:2 | = | zv. |
| **4**:2 | = | zv. |
| **6**:2 | = | zv. |

Aké zvyšky môže dať číslo, keď ho delíme číslom 2? ________________

Farebne vyznač čísla, ktoré sa dajú deliť číslom 2.

Aký zvyšok po delení číslom 2 dávajú čísla, ktoré sa dajú deliť číslom 2?

**AKO SA ČÍSLA ZAPISUJÚ**

**DELENIE ČÍSLOM 2**

*Vyplň tabuľky a zodpovedz otázku pod nimi.*

| | | |
|---|---|---|
| **1** | = 2. | + |
| **3** | = 2. | + |
| **5** | = 2. | + |

| | | |
|---|---|---|
| **2** | = 2. | + |
| **4** | = 2. | + |
| **6** | = 2. | + |

Čo sa dá urobiť s číslami, ktoré sa dajú deliť číslom 2?

*Obrázok 7: Delenie so zvyškom*

Postrehy z metodiky V tých číslach sa čosi opakuje:

- pre žiakov bolo ťažké od začiatku pracovať bez predmetnej reprezentácie - potrebovali si pri práci pomáhať kockami
- po úvodných príkladoch s kockami vedeli pokračovať vo vypracovaní pracovného listu bez predmetných reprezentácií

## Závery z overovania

Pri overovaní sme sa dostali iba po metodiku „V tých číslach sa čosi opakuje“ keďže bolo potrebné pridať úvodné aktivity a tiež nám overenie jednotlivých metodík trvalo dlhšie, ako bol odporúčaný čas. Ukázalo sa, že pridanie pohybu pri jednotlivých aktivitách metodík bolo pre žiakov prínosné. Takéto aktivity ich viac vtiahli do práce a dokázali sa potom lepšie sústrediť pri vypracovávaní pracovných listov. Tiež bolo potrebné zmeniť niektoré formulácie zadania úloh s ohľadom na špecifiká rómskeho jazyka. Žiakom veľmi pomáhali predmetné reprezentácie (kocky s podložkami; držím kartičku s číslom - teda som nejakým číslom). Počas overovania sme pozorovali, že žiaci nedokázali udržať svoju pozornosť celú hodinu. Ich sústredenie trvalo zvyčajne 15-20 minút. Po tomto čase bolo nutné zaradiť aktivitu, ktorá nesúvisela s preberanou tematikou. V budúcnosti sa pokúsime pripraviť zbierku aktivít, ktorými žiakov privedieme naspäť k sústredeniu.

Postrehy z overovania zapracujeme do metodík a následne ich budeme opakovane overovať.

## Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou vnútorného grantového projektu vvgs-2024-3093 a medzinárodného projektu FunThink Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677).

LITERATÚRA


[1] Zazkis, Rina: *Divisibility and transparency of number representations*, Making the Connection: Research and practice in undergraduate mathematics, Mathematical Association of America, 2008, s.81-92, ISBN 0883851830

[2] Čižmár: *Dejiny matematiky,* Perfekt, Bratislava, 2017, ISBN 9788080469863

[3] IT akadémia: *Zbierka inovatívnych metodík z matematiky ZŠ,* dostupné online na: https://itakademia.sk/inovativne-metodiky/

[4] Stathoupoulou, Kalabasis. *Language and culture in mathematics education: Reflections on observing a Romany class in a Greek school*. Educational Studies in Mathematics, 64(2), 2007. s. 231-238.



*RNDr. Miriama Kmeciková*
*Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Ústav matematiky*
*Jesenná 5*
*040 01 Košice*
*e-mail: miriama.kmecikova@student.upjs.sk*

# DOPLŇ ČÍSLA A ARGUMENTUJ

EMÍLIA MIŤKOVÁ

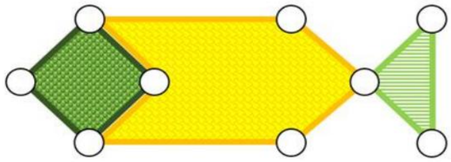
***ABSTRAKT.*** *Vyriešime úlohu z adventného Wilma komiksu.2023. Pridáme ďalšie podobné úlohy a zameriame sa na zdôvodnenie a návodné otázky.*

## WILMA.sk

Stránka WILMA:sk vznikla na Oddelení didaktiky matematiky FMFI UK s cieľom ponúknuť učiteľom matematiky rôzne inšpirácie a materiály priamo na výuku, no aj na mimoškolskú činnosť. Na základe spätnej väzby od učiteľov [1] a ohlasu na sociálnych sieťach vieme povedať, že v období pred sviatkami, prázdninami si vhodne navrhnuté materiály /"komiksy" našli u učiteľov obľubu. Príkladom sú adventné kalendáre, ktoré si môžu učitelia matematiky zo stránky WILMA.sk stiahnuť a sprostredkovať svojim žiakom zverejnením na nástenke v triede, pred kabinetom matematiky či rozposlať vo formáte PDF.


V roku 2023 bola na WILMA.sk v takomto adventnom kalendári [2] zverejnená autorkina úloha:

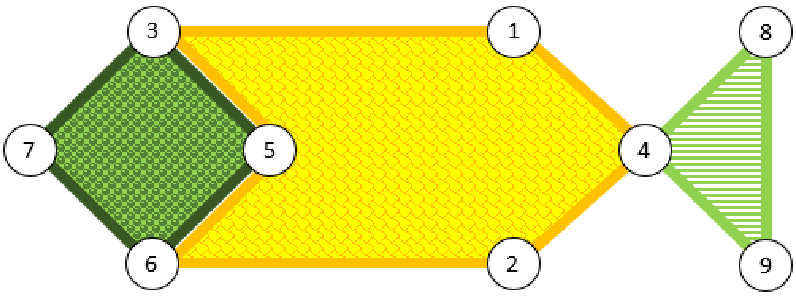
Štvrtok 21.12.2023 **Doplňte čísla 1, 2, ... 9, každé práve raz tak, aby bol súčet vo všetkých troch častiach ryby 21.**



**Návrh na riešenie:**

Všimnime si najprv žltú časť ryby. Tá obsahuje šesť čísel. Ak by sme z množiny {1; 2; 3; …; 9} vybrali šesť čísel a sčítali ich, najmenší možný súčet, ktorý vieme získať je práve 21. Súčet 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, ľubovoľný iný výber sčítancov by nám vytvoril väčší súčet. Zatiaľ však nevieme, ako presne budú čísla v žltej časti umiestnené.

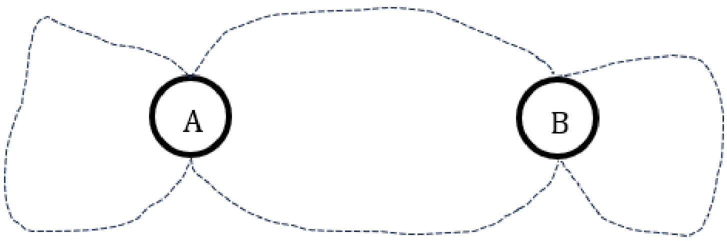
Zostali nám tri čísla: 7; 8; 9. Jedno z nich sa pridá na tmavo zelenú časť hlavy, dve potrebujeme umiestniť na svetlo zelený chvost. a) Ak by sme na chvost napríklad použili čísla: 8 a 9, na vytvorenie žiadaného súčtu 21 by sa chvost musel na žltú časť napájať číslom 4. Pretože 8 + 9 +4 = 21. Na tmavo zelenú hlavu potom okrem posledného čísla 7 potrebujeme použiť tri čísla so súčtom 21 – 7 = 14. Číslo 4 sme však už použili na napojenie chvosta, a zo zvyšných piatich práve 6 + 5 + 3 = 14. Dostávame teda rozdelenie: hlava = {7; 3; 5; 6}, žltá časť = {3; 5; 6; 2; 4; 1} a chvost = {4; 8; 9}. Jedno z možných vyhovujúcich umiestení je znázornené na obrázku:




Ak by sme na chvost použili b) čísla 7 a 8, alebo c) čísla 7 a 9, dopracovali by sme sa podobnými úvahami k ďalším riešeniam.

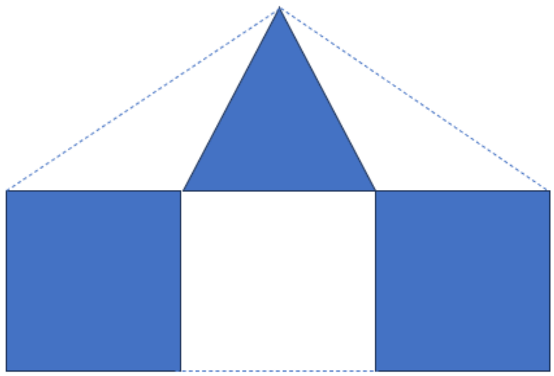
**Návrh podobných úloh:**

V uvedenej úlohe sa chvost napájal na žltú časť ryby jedným číslom. No hlava a žltá časť mali spoločné dokonca tri čísla. Skúsme túto úlohu zjednodušiť tak, aby napájanie bolo v oboch prípadoch len jedným číslom. Zostaňme pri vianočnej téme a vyberme predmet, o ktorom môžeme predpokladať, že má približne rovnakú obľubu aj u žiačok, aj u žiakov. Napríklad taká vianočná salónka (zvýraznené sú zatiaľ len dve pozície):

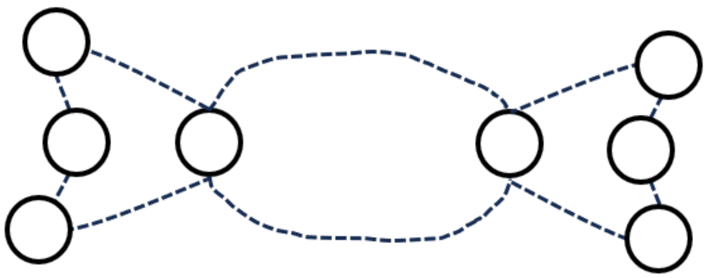



Teda nová úloha by mohla znieť: Doplňte čísla 1, 2, ...9 každé práve raz tak, aby bol súčet vo všetkých troch častiach salónky ...............(rovnaký). Zatiaľ sme neurčili pozície na umiestnenie čísel. No skúsme sa zamyslieť, aký súčet by v takejto úlohe mohol byť zadaný. Aké čísla by mohli byť na pozíciách. A, B? Ak si označíme súčet čísel v jednej časti salónky ako S, tak platí: S + S + S = 1+ 2+ ...+ 9 + A + B = 45 + A + B. Najmenší možný súčet S potom môže byť 16 , pre {A;B} = {1;2}, a najväčší môže byť 20, napríklad pre {A;B} = {7;8}. Teda do zadania (zatiaľ teoreticky) môžeme doplniť číslo od 16 do 20. Zostáva ešte doplniť pozície na umiestnenie čísel do obrázka. Dve sú špeciálne (A a B) a ostáva ešte sedem. Sedem. Ak by sme chceli, kvôli estetickej stránke, aby naša salónka mala pozície symetrické podľa zvislej aj vodorovnej osi, pri čísle sedem sa to nepodarí.

Hoci nie na želanú vianočnú salónku, doteraz vykonaná práca pri hľadaní zadania podobnej úlohy nie je márna a vieme ju použiť na nejaký iný obrázok s deviatimi pozíciami, napríklad:

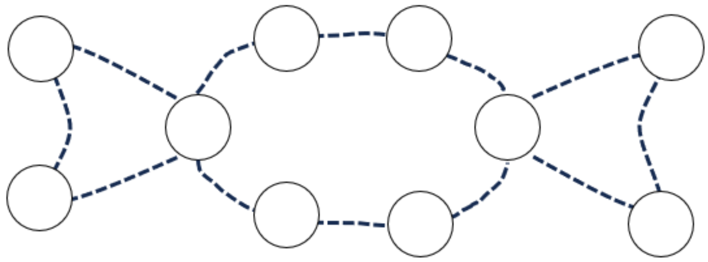


(Určenie vhodného zadaného súčtu pre tento obrázok si dovolíme prenechať, v prípade záujmu, čitateľovi.) Pokračujme ďalej, podľa plánu, hľadaním podobného zadania pre vianočnú salónku. Počet pozícií teda skúsme zmeniť z čísla 9 na párne číslo. Skúsme to napríklad pre 8, a poučení z predošlého si navrhnime hneď aj pozície:



Súčet čísel 1 + 2 + ... + 8 = 36. Aj tentokrát chceme súčet čísel v každej časti rovnaký. Aký by teda mohol byť súčet čísel v jednej časti? V ľavej časti salónky S', v pravej časti tiež S'. Lenže ľavá a pravá časť spolu obsahujú všetkých osem pozícií (každú práve raz) a preto majú súčet S' + S' =36. V tom prípade by však aj stredná časť salónky mala mať súčet 18. To však sčítaním dvoch čísel menších ako 9 nie je možné. Takto zadaná úloha nemá riešenie. Môžeme ju (po zvážení) zadávať za účelom argumentácie.

Pre párne číslo 8 sme želané zadanie nevytvorili. Skúsme teda obrázok trochu pozmeniť a použime 10 pozícií:



Opäť si môžeme položiť otázku: Aký by mohol byť súčet čísel v jednej časti? Súčet šiestich čísel v strednej časti je aspoň 21, to poznáme už z riešenia úlohy o rybe. Ak by bol súčet čísel v ľavej časti salónky 23 (a viac), súčet v ľavej a pravej časti salónky by bol spolu 46 (a viac). Lenže najväčší možný súčet šiestich čísel, ktorý vieme dostať je 5 + 6 + 7 + 8 +9 +10 = 45. V tohto dôvodu možné súčty sú len 21, alebo 22.

Pre daný obrázok (10 pozícií), môžeme zadať úlohu:

- Doplňte čísla 1, 2, …, 10, každé práve raz tak, aby bol súčet vo všetkých troch častiach salónky 21.V tomto prípade má úloha veľa riešení a môžeme ich napríklad zbierať ozaj vo forme nakreslenej salónky a pripevniť na nástenku s vianočným stromčekom.
- Doplňte čísla 1, 2, …, 10, každé práve raz tak, aby bol súčet vo všetkých troch častiach salónky 22. V tomto prípade sa úloha obohatí o argumentáciu ako (jedine ako) môžeme z daných čísel vybrať šesť tak, aby ich súčet bol 22. A ďalej tiež o argumentáciu ako možno/nemožno kombinovať zvyšné štyri čísla.

Videli sme, že navrhnúť úlohu/podobnú úlohu vôbec nemusí byť jednoduché, rýchle a priamočiare. Avšak úlohy na doplnenie čísel sú hravé a často cenné. Poskytujú množstvo kľúčových momentov, pri ktorých je možné využiť silu dobre navrhnutých otázok. Nimi môže učiteľ vhodne podporiť riešenie a zdôvodňovanie. Na záver ešte uveďme príklady otázok, ktoré sme priamo pri realizácii v praxi použili:

- Aký najmenší súčet šiestich čísel môžeme dostať?
- Vieme teda povedať, ktoré čísla budú v strednej časti? Ako budú umiestnené?
- Čo so zvyšnými tromi číslami? Dá sa zistiť, ktoré by mali byť na chvoste?
- (Koľko riešení ste našli?)
- Ktoré čísla by mohli byť na A, B?
- Z akého intervalu by mal byť súčet čísel v jednej časti?
- Aký je súčet čísel v celom obrázku?
- Vieme povedať, koľko by mal byť súčet čísel na ľavej strane? Na pravej strane? V strednej časti?
- Aký by mohol byť súčet čísel v jednej časti?
- Čo so zvyšnými štyrmi číslami? Dá sa zistiť, kde by mali byť?
- Aký najväčší súčet čísel v pravej a ľavej časti môžeme dostať?

## LITERATÚRA


[1] Slavíčková, M., Dillingerová, M., Miťková, E., Vankúš, P., Vargová, M., Jakubička, A.: Webové stránky Inšpirácií a odbornej Literatúry pre učiteľov MAtematiky, Bratislava, FMFI UK v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-8147-125-4

[2] Adventny kalendar uloh 2023, [cit. 2024-09-03] dostupné online:

https://wilma.sk/archiv-komiksov#komiks



*Mgr. Emília Miťková, PhD.*
*FMFI UK v Bratislave*
*Mlynská dolina F1*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: emilia.mitkova@fmph.uniba.sk*

# K ŽÁKOVSKÉMU HLEDÁNÍ CELOČÍSELNÝCH ŘEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY POMOCÍ PROGRAMOVÁNÍ

LADISLAV PERK

***ABSTRAKT.*** *V předloženém příspěvku jsou prezentovány čtyři matematické úlohy matematické olympiády, které žáci mohou vyřešit pomocí programování – v našem případě napsáním programů v jazyce Python. Tyto úlohy mohou učitelé matematiky či informatiky uplatnit ve svých výukách: je možné zadat žákům se zájmem nejen o řešení matematických úloh matematických olympiád, ale také o programování.*

## Úvod

V pedagogické praxi se setkáváme či můžeme setkat se žáky, kteří nejen rádi řeší matematické úlohy matematických olympiád (MO), ale také rádi programují. Takovým žákům je žádoucí ukázat, že určité typy úloh je možné vyřešit nejen „klasickým" matematickým řešením, ale také napsáním vhodného programu, který vypíše požadované výsledky. Toho mohou využít například v okamžicích, kdy si chtějí ověřit správnost svých nalezených matematických řešení či tato řešení najít.

Přístup, který v tomto příspěvku využíváme, je hledání řešení „hrubou silou". Jedná se o nástroj heuristické metody řešení matematických úloh označované jako systematické experimentování. Vytvořené programy prohledávají celý stavový prostor přípustných číselných hodnot a posuzují, zda příslušné číselné hodnoty splňují všechny podmínky ze zadání úloh. Zájemce o řešení matematických úloh „hrubou silou" odkazuji na velmi zajímavý článek prof. Hvoreckého [5].

Programy prezentované v tomto článku jsou napsány a odladěny v didakticky vhodném programovacím jazyce Python.

## Ukázky řešení vybraných úloh MO pomocí programování

V této části jsou představeny čtyři matematické úlohy MO, u kterých jsou uvedeny zdrojové kódy funkčních programů v jazyce Python. Každá úloha také obsahuje komentář k autorskému řešení úlohy. Je však nutno podotknout, že žáci mohou nalézt jiná funkční řešení.

**Úloha 1**. *Najděte všechna kladná celá čísla x, y, pro která platí:*

$$1 + x + xy = 2008. \quad [1]$$

**Řešení.** V úloze se hledají všechny dvojice takových čísel $x$ a $y$, která vyhovují rovnici ze zadání úlohy. Označení proměnných $x$ a $y$ lze v programu ponechat.

Obě tyto proměnné jsou číselně omezeny jak zdola, tak také shora. Proto pro jejich vyčíslení je vhodné uplatnit dva vzájemně vnořené cykly s počtem opakování – for cykly. Dolním omezením je číslo 1. Horním omezením je takové číslo, u kterého „je jistota", že bude prohledán „celý" stavový prostor. Bez hlubšího matematického uvažování lze využít skutečnosti, že nejmenší možná číselná hodnota $x$ a $y$ bude 1, pak „dostatečně" velká hodnota bude pro obě proměnné číslo 2 006. Proto horním omezením pro obě proměnné bude číslo 2 006.

Po zajištění systematického vyčíslování proměnných *x* a *y* lze přistoupit k podmínce rovnosti levé a pravé strany rovnice pomocí podmíněného příkazu if. V případě kladného vyhodnocení této podmínky lze vypsat příslušné číselné hodnoty proměnných *x* a *y*.

```
for x in range(1, 2007):
  for y in range(1, 2007):
    if 1 + x + y + x * y == 2008:
      print("x = ", x)
      print("y = ", y)
      print()
```

Program vypíše šest dvojic přirozených čísel (*x*, *y*): (1, 1 003), (3, 501), (7, 250), (250, 7), (501, 3) a (1 003, 1). Tyto vypsané výsledky programem se shodují s výsledky prezentovanými v matematickém řešení MO.

■

**Úloha 2**. *Součin ciferného součinu a ciferného součtu dvojmístného přirozeného čísla je 126. Které číslo to je? Najděte všechna možná řešení.* [2]

**Řešení.** V úloze se hledají všechna dvojciferná přirozená čísla, pro která součin ciferného součinu a ciferného součtu je roven číslu 126.

Protože se hledají všechna dvojciferná čísla a v rámci řešení úlohy se pracuje s jednotlivými ciframi dvojciferných čísel, je nutné vyčíslit každou cifernou pozici zvlášť. Proto pro účely vyčíslení desítek a jednotek dvojciferných čísel uplatníme dva vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování. Označme desítky například proměnnou *a*, jednotky potom proměnnou *b*. Proměnná a bude nositelkou všech cifer na úrovni desítek: z důvodu zachování dvojcifernosti hledaných čísel nesmí nabývat číselné hodnoty 0, proto bude nabývat číselných hodnot od 1 do 9. Proměnná *b* bude nositelkou všech cifer na úrovni jednotek a může nabývat hodnot od 0 do 9.

Pro zajištění vyčíslení proměnných *a* a *b* je možno přistoupit k posouzení rovnosti součinu ciferného součtu a ciferného součinu s číslem 126. Pro zvýšení přehlednosti zdrojového kódu programu je vhodné si pojmenovat dvojciferné číslo, ciferný součin a ciferný součet pomocí pomocných proměnných. Proměnnou pro dvojciferné číslo například *cislo*, proměnnou pro ciferný součin pak *soucin* a pro ciferný součet pak *soucet*.

V dané situaci lze již přistoupit k posouzení rovnosti součinu proměnné *soucin* a *soucet* s číslem 126, a to pomocí podmíněného příkazu *if*. V příkladě kladného vyhodnocení je pak možné vypsat číselnou hodnotu proměnné *cislo*, která je nositelkou hledaných dvojciferných čísel.

```
for a in range(1, 10):
  for b in range(0, 10):
    cislo = a * 10 + b
```

```
    soucin = a * b
    soucet = a + b

    if soucin * soucet == 126:
        print(cislo)
```

Program vypíše jako řešení dvě dvojciferná čísla, a to 27 a 72. Obě čísla jsou shodná s výsledky prezentovanými v matematickém řešení MO [2]. ■

**Úloha 3**. *Myslím si tři přirozená čísla. Součin prvního a druhého je 24, součin druhého a třetího je 32, součin prvního a třetího je 48. Která čísla si myslím?* [3]

**Řešení.** V úloze se hledají všechny trojice přirozených čísel s definovanými součiny jednotlivých dvojic (bez opakování).

Abychom byli alespoň trochu více originální, nebudeme oproti předchozím úlohám užívat označení proměnných *a*, *b* a *c*, ale například $c_1$, $c_2$ a $c_3$. Všechny tři proměnné jsou nositelkami přirozených čísel, proto omezení zdola bude 1. Součin prvního a druhého čísla má být 24, proto $c_1$ a $c_2$ mohou být nejvýše právě 24. Součin druhého a třetího čísla má být 32, proto $c_2$ je nejvýše právě 24 (z předchozího vyjádření) a $c_3$ je nejvýše právě 32. Součin prvního a třetího čísla má být 48, ale $c_1$ může být nejvýše 24 a $c_3$ nejvýše 32. Proto $c_1$ bude nabývat číselných hodnot od 1 do 24, $c_2$ bude nabývat číselných hodnot od 1 do 24 a $c_3$ bude nabývat číselných hodnot od 1 do 32.

Nyní bychom mohli přistoupit k zavedení pomocných proměnných, které by definovaly příslušné součiny dvojic, ale s ohledem na přehlednost daných vyjádření k tomuto kroku přistupovat nebudeme. Jednotlivé součiny proměnných $c_1$, $c_2$ a $c_3$ proto zformulujeme pomocí podmíněného příkazu *if* s vyjádřením příslušných rovností v konjunktivním tvaru pomocí operátoru *and*. V případě kladného vyhodnocení tohto podmíněného příkazu lze přistoupit k výpisu příslušných číselných hodnot $c_1$, $c_2$ a $c_3$.

```
for c1 in range(1, 25):
    for c2 in range(1, 25):
        for c3 in range(1, 33):
            if c1 * c2 == 24 and c2 * c3 == 32 and c1* c3 == 48:
                print("c1 = ", c1)
                print("c2 = ", c2)
                print("c3 = ", c3)
```

Program vypíše jako řešení jednu trojici přirozených čísel: 6, 4 a 8. Tato vypsaná trojice se shoduje s trojicí myšlených čísel v matematickém řešení MO [3].

■

**Úloha 4**. *Čtyřmístným palindromem nazveme každé čtyřmístné přirozené číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě tisíců a které zároveň má na místě desítek stejnou číslici jako na místě stovek. Kolik existuje dvojic čtyřmístných palindromů, jejichž rozdíl je 3 674?* [4]

**Řešení.** V úloze se hledá počet všech dvojic čtyřmístných palindromů s rozdílem rovným číslu 3 674.

Pro první čtyřmístný palindrom lze užít označení cifer například pomocí proměnných *A* a *B* (*ABBA*) a pro druhý palindrom například pomocí proměnných *C* a *D* (*CDDC*). Z důvodu zajištění čtyřcifernosti palindromů musí platit, že proměnné *A* a *C* nesmí být nulové. Všechny čtyři cifry proto vyčíslíme pomocí čtyř vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování – for cyklů, avšak s respektováním příslušných číselných omezení. Proměnné *B* a *D* budou číselně nabývat od 0 do 9, proměnné *A* a *C* pak od 1 do 9.

Pro účely zvýšení přehlednosti je vhodné každý palindrom vyjádřit pomocí vhodné proměnné, například *ABBA a CDDC* s příslušným dekadickým zápisem.

V tento okamžik je možné přistoupit k posouzení vyčíslení rozdílu obou palindromů a porovnání s číslem 3 674: to je možné dosáhnout pomocí podmíněného příkazu *if*. V případě kladného vyhodnocení této podmínky se inkrementuje pomocná proměnná reprezentující hledaný počet, například *pocet*, kterou je nutné před prohledáváním stavového prostoru vynulovat. Po ukončení prohledávání stavového prostoru je možné vypsat číselnou hodnotu proměnné *pocet*, neboť je nositelkou hledaného počtu.

```
pocet = 0

for A in range(1, 10):
  for B in range(0, 10):
    for C in range(1, 10):
      for D in range(0, 10):
        ABBA = A * 1001 + B * 110
        CDDC = C * 1001 + D * 110

        if ABBA-CDDC==3674:
          pocet = pocet + 1

print("Nalezeny pocet dvojic: ", pocet)
```

Program vypíše číslo 35 jako hledaný počet dvojic čtyřmístných palindromů. Tento vypsaný počet vytvořeným programem se shoduje s počtem prezentovaným v matematickém řešení MO [4].

■

LITERATURA

[1] MO, 57. ročník, kategorie Z9, III. kolo, úloha 3. [online] [cit 30.10.2024]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491960/z57iii-9r.pdf

[2] MO, 55. ročník, kategorie Z8, I. kolo, úloha 1. [online] [cit 30.10.2024]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491929/z55i-8r.pdf

[3] MO, 71. ročník, kategorie Z6, II. kolo, úloha 2. [online] [cit 30.10.2024]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492119/z71ii-6.pdf

[4] MO, 71. ročník, kategorie Z9, II. kolo, úloha 1. [online] [cit 30.10.2024]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491996/z60ii-9.pdf

[5] Hvorecký, J. (2022). Riešenie matematických úloh "hrubou silou". *Dva dni s didaktikou matematiky 2022: zborník príspevkov*. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2022. s 34-43 [online], ISBN 978-80-8147-123-0.

*Ladislav Perk*
*Přírodovědecká fakulta UJEP*
*Pasteurova 3632/15*
*CZ – 400 01 Ústí nad Labem*
*e-mail: ladislav.perk@gmail.com*

# ČASTÉ CHYBY PRI RIEŠENÍ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

JOZEF RAJNÍK

***ABSTRAKT.*** *V príspevku uvádzame vybrané časté chyby študentov pri riešení matematickej olympiády a ilustrujeme. Ide o nesprávne či neúplné logické úvahy. Taktiež ilustrujeme, ako tieto úvahy môžu viesť k nesprávnym výsledkom. Uvedené príklady vedia napomôcť študentom k pochopeniu dôležitosti správnej argumentácie.*

## Úvod

Matematická olympiáda spolu s inými súťažami je typická tým, že študentom nestačí v riešení uviesť iba výsledok, ale musia uviesť aj postup, ktorým k nemu prišli. Presnejšie vzaté, zdôvodnenie jeho správnosti. Okrem matematickej olympiády sa s týmto prístupom môžeme stretnúť v korešpondenčných seminároch a aj v školách, najmä na matematicky zameraných fakultách univerzít. Aj autor týchto riadkov vyžaduje od svojich študentov na univerzite takéto riešenia.

S príchodom na strednú školu sa čoraz viac začínajú v takýchto súťažiach objavovať úlohy, kde práve zdôvodnenie tvorí podstatnú časť riešenia. Môže ísť o samotné dôkazové úlohy, ale aj o úlohy s číselným výsledkom, na ktorý je pomerne ľahké prísť, no jeho zdôvodnenie je výrazne náročnejšie. Študentom tak odpadá istá istota – aj za riešenie so správnym výsledkom môžu dostať len zlomok bodov. Môže to viesť aj k nepríjemným demotivujúcim pocitom, kedy si študenti môžu myslieť, že neoceňujeme ich inovatívne postupy alebo vyžadujeme, aby úlohy riešili len „oficiálnym“ postupom. Presvedčiť študentov, že ich spôsob uvažovania je nesprávny, je neľahká úloha. Najmä v situáciách, keď svojím postupom dospeli k správnemu výsledku.

V tomto príspevku uvádzame tri úlohy a k nim nesprávne riešenia, ktoré sú zostavené na základe autorových skúseností s opravovaním riešení úloh tohto typu. Úlohy môžu poslúžiť samotným učiteľom ako ukážka chýb, s ktorými sa môžu stretnúť. Taktiež ich možno využiť ako cvičenie na hľadanie chýb na krúžku, príp. hodine.

Riešenia úloh obsahujú chyby rôznych typov – ide aj o skôr drobnosti spočívajúce vo vynechaní istého kroku, aj o závažné argumentačné nedostatky. Taktiež niektoré riešenia obsahujú zlý výsledok. Pri hľadaní chýb však čitateľovi odporúčame identifikovať konkrétne chybné či neúplné úvahy. Isto totiž čitateľ uzná, že poukázanie na konkrétne nedostatky ocení študent viac ako odôvodnenie: „Tvoje riešenie zlé, lebo má zlý výsledok.“

Pri všetkých úlohách uvádzame, ako konkrétna chyba môže viesť k nesprávnemu výsledku. Preto tieto úlohy vedia prispieť k pochopeniu študentov, prečo sú uvedené úvahy naozaj chybné a k celkovému pochopeniu dôležitosti správnej argumentácie.

## Úloha 1: priemer známok

**Zadanie.** Študent má priemer $3{,}46$. Po získaní ďalších dvoch známok mu stúpol priemer na $3{,}5$. Koľko známok študent celkovo dostal? Nájdite všetky možnosti. [1]

**Pokus o riešenie.** Označme $n$ konečný počet známok, $s$ ich súčet a $x$ súčet dvoch známok, ktoré študent získal ako posledné. Podmienky na priemery zo zadania vieme pomocou týchto premenných vyjadriť ako

$$\frac{s}{n} = 3{,}5; \qquad \frac{s-x}{n-2} = 3{,}46.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme $s = 3{,}5n$. Druhú rovnicu upravíme na $s - x = 3{,}46n - 6{,}92$ a dosadíme do nej vyjadrenie $s$:

$$\begin{aligned} 3{,}5n - x &= 3{,}46n - 6{,}92, \\ 0{,}04n &= x - 6{,}92, \\ n &= 25x - 173. \end{aligned}$$

Keď mal študent priemer $3{,}46$, tak musel mať aspoň jednu známku, čiže musí platiť $n - 2 \geq 1$, teda $n \geq 3$. Z toho dostaneme $25x - 173 \geq 3$, čo platí práve pre $25x \geq 176 \Leftrightarrow x \geq 8$. A keďže $x \leq 10$, nakoľko ide o súčet dvoch známok, tak jediné možné hodnoty pre $x$ sú $8$, $9$ a $10$. Po dosadení do $n = 25x - 173$ dostaneme, že všetky možné hodnoty pre $n$ sú $27$, $52$ a $77$. Študent teda mohol celkovo dostať $27$, $52$ alebo $77$ známok. □

V riešení nie je napísané nič zásadné. Naozaj sme v ňom správne odvodili, že možné hodnoty $n$ sú $27$, $52$ a $77$. Avšak na niečo sme zabudli. Tieto hodnoty sú len „kandidátmi" na riešenie úlohy. Ak ich chceme prehlásiť za riešenie, musíme ich ešte overiť. Túto časť riešenia nazývame aj *skúška správnosti* (napokon úloha je podobná rovniciam – tiež hľadáme všetky možné hodnoty čísla $n$ ako pri rovniciach).

Ak si dopočítame hodnotu $s$ pomocou $s = 3{,}5n$, tak nám postupne vyjdú hodnoty $94{,}5$; $182$ a $269{,}5$. Vidíme, že pre $n = 27$ a $n = 77$ nám nevyšlo celé číslo, čím sme tieto hodnoty vylúčili. Absencia skúšky správnosti teda vyústila aj do riešenia s nesprávnym výsledkom. Dokončenie skúšky pre $n = 52$ a aj celého riešenia možno spraviť nasledovne.

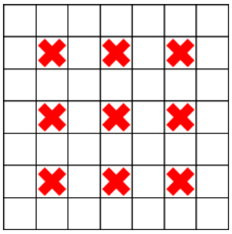
**Správny záver riešenia**. $(\ldots)$ všetky možné hodnoty pre $n$ sú $27$, $52$ a $77$. Pre $n = 27$ a $n = 77$ nám postupne vyjde $s = 94{,}5$ a $s = 269{,}5$. Tieto hodnoty teda nevyhovujú. Pre $n = 52$ dostaneme $s = 182$ (ide o prípad, kedy $x = 9$). Táto situácia naozaj mohla nastať: študent mohol mať pôvodne napríklad $27$ trojok a $23$ štvoriek, čo dáva priemer $(27 \cdot 3 + 23 \cdot 4)/50 = 3{,}46$ potom dostal štvorku a päťku, čím dostal priemer $(27 \cdot 3 + 24 \cdot 4 + 5)/52 = 3{,}5$. □

Poznamenáme ešte, že sme neuviedli, ako sme sa k počtom známok dostali. Mohli sme napr. riešiť sústavu rovníc, alebo si povedať, že začneme s $50$ trojkami a aby sme dostali súčet známok $182 - 9 = 173$, tak ešte $23$ známok musíme zväčšiť. Nakoľko nám však teraz stačí uviesť príklad (aby sme ukázali, že situácia mohla nastať), tak to je postačujúce.

## Úloha 2: strieľanie lodí

**Zadanie.** Na pláne $7 \times 7$ ukrytá loď $2 \times 3$. Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme ju s istotou aspoň raz zasiahli? [2]

**Pokus o riešenie 1.** Neoplatí sa nám strieľať na kraj, keďže v strede pokryjeme viac pozícií lode, Tiež sa nám neoplatí sa nám dávať výstrely vedľa seba, lebo keď sú ďalej od seba, tak pokryjú viac možných pozícií lode. Avšak nechceme strieľať s medzerou dvoch políčok, lebo môže byť medzi nimi loď. Optimálne je preto strieľať s rozostupom jedného políčka. Najmenej výstrelov je preto $9$, ako je vyznačené na obrázku 1. Výstreli sú rozmiestnené rovnomerne podľa pravidiel, ktoré sme ukázali. Ak by sme použili o jeden výstrel menej, tak už by sme niekde vedeli umiestniť loď.



*Obrázok 1*

□

**Pokus o riešenie 2.** Pre každé políčko spočítame počet pozícií lodí, ktoré by sme trafili výstrelom naň (tabuľka vľavo). Aby sme dosiahli čo najmenej výstrelov, tak musíme streliť na políčko, kde zasiahneme čo najviac možných lodí – teda $12$. Takých políčok je viac, preto je optimálne streliť do stredu.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| 4 | 8 | 10 | 10 | 10 | 8 | 4 |
| 5 | 10 | 12 | 12 | 12 | 10 | 5 |
| 5 | 10 | 12 | 12 | 12 | 10 | 5 |
| 5 | 10 | 12 | 12 | 12 | 10 | 5 |
| 4 | 8 | 10 | 10 | 10 | 8 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |
| 4 | 8 | 9 | 8 | 9 | 8 | 4 |
| 5 | 9 | 8 | 3 | 8 | 9 | 5 |
| 5 | 8 | 3 | X | 3 | 8 | 5 |
| 5 | 9 | 8 | 3 | 8 | 9 | 5 |
| 4 | 8 | 9 | 8 | 9 | 8 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | X | | X | | |
| | X | | | | X | |
| | | | X | | | |
| | X | | | | X | |
| | | X | | X | | |
| | | | | | | |

*Obrázok 2*

Potom si znovu prepočítame počet lodí, ktoré zasiahneme na jednotlivých políčkach (tabuľka v strede). Najviac vieme pokryť $9$ pozícií lodí, a to na ôsmych políčkach. Dokonca tieto políčka sú rozmiestnené rovnomerne okolo stredu. Ak vystrelíme na všetky z nich (tabuľka vpravo), tak tým pokryjeme všetky možné pozície lode. Keďže sme vždy vyberali políčka, ktoré pokryjú najväčší možný počet pozícií lode, tak tento počet je najmenší možný. □

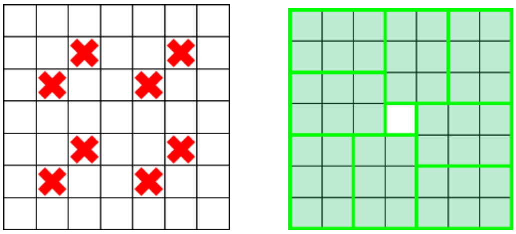
Problémom týchto riešení je, že nedokazujú, prečo menej ako $9$ výstrelov nestačí. Čo to presne znamená, keď tvrdíme, že najmenší počet výstrelov je $9$? Vlastne to znamená dve veci: (1) Možno vystreliť na $9$ políčok tak, aby sme s istotou zasiahli loď. (2) Na menej ako $9$ výstrelov to nie je možné.

Oba pokusy dokázali prvé tvrdenie. S druhým tvrdením je však problém. Aj samotné tvrdenie je ťažké na dokazovanie – musíme ukázať, že niečo možné nie je. Alebo inými slovami, musíme ukázať, že všetky možnosti ako vystreliť na $8$, príp. menej, políčok nevedú k istému zasiahnutiu lode.

A to je práve problém týchto riešení. Obe z nich sa obmedzujú na špecifické spôsoby, ako strieľať. Prvé veľmi vágne argumentovaním o „optimálnom strieľaní“. Druhé vyzerá sľubnejšie, avšak neprebralo viacero možností, s ktorou dvanástkou začať. A ak aj by sme začali s menším číslom, môže sa stať, že aj takáto „neoptimálna“ čiastková voľba nám môže umožniť robiť „optimálnejšie“ čiastkové voľby neskôr.

Nesprávnosť našich riešení podčiarkneme opäť ukázaním, že prišli k nesprávnemu riešeniu. Totiž loď vieme s istotou zasiahnuť aj iba s $8$ výstrelmi.

**Správne riešenie.** Ukážeme, že hľadaný najmenší počet výstrelov je $8$.



*Obrázok 3*

Na obrázku vľavo je vyznačených $8$ políčok, na ktoré vystrelíme. Ľahko overíme, že každú pozíciu lode takto (aspoň raz) zasiahneme.

Na obrázku vpravo je vyznačených $8$ oblastí v tvare lode. Do každej oblasti musíme aspoň raz vystreliť – inak by sa zrovna v nej mohla nachádzať loď. Preto potrebujeme aspoň $8$ výstrelov. □

## Úloha 3: Minimalizácia výrazu

**Zadanie.** Pre $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}_0^+$ platí $x + y \geq 6$, $x + z \geq 8$, $y + z \geq 10$. Aká je najmenšia hodnota výrazu $x^2 + y^2 + z^2$? [3]

**Pokus o riešenie.** Keďže chceme dostať čo najmenšiu hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$, tak chceme, aby čísla $x$, $y$, $z$ boli čo najmenšie. Preto aj výrazy $x + y$, $x + z$, $y + z$ musia nadobúdať čo najmenšie hodnoty, teda v nich musí nastať rovnosť. Dostávame tak sústavu troch rovníc $x + y = 6$, $x + z = 8$, $y + z = 10$. Vyjadrením $x$ z prvých dvoch rovníc a dosadením do tretej dostaneme $(6 - x) + (8 - x) = 10$, teda $x = 2$ a po spätnom dopočítaní $y = 4$ a $z = 6$. Najmenšia hodnota je teda dosiahnutá pri tomto riešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. □

Na rozdiel od predošlých úloh, toto riešenie prišlo k správnemu výsledku. Opäť je však problém v ukázaní toho, že menšiu hodnotu ako $56$ nevieme dostať. Potrebujeme ešte ukázať, že pre všetky prípustné $x$, $y$, $z$ platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq 56$. Obmedzili sme sa však len na jeden prípad. Vezmime si napr. trojicu čísel $x = 3$, $y = 5$, $z = 5$. Ako z našich úvah vyplýva, že $x^2 + y^2 + z^2 \geq 56$? Na číslach $x$ a $y$ vidíme, že ich nahradením postupne za $2$ a $4$ zmenšíme. Ale číslo $y$ zväčšíme z $5$ na $6$. Prečo by sa teda mala hodnota $x^2 + y^2 + z^2$ zmenšiť? Nemôže byť menšia ako $56$ a po nastavené na $2$, $4$, $6$ sa zväčší? To nemáme pokryté a to je problém tohto riešenia.

Aby sme spravili naše vysvetlenie ešte názornejším, tak uvedieme príklad, kedy nás táto úvaha aj privedie k nesprávnemu výsledku. Opäť hľadajme najmenšiu hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$ pre kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$, ale teraz za podmienok $x + y \geq 4$, $x + z \geq 8$, $y + z \geq 10$ (teda sme v prvej nerovnosti nahradili $6$ za $4$). Ako v predošlom riešení nahraďme všetky nerovnosti rovnosťou, čím dostaneme sústavu $x + y = 4$, $x + z = 8$, $y + z = 10$ s riešením $x = 1$, $y = 3$ a $z = 7$. Takto by sme dostali, že najmenšia možná hodnota výrazu je $1^2 + 3^2 + 7^2 = 59$. Avšak stále vieme dosiahnuť hodnotu $56$ ako $2^2 + 4^2 + 6^2$. Čiže vidíme, že v tejto situácii sa nám „oplatilo“ zvoliť väčšie $x$, $y$ (a dostať tak ostrú nerovnosť $x + y > 4$), aby sme mohli mať menšie $z$.

**Správne riešenie.** Ukážeme, že hľadaná najmenšia hodnota výrazu je $56$. Ak $z > 8$, tak $x^2 + y^2 + z^2 \geq z^2 > 64$, čo je viac ako $56$. Ak $z \leq 8$, tak čísla $8 - z$ a $10 - z$ sú kladné, preto platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq (8 - z)^2 + (10 - z)^2 + z^2 = 3(z - 6)^2 + 56 \geq 56$. Túto hodnotu dosiahneme pre $(x, y, z) = (2,4,6)$ (dokonca je to jediný prípad). □

LITERATÚRA


[1] Matematický Náboj 2018 [online], úloha 25, upravené zadanie [cit. 2024-09-05], dostupné online: https://math.old.naboj.org/archive/problems/pdf/math/2018_sk_sol.pdf.

[2] P. Novotný a kol. 58. ročník matematickej olympiády na stredných školách, Bratislava, IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, 2010, ISBN: 978–80–8072–115–2, úloha B-I-4, dostupné online: https://skmo.sk/dokument.php?id=2159.

[3] Matematická olympiáda 2024/2025 Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B [online], návodná úloha N5 k úlohe B-I-6 [cit. 2024-09-05], dostupné online: https://skmo.sk/dokument.php?id=5333



*Mgr. Jozef Rajník, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského*
*Mlynská dolina F1*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: jozef.rajnik@fmph.uniba.sk*

# NÁSTROJE FORMATÍVNEHO HODNOTENIA VO VÝUČBE LINEÁRNYCH FUNKCIÍ

ENIKŐ SCHNÜREROVÁ

*ABSTRAKT. Príspevok je zameraný na formatívne hodnotenie žiakov základných škôl v téme lineárne funkcie. Žiaci riešili v teste osem úloh, pričom analýza ich riešení ukázala nedostatky v porozumení konceptu funkcie, na základe ktorých boli vytvorené nástroje formatívneho hodnotenia orientované na elimináciu týchto nedostatkov.*

## Úvod

V procese vyučovania a učenia sa je hodnotenie jedným z kľúčových aspektov. Predstavuje akýsi míľnik na pochopenie, čo učitelia aj žiaci dosiahli a čo sa im dosiahnuť nepodarilo. Väčšina žiakov je zvyknutá na to, že pri hodnotení dostanú informácie vo forme známok alebo dosiahnutého percenta úspešnosti. Takto sa môžu žiaci v porovnávať s ostatnými spolužiakmi, avšak takéto hodnotenie im nedáva informácie o tom, čo sa naučili a čo sa im naučiť nepodarilo. Zamerať sa na tieto oblasti a identifikovať silné a slabé stránky žiakom pomáha formatívne hodnotenie.

## Teoretické východiská

Formatívne hodnotenie má podľa Andrade (2010) dva hlavné ciele: (1) poskytovanie informácií o učení žiakov učiteľom s cieľom usmerniť ich pri navrhovaní a vedení výučby a (2) poskytovanie spätnej väzby žiakom o ich pokroku s cieľom pomôcť odstrániť prípadné rozdiely medzi výkonom a stanovenými vzdelávacími cieľmi.

Rámec Wiliama a Thompsona (2008) možno považovať za základnú teóriu činnosti pre poskytovanie spätnej väzby (Bennett, 2011). Podľa nej možno formatívne hodnotenie konceptualizovať ako pozostávajúce z piatich kľúčových stratégií: 1. objasnenie a zdieľanie zámerov a kritérií učenia sa; 2. získavanie dôkazov o porozumení žiakov s cieľom určiť oblasti, v ktorých dosahujú svoje učebné výsledky; 3. poskytovanie spätnej väzby, ktorá žiakov posúva dopredu; 4. povzbudzovanie žiakov, aby si navzájom boli zdrojom učenia a 5. motivovanie žiakov, aby prevzali zodpovednosť za svoje učenie (Wiliam a Thompson, 2008).

Formatívne hodnotenie je zvyčajne neformálne a je zakotvené v rámci vyučovacej činnosti. Zahŕňa pozorovanie žiakov, rozhovory so žiakmi alebo neformálne aktivity zamerané na otázky a odpovede, lístky pri odchode, denníky, diskusie v triede a krátke písomné úlohy (Bahr a de Garcia, 2010). Z výskumu Ndimba (2024) vyplýva, že žiaci uprednostňujú hodnotenie realizované v rámci vyučovania (formatívne) pred hodnotením realizovaným na konci vyučovania (sumatívne). Žiaci uviedli, že ich výsledky hodnotenia motivujú a poskytujú im možnosť prispôsobiť sa.

## Metodológia výskumu a analýza žiackych riešení

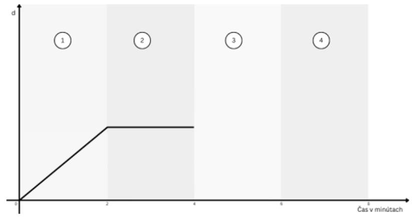
Test pozostával z ôsmich úloh zameraných na porozumenie pojmu funkcia, jej reprezentáciám a prepojeniam medzi nimi. Pri výbere úloh sme sa inšpirovali rôznymi zdrojmi, úlohy sme prebrali, prípadne ich modifikovali. Do výskumu sa zapojilo celkom 49 žiakov deviateho ročníka základných škôl a kvarty na osemročnom gymnáziu v Košiciach. Žiakom bol predložený pracovný list s úlohami. Žiaci boli oboznámení s témou výskumu, ubezpečení o anonymite a požiadaní o samostatné riešenie úloh. Na riešenie úloh mali žiaci 45 minút.

V rámci tohto príspevku sa budeme venovať úlohám, v ktorých žiaci dosiahli najmenšiu úspešnosť. Prvou takou úlohou bola úloha 2 (Obrázok 1: Zadanie úlohy 2), pri tvorbe ktorej, sme sa inšpirovali úlohou z práce Duijzer a kol. (2020), zameraná na interpretáciu grafu a jeho konštrukciu na základe slovného opisu. Úlohou žiakov bolo sledovať graf s údajmi o ceste Aničky do školy (vzdialenosť od domova v závislosti od času). Žiaci v prvej časti popisovali, akým smerom ide Anička v časových úsekoch 1 a 2. V ďalšej časti boli žiaci požiadaní o rozšírenie grafu na základe popisu pohybu Aničky.

V nasledujúcej tabuľke (

Tabuľka 1) uvádzame početnosť žiackych odpovedí v daných úlohách.

Anička sa vybrala vrátiť knihu kamarátke, ku ktorej vedie rovná cesta. Po šiestich minútach dorazila k jej domu. Kamarátka však nebola doma, a preto knihu odovzdala jej mame. Nasledujúci graf zobrazuje závislosť vzdialenosti *d* Aničky od jej domova od času počas prvých 4 minút jej cesty ku kamarátke.




a) Na základe uvedeného grafu popíšte Aničkin pohyb v časových úsekoch 1 a 2. Použite vyjadrenia ako napríklad: „Anička išla smerom ku kamarátke“, „Anička išla smerom domov“, „Anička sa zastavila“,...

Časový úsek 1: ..........................................................................................................................

Časový úsek 2: ..........................................................................................................................

b) Dokreslite graf pre časové úseky 3 a 4, ak viete, že Anička sa v oboch úsekoch pohybovala rovnomerným pohybom a:
   i. v časovom úseku 3 išla Anička smerom ku kamarátke, no pomalšie ako v úseku 1,
   ii. v časovom úseku 4 sa Anička pohybovala k domovu po tej istej ceste a po uplynutí 8 minút od začiatku pohybu sa vrátila späť domov.

*Obrázok 1: Zadanie úlohy 2*

Daný je opis nasledujúcej situácie:

„Taxislužba za prepravu účtuje základný poplatok a za každý prejdený kilometer si cenu navyšuje o rovnakú čiastku.“

a) Na základe tabuľky určte, akú výšku má základný poplatok a koľko stojí každý ďalší prejdený kilometer.

| Počet kilometrov | Cena v € |
|---|---|
| 1 | 3,3 |
| 2 | 4,1 |
| 3 | 4,9 |
| 6 | 7,3 |

Základný poplatok je: .........€

Každý ďalší prejdený kilometer stojí: .........€

b) Zakrúžkujte, ktorý z nasledujúcich predpisov správne charakterizuje opísanú situáciu? Napíšte, čo vyjadrujú premenné $x$ a $y$.

   i. $y = 2{,}5x + 0{,}8$
   ii. $y = 2{,}5x - 0{,}8$
   iii. $y = 0{,}8x + 2{,}5$
   iv. $y = 0{,}8x - 2{,}5$

   Premenná $x$ vyjadruje ..........................................................................................................

   Premenná $y$ vyjadruje ..........................................................................................................

*Obrázok 2: Zadanie úlohy 3*

*Tabuľka 1*

| **Úloha** | | **Počet žiakov (49)** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Správne** | **Nesprávne** | **Vynechané** |
| **2** | **i** | 37 | 8 | 4 |
| | **ii** | 27 | 18 | 4 |
| **3** | **i** | 35 | 12 | 2 |
| | **ii** | 32 | 14 | 3 |

Z tabuľky 1 vyplýva, že prvú časť úlohy 2 nevyriešilo správne 16 % žiakov a druhú časť úlohy 2 viac ako 36 % žiakov.

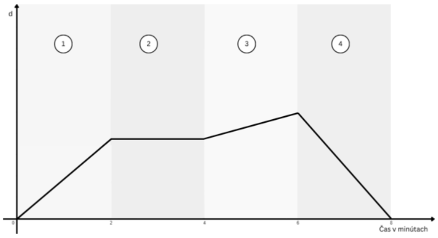
V prvej časti úlohy 2 žiaci nesprávne uvádzali, že v úseku 1 ide Anička domov. Najčastejší nedostatok žiakov, ktorí sa v tejto časti úlohy 2 objavil, bolo neporozumenie významu konštantnej funkcie. Žiaci v oblasti 2 uvádzali, že Anička v tomto časovom úseku ide ku kamarátke, resp. popis tohto úseku úplne vynechali.

V druhej časti úlohy 2 sa podobne ako v prvej prejavil problém s konštantnou funkciou, ktorú žiaci najčastejšie konštruovali v úseku 3. Druhou najčastejšie vyskytujúcou sa chybou bolo neukončovanie grafu v bode [8,0], ktorý predstavuje návrat Aničky domov. Žiacke grafy končili v 6. minúte v bode [8,0] alebo vo 8. minúte ale mimo $x$-ovej osi.

Na základe týchto zistení sme navrhli nasledujúci nástroj formatívneho hodnotenia. Nástroj „commit and toss“ (Obrázok 3: Nástroj „commit and toss“) sa skladá z dvoch častí. V prvej časti majú žiaci na výber viacero možností, avšak len jedna je správna. Vo vytvorenom nástroji je popísaná a graficky znázornená cesta Aničky ku kamarátke. Úlohou žiakov je vybrať možnosť, ktorá najlepšie popisuje graf v zadaní úlohy. Svoju odpoveď následne v druhej časti úlohy žiaci zdôvodňujú. Podstatou tohto nástroja je, že po vyriešení úlohy, žiaci papier s riešením pokrčia do tvaru lopty a hádžu po triede, kým ich učiteľ vyzve k ukončeniu tejto aktivity. Každý žiak si následne vezme jednu „loptičku“ a nahlas prečíta riešenie a zdôvodnenie, okomentuje riešenie a spoločne s ostatnými žiakmi diskutuje o správnosti. Podľa Keeley a Tobey (2011) tento nástroj predstavuje zábavnú anonymnú techniku zobrazenia žiackeho myslenia poskytujúcu neohrozujúcu príležitosť zverejniť myšlienky bez ohľadu na to, či sú správne alebo nesprávne. Jednoduchšou verziou môže byť vloženie pokrčených „loptičiek“ do škatule a ich následné vyťahovanie.

**COMMIT AND TOSS**

Anička sa vybrala vrátiť knihu kamarátke, ku ktorej vedie rovná cesta. Po šiestich minútach dorazila k jej domu. Kamarátka však nebola doma, a preto knihu odovzdala jej mame. Nasledujúci graf zobrazuje závislosť vzdialenosti *d* Aničky od jej domova od času počas jej cesty ku kamarátke.




Vyberte možnosť, ktorá popisuje cestu Aničky ku kamarátke v úsekoch:

a) Úsek 2 – ide ku kamarátke pomalšie ako v úseku 1, úsek 3 – ide smerom domov
b) Úsek 2 – ide od kamarátky, úsek 4 – ide smerom domov
c) Úsek 2 – stojí, úsek 3 – ide ku kamarátke pomalšie ako v úseku 1

Výber jednej z možností zdôvodnite.

*Obrázok 3: Nástroj „commit and toss"*

**CONCEPT CARTOONS**

„Taxislužba za prepravu účtuje základný poplatok a za každý prejdený kilometer si cenu navyšuje o rovnakú čiastku."

Na základe tabuľky určte, akú výšku má základný poplatok a koľko stojí každý ďalší prejdený kilometer.

| Počet kilometrov | Cena v € |
|---|---|
| 1 | 3,3 |
| 2 | 4,1 |
| 3 | 4,9 |
| 6 | 7,3 |

Základný poplatok je: .........€

Každý ďalší prejdený kilometer stojí: .........€


**Ktorá z dievčat má pravdu? Svoju odpoveď zdôvodnite.**

*Obrázok 4: Nástroj „concept cartoons"*

Druhou úlohou s najmenšou úspešnosťou bola úloha 3 (Obrázok 2: Zadanie úlohy 3), ktorá bola zameraná na vytváranie predpisu rastúcej lineárnej funkcie. Žiaci mali k dispozícii popis situácie. V prvej časti žiaci zisťovali údaje z tabuľky a druhej časti vyberali správny predpis funkcie zo štyroch možností. Z tabuľky (

Tabuľka 1) vyplýva, že viac ako 20% žiakov úlohu 3 nevyriešilo správne.

Medzi najčastejšie chyby v prvej časti úlohy 3 patrí uvádzanie základného poplatku 3,3 €. V druhej časti žiaci najčastejšie vybrali nesprávne možnosť (i) so zameneným lineárnym a absolútnym členom.

Nástroj „concept cartoons“ (Obrázok 4: Nástroj „concept cartoons“) žiakom prezentuje názory a myšlienky troch dievčat, žiaci sa rozhodujú, s ktorým názorom sa stotožňujú a vysvetľujú prečo. Názory dievčat zahŕňajú matematicky prijateľnú možnosť aj alternatívne nápady založené na mylných predstavách a miskoncepciách. Tento nástroj jej vyvinutý tak, aby zaujal, motivoval žiakov a odhaľoval ich uvažovanie a podporoval diskusiu v triede. Keeley a Tobey (2011) tvrdia, že nástroj „concept cartoons“ pomáha rozvíjať sebadôveru žiakov pri prezentovaní svojich názorov. Žiaci objavujú a diskutujú o vlastnom myslení, čo robí z tohto nástroja podľa autoriek vysoko pútavú a efektívnu techniku na podporu učenia sa žiakov.


## Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 001UPJŠ-4/2023 „Implementácia formatívneho hodnotenia do výučby na základnej škole so zameraním na digitálnu formu".


## Záver

V rámci testovania porozumenia pojmu lineárna funkcia boli identifikované problematické úlohy a prostredníctvom ich analýzy sme zistili žiacke nedostatky v chápaní tohto pojmu. Úlohy, v ktorých žiaci dosahovali menšiu úspešnosť a ich spôsoby riešenia týchto úloh boli využité pri vytváraní nástrojov formatívneho hodnotenia. Vytvorené nástroje prezentované v tomto príspevku sa zameriavajú na elimináciu žiackych nedostatkov a ich implementácia vo vyučovaní matematiky by mala viesť k lepšiemu pochopeniu pojmu lineárna funkcia.

### LITERATÚRA


[1] Andrade, H. L. (2010). *Summing up and moving forward: Key challenges and future directions* for research and development in formative assessment, In H. L. Andrade, & G. J. Cizek (Eds.). Handbook of formative assessment (pp. 344–351). New York, NJ: Routledge, 2010.

[2] Bahr, D. L. – de Garcia, L. A. *Elementary mathematics is anything but elementary.* Belmont, CA: Wadsworth Cengage Learning, 2010. ISBN 0495833908

[3] Bennett, R. E. *Formative assessment: A critical review. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 18(1), 5–25. 2011. https://doi.org/10.1080/0969594X.2010.513678.

[4] Duijzer a kol. *Moving Towards Understanding: Students Interpret and Construct Motion Graphs*. In Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.

(17), 25-51, 2020. https://www.researchgate.net/publication/341727025_Moving_Towards_Understanding_Students_Interpret_and_Construct_Motion_Graphs

[5] Keeley, P. D. – Tobey, C. R. *Mathematics Formative Assessment, Volume 1: 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning*. Spojené štáty americké: SAGE Publications, 2020. ISBN 978-1-4129-6812-6

[6] Ndimbo, W. *Teachers' and Pupils' Understanding of Competency-Based Assessment for Tanzania Primary School Pupils' Learning in Mpwapwa District*. Asian Journal of Education and Social Studies. 50. 477-490, 2024. https://doi.org/10.9734/ajess/2024/v50i81545.

[7] Wiliam, D. – Thompson, M. *Integrating Assessment with Learning: What will it take to make it work?* In C. A. Dwyer (Ed.). The future of assessment. Shaping teaching and learning (pp. 53–84). New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

*Mgr. Enikő Schnürerová*
*Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach*
*Jesenná 5*
*SK – 040 01 Košice*
*e-mail: eniko.schnurerova@student.upjs.sk*

# ROZVÍJANIE METAKOGNITÍVNYCH SCHOPNOSTÍ ŽIAKOV PRI RIEŠENÍ PROBLÉMOVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

MATÚŠ STÁŇA

***Abstrakt**. Kľúčovým prvkom v a vzdelávaní je problém, ktorý žiaci riešia. Ako tento problém zadať tak, aby viedol žiakov k aktívnej práci? Ako manažovať proces riešenia problému tak, že žiaci budú rozvíjať svoje vyššie poznávacie funkcie? Cieľom príspevku je na konkrétnych príkladoch učiteľskej praxe prezentovať jeden z možných prístupov k zadávaniu a riešeniu problémov na hodinách matematiky v duchu konštruktivistickej koncepcie.*

## Metakognícia v matematike

Pri realizácii výskumu sme sa opierali o niekoľko základných východísk. Prvým sú úrovne poznávacích funkcií. Existujú rôzne taxonómie kognitívnych procesov. Nie je dôležité, ktorá z taxonómií je nám bližšia a ktorá menej (či ide o Bloomovu taxonómiu, Niemiekrovu, Krathwohl – Andersonovu alebo inú). Podstatné je, že každá z nich vychádza z predpokladu, že človek (a teda aj žiak) rozvíja v procese učenia sa rôzne úrovne poznávacích procesov. V súčasnosti je zrejmé, že rozvíjať len pamäťovú zložku nepostačuje. Týmto tvrdením v žiadnom prípade neznehodnocujeme význam pamäte v procese učenia sa. Pamäť je nevyhnutná, no nestačí rozvíjať len ju. Bolo by to rovnaké, ako keby sme chceli nádejného murárskeho majstra učiť remeslu, no dávame mu len tehly. Ak ich nevie pospájať, je to zbytočné. My, učitelia, dnes stojíme pred výzvou, ako žiakov pripraviť na život v budúcnosti, o ktorej prakticky nič nevieme. Preto má veľký význam učiť žiakov riešiť problémy, pričom nie je dôraz na obsah (aké problémy žiak rieši), ale na proces (ako riešiť problém). Samotný obsah problému potom bude generovať sám život.

Druhým východiskom je pohľad na problém ako kľúčovú časť práce aj na hodine matematiky. Z toho, ako problém formulujeme, vyplýva, aké typy poznávacích funkcií u žiaka aktivujeme. Je dôležité, aby sa žiak naozaj stretol aj s problémami, nielen s úlohami. Ku klasifikácii úloh na hodinách matematiky možno pristúpiť rôzne. V práci sa opierame o Kopkovu metodiku (rutinný problém, nerutinný problém a skúmanie) s tým, že otvárame aj možnosť variabilného zadania problému z hľadiska komplexnosti vstupných údajov (úplne určené problémy, nedourčené problémy a preurčené problémy).

Podrobnejšie vymedzenie vstupných východísk je možné nájsť v odporúčanej literatúre.

## Úlohy aktivujúce prácu na metakognitívnej úrovni

Cieľom výskumu bolo formulovať úlohu, ktorá má potenciál viesť žiaka k rozvíjaniu metakognitívnych zručností a sledovať reakcie žiaka po jej zadaní, počas jej riešenia a následne počas žiakovej spätnej väzby (sebahodnotenia).

V našom prípade vzhľadom na charakter výskumu a rozsah výskumnej vzorky ide o kvalitatívny výskum. Predpokladáme, že nie je bežnou praxou podobné úlohy zadávať. Ako bližšie popíšeme v záverečnej časti, nie je v žiadnom prípade naším cieľom spochybňovať význam riešenia rutinných úloh a cvičení na bežných hodinách matematiky. Naopak, zámerom je rozšíriť penzum možností, ktoré učiteľ vo svojej praxi môže použiť.

## Výskumná vzorka

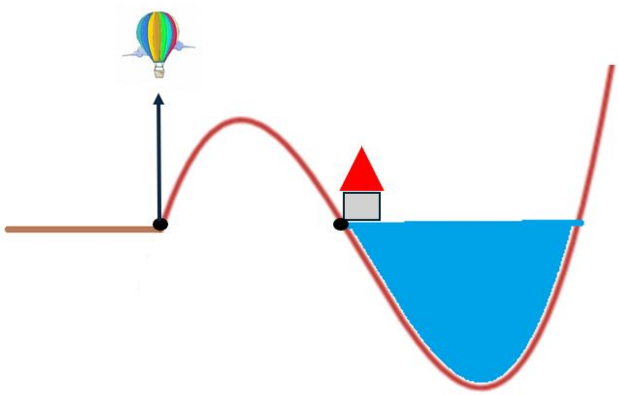
Výskumnú časť sme realizovali priamo na hodine so žiakmi. Išlo o hodinu „Seminár z matematiky“, ktorú má škola vo svojom vzdelávacom programe formulovanú ako voliteľný predmet. Cieľom tohto predmetu nie je primárne príprava na maturitnú skúšku, ale skôr rozvoj všeobecných matematických zručností pre dlhodobejší horizont („učenie sa pre život“). Predmet tak negeneruje na učiteľa tlak v podobe dodržania štandardov, učebný plán je voľnejší. Rovnako aj výber tém. Navyše, v rozvrhu hodín je predmet zaradený ako dvojhodinovka, čo znamená, že žiaci môžu riešiť problém dlhšie ako len 45 minút. Takáto forma a zameranie predmetu vytvára vhodný základ pre zaraďovanie „experimentálnych“ úloh a postupov.

Výskumu sa zúčastnili žiaci tretích ročníkov a septimy gymnaziálneho štúdia. Všetci si predmet sami zvolili s tým, že mali vedomosť o jeho zmysle. Nie všetci majú záujem maturovať z matematiky, no predpokladajú, že určitú úroveň matematického poznania budú potrebovať (či už počas štúdia na vysokej škole, alebo neskôr). Predmet navštevuje 22 žiakov.

Dôležité je, že žiaci sa v čase výskumu na predmete zaoberali základmi diferenciálneho počtu, pričom dôraz nebol zameraný na derivovanie konkrétnych funkcií podľa pravidiel derivovania. Akceptujúc princíp prepojenia fylogenézy a ontogenézy (t. j. že proces učenia sa, poznávania žiakom v podstatnej miere reflektuje to, ako bol daný problém objasňovaný historicky) sme vychádzali z historických súvislostí a riešených úloh, resp. problémov, s cieľom pochopiť význam diferenciálu a derivácie (či už geometrický alebo fyzikálny) a zmysel jej použitia.

## Úloha

Na úpätí kopca vzlieta kolmo hore balón. Na druhej strane hory sa nachádza jazierko, pričom na brehu je malý rybársky domček. Domček a miesto vzletu balóna sú v rovnakej nadmorskej výške. Ako vysoko musí balón vyletieť, aby sme ho zazreli aj z domčeka na brehu?



*Obrázok 5: Zadanie úlohy*

## Analýza úlohy

Z hľadiska Kopkovej klasifikácie ide minimálne o nerutinný problém, možno až skúmanie. Cieľ je síce formulovaný („ako vysoko musí balón vyletieť"), no pre mnohých žiakov môže byť táto formulácia nejasná. Je to, ako povedať: „Zajtra pôjdeme na túru na Končistú." Cieľ je jasne pomenovaný, no ak adresát správy vôbec nevie, kde tento vrch je, môže byť pre neho cieľ „neznámy". V každom prípade cesta je neznáma, preto má problém minimálne nerutinný charakter. Problematická je aj východzia situácia. Úloha je nedourčená, žiak nemá prakticky žiadnu kvantifikovanú vstupnú informáciu (s výnimkou poznámky, že domček aj miesto vzletu balóna sú v rovnakej výške). Bude teda nevyhnutné identifikovať aj zistiť tie vstupné údaje, ktoré budeme pri riešení potrebovať. Žiaci dostanú informáciu, že učiteľ im vie potrebné vstupné údaje, o ktoré požiadajú, aj povedať (napr. výška kopca, hĺbka jazierka, šírka kopca a pod.). Dôležité je, že počnúc miestom vzletu balóna sleduje reliéf terénu konkrétnu matematickú funkciu, ktorú učiteľ vykreslil vo vhodnom softvéri (Geogebra a i.). O tom však žiaci vedomosť nemajú. Poznanie funkčného predpisu učiteľom mu však umožňuje ľahko identifikovať vyššie uvedené potenciálne požadované vstupné informácie.

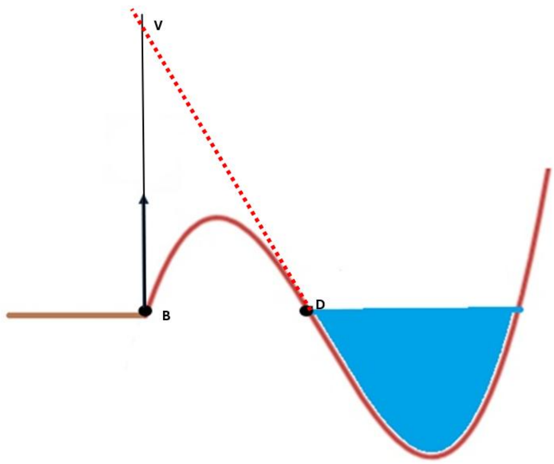
Predpokladáme, že v procese riešenia budú žiaci pracovať najprv v situačnom modeli. Budú sa snažiť určiť, ktoré informácie sú dôležité pre riešenie úlohy. Ďalej budú prechádzať do matematického modelu. Ich snahou bude nájsť matematické uchopenie úlohy, v čom im môže byť nápomocné zaradenie úlohy v čase zaoberania sa diferenciálnym počtom. Po nájdení matematického modelu úlohu vyriešia a záver interpretujú v danej situácii. Dôležitým vstupom učiteľa bude následná výzva k posúdeniu univerzálnosti ich riešenia (pozri nižšie).

Po ukončení samotného riešenia je dôležitá aj spätná väzba žiaka (spoločná aj individuálna – sebahodnotenie).

## Analýza riešenia problému

Žiaci boli rozdelení do troj až štvorčlenných skupín, v ktorých mali úlohu riešiť. Zámerom tohto rozdelenia bolo, aby sa žiaci o úlohe vzájomne rozprávali, aby diskutovali, aby skúmali. V menších skupinách je to určite jednoduchšie ako v jednej veľkej skupine triedy. V počiatočnej etape riešenia bolo cítiť určitý moment prekvapenia. „Čo to mám vlastne urobiť?" tak zneli mnohé reakcie žiakov, ktorými naznačovali, že ani cieľ ich práce im nie je jasný. Z ďalšej diskusie však vyplynulo, že problémom bola skôr nedourčenosť úlohy. V prvej fáze teda diskutovali v skupinkách a následne sa pýtali učiteľa, ktoré vstupné údaje sú pre nich dôležité. Boli formulované rôzne návrhy, najmä výška kopca, ale aj hĺbka jazierka, jeho šírka alebo šírka kopca. Po niekoľkých minútach, však niekoľkí žiaci z rôznych skupín povedali, že najrozumnejšie je mať nejako popísaný „terén", poznať funkciu, ktorá by ho popisovala.

Učiteľ žiakom teda zapísal funkciu, podľa ktorej daný terén vymodeloval. Druhou časťou riešenia bolo zistiť, čo máme z matematického hľadiska vlastne vypočítať. Išlo teda o matematizáciu úlohy. Táto etapa trvala bez pochybností najdlhšie. Učiteľ síce žiakov citlivo usmerňoval, ale len určitými pomocnými otázkami, napr.: „Nakreslite mi situáciu, keď už z chatky balón vidíme." Pre žiakov bolo veľkým problém pomenovať, čo vlastne kreslia. V skutočnosti všetci nakreslili to, čo vidíme na obrázku nižšie.




*Obrázok 6: Problém dotyčnice v žiackom riešení*

Učiteľ sa žiakov pýtal, ako zistili, kde má ležať priamka DV, odpoveď žiakov bola zaujímavá: „No spojili sme bod D, miesto, kde leží domček, s bodom V, teda miestom, kde vyletí balón, aby ho bolo vidno z domčeka.“ „A tak ste teda našli bod V,“ doplnil učiteľ. Žiaci súhlasili, pričom bolo veľmi ťažké ich naviesť k tomu, že nie je logicky správne, aby využili polohu bodu V na zistenie polohy bodu V (využili ho na konštrukciu priamky, ktorou ho hľadali). Čo bolo ešte zaujímavejšie, z pozorovania bolo zrejmé, že žiaci takto nelogicky ani nepostupovali. Keď kreslili svoje obrázky, bolo zrejmé, že priamku z bodu D sa snažia viesť tak, aby sa len dotýkala „kopca“, aby ho nepreťala. Pri kreslení teda využívali význam dotyčnice, ale trvalo veľmi dlho, kým to boli schopní verbalizovať. Nakoniec jeden žiak v triede použil pojem dotyčnica, na čo ostatní súhlasne prikývli: „Áno, veď o tom hovoríme.“

Keď už sme určili, ako úlohu „geometricky“ vyriešiť, nasledovalo určenie presnejšieho postupu. Žiakov síce chvíľu lákal aj pravouhlý trojuholník DBV, pravdepodobne z dôvodu, že na matematike sú veľmi zvyknutí pracovať s pravouhlými trojuholníkmi. Pojem dotyčnice a to, že sme sa na posledných hodinách venovali základom diferenciálneho počtu a s dotyčnicami sme pracovali (žiaci mohli pracovať so všetkými svojimi poznámkami a materiálmi), ich však rýchlo priviedol k formulovaniu postupu. Nájsť dotyčnicu v bode D a „za *x* dosadiť nulu“ (krivku aproximujúcu terén sme mali umiestnenú tak, že bod B, miesto vzletu balóna, bol v počiatku súradnicovej sústavy). To, čo nám vyjde, bude hľadaná výška.

V tretej fáze žiaci úlohu vyriešili. Samotný algoritmus riešenia poznali. S pomocou poznámok vedeli určiť deriváciu a teda smernicu dotyčnice v bode D, ktorého súradnice už poznali. Ak už poznali smernicu, určiť konkrétne smernicové vyjadrenie dotyčnice nebolo zo súradníc bodu D pre nich väčším problémom. Niektoré skupiny učiteľ viedol čiastkovými otázkami. Ako vieme vyjadriť priamku (našu dotyčnicu)? Aký je význam jednotlivých koeficientov? Ako nájdeme smernicu? Niektoré skupiny vyriešili problém úplne samostatne, niektorým pomocné otázky pomohli. Významným faktom jednoznačne bolo, že pojmy boli žiakom známe z predchádzajúcich hodín.

Po zodpovedaní úlohy nasledovala záverečná otázka učiteľa: „Je postup, ktorý sme práve použili, univerzálny? Mohol by byť terén akýkoľvek, aby sme týmto postupom dospeli k výsledku?“ Toto zadanie bolo pre mnohých žiakov veľmi náročné. Našli sa dvaja žiaci v skupine, ktorí identifikovali možný problém. „Čo ak dotyčnica v bode D pôjde cez kopec?“

Učiteľ žiakov ocenil, no s daným postrehom už ďalej nepracoval. V každom prípade ide o zaujímavý moment, potenciálne východisko pre zaoberanie sa vlastnosťou konvexnosti a konkávnosti funkcie. Vlastností, o ktorých sa bežne na stredoškolskej matematike nerozpráva.

V závere hodiny žiaci mali vyhodnotiť svoju prácu. Z reflexií žiakov bol zrejmý moment prekvapenia. Úlohu pokladali za ťažkú, lebo „nevedel / nevedela som, čo s tým mám robiť.“ Na druhej strane hodnotenie možno zhrnúť aj slovami jednej žiačky: „Myslím si, že veľa vecí, čo sme robili, boli dostatočne zaujímavé a jasné. Niekedy bolo ťažšie porozumieť alebo teda vydedukovať si, čo mám robiť, ale neskôr som tomu väčšinou pochopila. Podľa môjho názoru by nemalo byť vždy všetko, čo riešime, jednoduché a jasné, pretože by sme sa ani poriadne nemuseli nad tým zamýšľať, a nedospeli by sme ku žiadnemu zlepšeniu.“ Žiaci oceňovali aj prácu v skupine, kde si mohli vzájomne poradiť. K nedourčenosti úlohy prikladáme ešte hodnotenie ďalšej žiačky: „Osobne sa mi lepšie počítalo aj premýšľalo, keď bola úloha zadaná jednoznačne, no nesúhlasím, aby bola každá úloha zadaná takto. Bolo dobré, že sme na riešenie prichádzali sami a iná skupinka mohla prísť s iným uhlom pohľadu. Nevýhodou by však mohla byť dezinterpretácia zadania. No myslím, že mi to pomohlo pozerať sa na veci inak.“

Pri otázke, ktorú z etáp riešenia úlohy pokladali za najzložitejšiu (identifikácia potrebných vstupných údajov, matematizácia – nájdenie modelu, výpočet derivácie a následne určenie predpisu dotyčnice, formulovanie záveru), prakticky všetci odpovedali, že to bola fáza výpočtu derivácie, čo učiteľa prekvapilo. Učiteľ sledoval dĺžky jednotlivých etáp riešenia problému. Pokým fáza výpočtu derivácie (žiaci derivovali polynomickú funkciu tretieho stupňa) študentom zabrala podľa skupiny od troch do piatich minút, najdlhšia fáza nájdenia matematického modelu trvala najrýchlejším 25 minút. Fáza identifikácie vstupných údajov približne 12 minút.

## Pozorovania a závery

Základné pozorovania môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

1. Je pozitívne, že žiaci sa úlohy „nezľakli“. Pristúpili k nej ako ku problému a snažili sa ho riešiť.
2. Netrvalo dlho a žiaci prišli na to, že by potrebovali nejako „popísať terén“, t. j. predstaviť si ho ako funkciu a poznať jej predpis.
3. Výrazne najdlhšia fáza riešenia bola etapa matematizácie, t. j. vizualizovať, čo má žiak vypočítať (viesť dotyčnicu).
4. Paradoxne, žiaci ako najzložitejšiu časť uvádzali derivovanie funkcie v bode. Tento úkon im však trval krátko a väčšinou ho zrealizovali v nejakom softvéri.
5. Iba zlomok žiakov vedel popísať podmienky, kedy je úloha riešiteľná spôsobom, ktorý navrhli (teda pomocou dotyčnice).

Na bežných hodinách matematiky žiaci podobné úlohy neriešia alebo ich riešia minimálne. Je to pochopiteľné. Vo veľkej skupine pri dĺžke trvania hodiny 45 minút je to veľmi náročné. Najväčšou prekážkou je však potreba stihnúť určité množstvo obsahu. Cieľom prezentovaných výstupov nie je poukázať na nevhodnosť alebo nedostatočnosť bežne používaných matematických postupov či zaraďovanie rutinných úloh (cvičení). V matematickom vzdelávaní majú svoj zmysel. Sme však presvedčení, že je užitočné žiakov postaviť aj pred problémy, ktoré budú pre nich výzvou. Kde budú musieť premýšľať a objavovať. Najťažšou výzvou pre učiteľa je pri riešení týchto úloh „vycítiť“, kedy je dobré už žiakovi napovedať a kedy ho je ešte potrebné nechať pracovať samostatne. Príliš rýchle rady totiž z objavu žiaka robia objav učiteľa. Ak však žiak tápe už dlho, môže stratiť motiváciu. Navyše, každý žiak je individuálny, každá skupina má svoju dynamiku, preto urobiť v tomto smere jednoznačný záver ani nie je možné. Učiteľ musí mať oči otvorené.

Veľmi sa prihovárame aj za skupinovú prácu. Skupinky s primeraným počtom členov sa nám javia ako efektívny nástroj. Samozrejme, niektorí žiaci sa môžu v skupinke len „zviesť“, no títo by spravidla nepracovali efektívne ani sami. Dosiahnuť medzi žiakmi diskusiu o probléme je veľkým pedagogickým víťazstvom. A to sa nedá v jednej veľkej skupine ani ak pracuje každý sám.

Je zaujímavé, že žiaci identifikovali ako najväčší problém v úlohe vyriešenie derivácie, aj keď objektívne skutočnosti tento záver nepotvrdzovali. Na otázku, prečo to takto určili, odpovedali: „Lebo najťažšie je vždy počítať.“ Je zaujímavé, aké stereotypy majú žiaci vytvorené. Matematika = výpočet, výpočet je vždy ťažký. Fázu matematizácie akoby ani nepokladali za súčasť riešenia, pričom práve táto je kľúčová a vo všeobecnosti sa práve v tejto etape aktivujú hlbšie poznávacie funkcie ľudského mozgu. Prísť na to, ako problém riešiť. Vyriešenie samotné už je často len vecou nejakého algoritmu. Rieš kvadratickú rovnicu tú a tú je otázka aplikovania algoritmu. No zistiť, ako vysoko má vyletieť balón, bolo problémom, ktorý bolo potrebné analyzovať a nájsť matematický model, v ktorom by bolo možné aplikovať nejaký algoritmus na riešenie. Nie je práve toto matematické myslenie, ktoré chceme v žiakoch rozvíjať? Matematika je predsa nástrojom poznávania, spôsobom myslenia.

Na záver sme povinní priznať aj limity, ktoré riešenie podobných úloh má. Niektoré sme už spomenuli, ide o vonkajšie podmienky. Vyžaduje si to dostatok času a priestoru. Odporúčame preto skôr voliteľné predmety, ideálne v trvaní vyučovacej dvojhodinovky (45 minút je skutočne krátky čas). Samozrejme, sú tu aj vnútorne faktory. Nastavenie učiteľa a žiakov. Učiteľ sa ocitne vo vodách, kde si nie je až taký istý, kde nemá všetko pod kontrolou, kde veľa priestoru necháva žiakovi. Žiak nepracuje instantne (teda rýchlo a rutinérsky), čo ho môže vystrašiť. Opäť je aj úloha učiteľa vedieť argumentovať, prečo zadáva práve takúto úlohu. Osobitnou otázkou je samozrejme hodnotenie. Nemyslíme si však, že klasifikácia je všeliekom. Možno je čas aj na to, aby sme vedeli naše hodnotenie doplniť aj sebahodnotením žiakov, spoločnou reflexiou, slovnou spätnou väzbou od učiteľa. Nie za všetko musí byť vždy známka. Na druhej strane, ak známka, tak nemusí byť len za výsledok, môže byť zameraná aj na proces.

Veríme, že aj uvedené myšlienky môžu slúžiť ako podnety a inšpirácie pre matematickú učiteľskú obec. Môžu viesť učiteľa k rozšíreniu jeho vzdelávacej ponuky žiakom. Úspech nie je zaručený, veď každá skupina žiakov funguje inak, no ide minimálne o nový impulz.

## LITERATÚRA


[1]. Anderson, L. W. – Krathwohl, D. R. 2001. A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. 1. vyd. New York: Longman, 2001. 333 s. ISBN: 0-8013-1903-X.

[2]. Hejný, M. – Novotná, J. – Stehlíková, N. 2004. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova. ISBN 80-7290-189-3.

[3]. Kopka, J. 1999. Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí nad Labem: UPEJ. ISBN 978-8070-442470.

[4]. Nelson, T. – Narens, L. 1990. Metamemory: A theoretical framework and new findings. In *Psychology of Learning and Motivation* [online]. Vol. 26, p. 125–173 [cit. 2024-08-31]. ISSN 0079-7421. Dostupné online: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079742108600535?via%3Dihub.

*PhDr. PaedDr. Matúš Stáňa*
*Gymnázium Michala Miloslava Hodžu*
*M. M. Hodžu 860/9*
*SK – 031 01 Liptovský Mikuláš*
*Matus.Stana@gymlm.sk*

# IZOMORFIZMUS V KOMBINATORICKÝCH ÚLOHÁCH: STRATÉGIE RIEŠENIA ŽIAKOV 11-12R.

ANNA KUŘÍK SUKNIAK

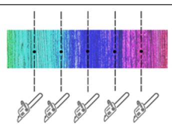
***ABSTRAKT.*** *Vo svojom výskume som žiakom 6. ročníka zadávala rôzne úlohy, ktoré zahŕňali výpočty úloh typu „5 nad 2". Tí hľadali riešenia jednotlivých úloh alebo korelácie medzi nimi. Mojím cieľom bolo prezentovať a diskutovať použité stratégie riešenia, ktoré sa vyskytli vo vybranej časti tohoto výskumu.*

## Úvod

Mnoho výskumov z oblasti kombinatoriky naznačuje, že žiaci majú obtiaže riešiť kombinatorické úlohy (Hadar & Hadass, 1981; Fischbein & Gazit, 1988; Batanero et al., 1997; Maher et al., 2011; Lockwood & Gibson, 2016). Hoci niektoré úlohy prezentované v týchto štúdiách majú rovnakú matematickú štruktúru, žiaci túto podobnosť často nedokážu rozpoznať (Batanero et al., 1997; English, 2005; Maher et al., 2011). Cieľom tohto výskumu je sledovať rozvoj kombinatorického myslenia u žiakov 2. stupňa ZŠ vo veku 11 - 12 rokov so zameraním na to, ako získavajú a rozširujú svoje kombinatorické schopnosti pri riešení úloh typu „5 nad 2". Zatiaľ čo medzi niektorými predloženými slovnými úlohami je izomorfizmus zjavný, medzi inými zostáva skrytý alebo ťažko rozpoznateľný.

## Metodológia

V prvej polovici školského roka boli vybraní žiaci 6. ročníka z náhodne vybranej školy. Toto obdobie a ročník boli zvolené k zvýšeniu pravdepodobnosti, že sa žiaci s podobnými kombinatorickými úlohami na hodinách matematiky ešte nestretli. Výber žiakov nemal iné kritéria. Žiaci boli rozdelení do skupín po 2 – 4 podľa svojich časových možností. Počas experimentu postupne riešili 24 úloh. Ten sa uskutočnil v ich škole po vyučovacích hodinách a pozostával z 3 – 4 90min stretnutí. Žiacke diskusie alebo individuálne

| | |
|---|---|
| Deska | V továrně na dřevěné hračky řeže stroj barevné dřevěné desky. Senzory stroje, díky malým černým tečkám na desce, ví kudy požadovaný řez vést. Nyní je stroj nastaven tak, aby rozřezal každou desku na 3 kusy. Kolika různými způsoby může stroj rozříznout desku na tři kusy?  |
| Věže | Stavíme věže z 5 kostek, jak je znázorněno na obrázku. Dvě kostky jsou modré, ostatní šedé. Kolik různých věží lze postavit?  |
| Večírek | Diana pořádá večírek. Ema, Mona, Alex a Laura přicházejí na večírek postupně. Každý nově příchozí si ťukne skleničkou limonády s těmi, kteří tam už jsou. Kolik bude celkem ťuknutí? |
| Kameny | V tabulce je číslo 102 tvořeno pomocí 3 kamenů. Kolik různých čísel lze vytvořit pomocí všech 3 kamenů?   |
| Kelímky | Tom má dvě stejné nálepky na kelímky a má pět různobarevných kelímků, na které je může umístit. Nechce na jeden kelímek umístit více než jednu nálepku. Kolika způsoby může umístit dvě nálepky na kelímky? |

*Tabulka 1: súbor piatich izomorfných úloh*

vysvetlenia riešení boli nahrané na video. Tento príspevok analyzuje prvé stretnutie so skupinou troch chlapcov - Erin, Will a Jay, počas ktorého riešili prvých päť úloh (tab. 1).

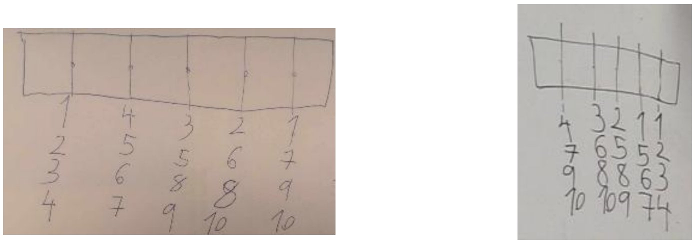
## Priebeh a analýza prvého stretnutia

Úloha „Doska“

Erin: Rôzne možnosti zaznamenával len pomocou prstov a ukladal si ich do pamäti. Stanovil si jeden rez a každý ďalší rez považoval za druhý rez daného riešenia. Ku každému rezu patrili 4 ďalšie rezy. To viedlo k výsledku 5 · 4 = 20. Absencia kódovacieho systému spôsobila, že jeho vysvetlenie na tabuli bolo nejasné. Práve tu si však uvedomil, že ak vezme prvé dva rezy, bude túto možnosť brať do svojho počítania dvakrát (prvý a druhý a následně druhý a prvý). To ho viedlo k tomu, aby svoj výsledok opravil, ale myšlienka, že pôvodný chybný výsledok 20 by stačilo vydeliť dvoma, ho nenapadla. Vymyslel druhú stratégiu: 4 možnosti pre prvý rez, 3 pre druhý rez atď. a dospel k číslu 10.

Will: Pochopil, že len jedna časť (jedna šestina) dosky sa rozrezáva na tri časti, ale ani to mu nebolo úplne jasné, preto v riešení problému ďalej nepokračoval.

Jay: Použil rovnaké číslo na označenie dvoch rezov, ktoré tvoria jedno riešenie. Našiel stratégiu vďaka jasnému uchopeniu kódov. Na začiatku (obr. 1 na ľavej strane) to nebolo úplne systematické, ale bolo to dostatočne jasné. Keď vysvetľoval svoje riešenie na tabuli (obr. 1 na pravej strane) bola jeho stratégia dôsledne systematická.

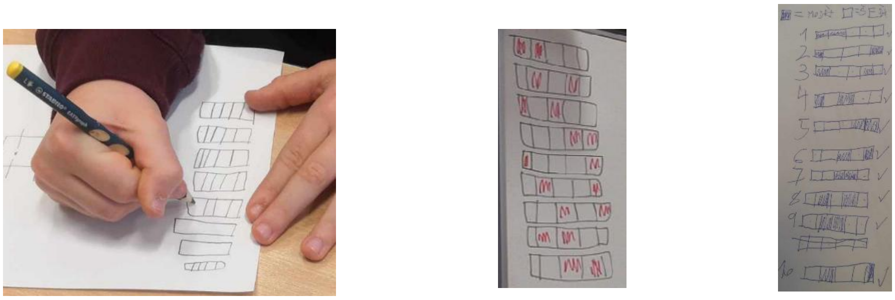



*Obrázok 1: Jayovo riešenie úlohy Doska v pracovnom liste a na tabuli*

Úloha „Veže“

Erin: Manipuloval s kockami. Jednotlivé prípady si ukladal do pamäti bez ich záznamu. Počas manipulácie veže položil a vytvoril z nich „vláčiky“. Jeho organizačný princíp mal dva kroky: 1. Posunúť nižšiu kocku o jednu nahor až do bodu, kde sa vyskytlo opakovanie, a 2. Zmeniť relatívnu polohu dvoch modrých kociek tak, aby v prvom kole boli dve modré kocky vedľa seba, v druhom kole by bola medzi modrými kockami jedna sivá kocka a v treťom kole by boli medzi modrými kockami dve sivé kocky.

Will: Manipuloval s kockami. Jednotlivé prípady zaznamenal graficky. Pravdepodobne inšpirovaný Jayom zachytil každú z veží pomocou obdĺžnika rozdeleného na 5 častí (obr. 2, ľavá strana). Okamžite videl, že ležiaci obdĺžnik (vlak) alebo stojaci obdĺžnik (veža) je rovnaký. Preukázal schopnosť geometricky transformovať vertikálne a horizontálne polohy. Najprv nakreslil sériu „vlakov“ a potom vyfarbil dve modré kocky. Nehľadal žiadny organizačný princíp a veril, že dokáže vytvoriť celý súbor riešení systémom „pozerám, čo ešte chýba“. Dospel k výsledku 9, ktorý prezentoval na tabuli (obr. 2, v strede).



*Obrázok 2: riešenia úlohy Veže*

Erin preskúmal Willovo riešenie a nenamietal, ale navrhol vhodnejší organizačný princíp. Pokúsil sa to demonštrovať prepojením prípadov vo Willovom riešení, ale stratil sa a nakoniec predviedol svoj nápad s presunom jednej kocky po druhej pomocou veže z 5 kociek manipuláciou. Erin doplnil Willovo riešenie o desiaty chýbajúci prípad veže. Pozrel sa na tabuľu (obrázok 2, v strede) a všimol si, že v prvom a štvrtom stĺpci Willovho zoznamu vyfarbil len 3 štvorčeky, zatiaľ čo v ostatných stĺpcoch vyfarbil vždy 4 štvorčeky. To umožnilo Erin nájsť chýbajúci prípad. Ukázal, že systém riešení podlieha symetrii. Tento brilantný postreh použil ešte raz, a to v probléme s kameňmi.

Jay: Manipuloval s kockami. Úlohu uchopil graficky – nakreslil „veže“ ako „vlaky“. Príčinou mohla byť životná skúsenosť s písaním rôznych zoznamov. Používal dva organizačné princípy (obrázok 2, pravá strana). Prvé štyri prípady našiel tak, že posunul jednu kocku doľava. Potom našiel prípady 6 – 9 presunutím ľavej modrej kocky o jedno políčko doľava a ľavej modrej kocky k druhej modrej kocke. Nevedeli sme, kedy zistil, že mu chýba ešte jeden prípad, ani ako ho našiel. Uviedol, že princíp usporiadania prvých piatich veží bol rovnaký ako u Erina. To však nebolo presné. Kým Erin zakaždým presunul kocku z prvého poschodia na piate, Jay presunul tú istú kocku o jednu pozíciu vyššie. Ďalej Jay podľa vlastných slov nenašiel organizačný princíp a ďalšie veže hľadal náhodným výberom. Podľa jeho záznamu však organizačný princíp existoval.

Úloha „Večierok“

Will: Úlohu uchopil prostredníctvom mien. Nezapisoval a všetko uchovával v pamäti. Počítal s pomocou prstov. Organizačný princíp bol určený dejom – prvý si ťukol s oslávencom, druhý s oslávencom a tým prvým atď. Výsledok bol teda 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Jay: Uistil sa, že dobre porozumel zadaniu. Spýtal sa, či si všetci ťukli zakaždým spoločne. Pri vysvetľovaní svojho riešenia sa zastavil a povedal, že to pochopil zle. Niekde urobil chybu a uvedomil si ju, až keď mal opisovať svoj organizačný princíp. V písomných záznamoch sme nenašli dostatok textu, z ktorého by sme ho mohli vyvodiť.

Erin: Prikývol, že úlohu vyriešil rovnako ako Will. Záznam si nerobil.

Úloha „Kamene“

Jay: Potreboval sa uistiť, že rozumie zadaniu. Konkrétne, či musia byť vždy použité všetky tri kamene a aká veľká je tabuľka. Úlohu uchopil tabuľkou. Jeho organizačným princípom bolo presúvať kamene zľava doprava. Začal v trojici 3-0-0 a skončil v trojici 0-0-3. Týmto spôsobom získal 7 prípadov. Uvedomil si, že mu chýba kombinácia jednotiek a stoviek, preto našiel riešenia 1-0-2 a 2-0-1. Tým získal spolu 9 prípadov. Pravdepodobne tu použil rovnaký organizačný princíp, t. j. posun tentoraz v opačnom smere, od jednotiek k stovkám. Jeden kameň presunul z posledného stĺpca do prvého a ďalší kameň v ďalšom kroku. Chýbalo mu riešenie 1-1-1. To Erin okamžite napísal na tabuľu. V Jayovom riešení na papieri sme našli ďalšie dve opakujúce sa riešenia: 0-2-1 a 0-1-2. Jay si neuvedomil, že tieto riešenia už má, a bol presvedčený, že všetkých riešení je 11.

Will: Uchopil problém prostredníctvom číselných hodnôt. Túto skutočnosť však nepovažoval za organizačný princíp a jednotlivé prípady hľadal systémom „pozerám čo ešte chýba“. Opakovanie prípadu 300 na jeho papieri na prvom a druhom mieste bolo pravdepodobne dôsledkom nepozornosti. Chýbal mu len prípad 102, to však bolo číslo zo zadania, takže je možné, že ho už nehľadal.

Erin: Nevedeli sme, ako úlohu pochopil, aký organizačný princíp použil, alebo či ho vôbec použil.

Erin rýchlo doplnil Jayovo riešenie o desiaty chýbajúci prípad 1-1-1. Nevedeli sme určiť, ako tento prípad našiel. Pravdepodobne ho hľadal už dlho, preto sa stal v jeho mysli dominantným. Erin svoje myšlienky nevyjadril, ani neurobil žiadny písomný záznam. Aj to bol pravdepodobne dôvod jeho prvého nesprávneho výsledku, že prípadov bolo 12. Už pri tabuli sa domnieval, že je to 10, čo zdôvodňoval symetriou stĺpcov. V každom stĺpci boli raz tri kamene, dvakrát dva kamene a trikrát jeden kameň. Opäť našiel štruktúru všetkých desiatich prípadov, ako to urobil pri úlohe Veže.

Úloha „Kelímky“

Will: Potreboval objasniť zadanie. Experimentátor zopakoval zadanie inými slovami. Následne Will videl izomorfizmus medzi situáciou s vežami a situáciou s nálepkami na kelímkoch. Tento izomorfizmus opísal na úrovni objektov. Presne priradil súbor piatich pohárov k súboru veží tak, že na poháre nalepil nálepku zodpovedajúcu modrým kockám na veži. Bolo mu jasné, že toto zobrazenie je bijektívne. Povaha izomorfizmu, ktorý Will objavil, bola konceptuálna. Nebolo potrebné nájsť organizačný princíp, pretože úloha už bola vyriešená vďaka izomorfizmu s úlohou Veže.

Jay: Použil rovnakú číslicu na označenie dvoch kelímkov, ktoré tvoria jedno riešenie. Objavil izomorfizmus medzi úlohami Dosky a Kelímky vďaka postupu riešenia. Povaha izomorfizmu, ktorú Jay objavil, bola procesuálna. Organizačný princíp bol rovnaký ako v úlohe Doska.

Erin: Objavil izomorfizmus medzi úlohami Doska a Kelímky. Nevedeli sme však, či to bolo spôsobené postupom riešenia, alebo či videl bijekciu medzi štruktúrami. Domnievali sme sa, že izomorfizmus tušil na konceptuálnej úrovni a potom si ho procesuálne overil.

## Záver

Popísané stretnutie ukázalo rozmanité prístupy žiakov k riešeniu kombinatorických úloh. Stratégie ako výpis prvkov, manipulácia s objektmi, grafický zápis, tabuľka, hľadanie chýbajúcich prípadov a kódovanie pomocou čísel reflektujú rôzne typy uchopenia úloh. Identifikácia symetrie a objav izomorfizmov medzi úlohami naznačujú, že žiaci postupne vyvíjajú komplexnejšie kombinatorické myslenie. Získané poznatky môžu slúžiť ako užitočný základ pre budúci výskum a pedagogickú prax, s cieľom podpory rozvoja tejto oblasti.

LITERATÚRA


[1] Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D.: Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils, Educational Studies in Mathematics, 1997, 32(2), 181–199

[3] English, L. D.: Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning, In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school (pp. 121–141), New York, Springer, 2005, ISBN 978-0-387-24530-0

[4] Fischbein, E., & Gazit, A.: The combinatorial solving capacity in children and adolescents. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988, 5, 193–198

[5] Hadar, N., & Hadass, R.: The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12(4), 435–443

[6] Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Eds.): Combinatorics and reasoning: Representing, justifying, and building isomorphisms, Dordrecht, Springer, 2011, ISBN 978-94-007-0615-6



*Mgr. Anna Kuřík Sukniak*
*Karlova Univerzita, Praha, Pedagogická fakulta*
*Magdalény Rettigové 4*
*ČR – 11639 Praha 1*
*e-mail:* anna.sukniak@h-mat.cz

# PRACOVNÍ UČEBNICE MNOŽINY A VÝROKY

ANNA KUŘÍK SUKNIAK, DAVID ZENKL

***ABSTRAKT.*** *Článek prezentuje obecnou koncepci nových tematických pracovních učebnic psaných v duchu Hejného metody a popisuje některé z hlavních didaktických zásad prostřednictvím konkrétních úloh z nové pracovní učebnice pro gymnázia a střední školy věnované oblasti výroků a množin.*

## Úvod

Na konferenci Dva dni s didaktikou matematiky 2024 byla představena nová učebnice, která je první z řady tematických pracovních učebnic pro gymnázia a střední školy, založená na vybraných principech Hejného metody. Tyto principy lze využít i v případě, že žáci nebyli touto metodou vedeni po celou dobu studia. Přímo z obsahu (obr. 1) je zřejmé, že oblasti nejsou jednoduše rozdělené do dvou celků, ale vzájemně se prolínají a to i s jinými oblastmi matematiky, jako je například geometrie či teorie čísel, ale i s nematematickými oblastmi (zeměpis, český jazyk aj.). Tento spirálový systém poskládání učiva, kde pojmy, procesy a vztahy se budují postupně tak, že se k nim žáci průběžně vrací a provazují tak již osvojené koncepty s těmi složitějšími, je jedním z typických prvků nových učebnic.



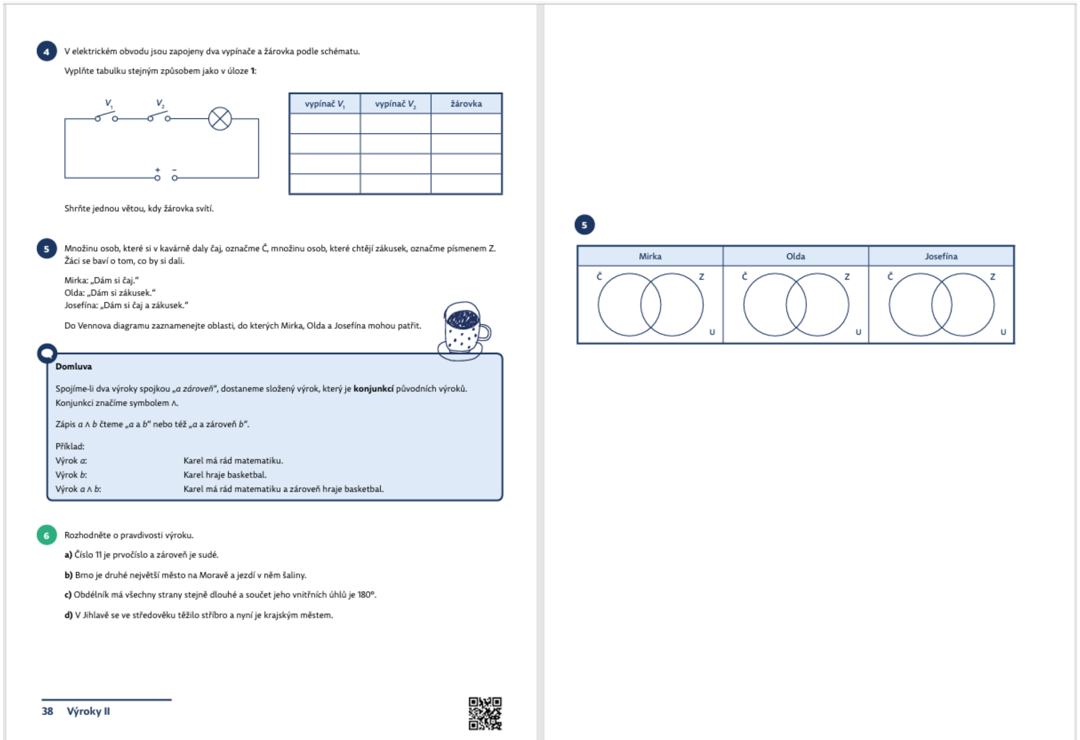

*Obrázek 1: obálka a obsah pracovní učebnice Množiny a výroky*

Pracovní učebnice Množiny a výroky (Hanušová et al., 2024) pokrývá učivo a slouží k dosažení všech očekávaných výstupů v rámci tématu Argumentace a ověřování podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia v ČR (MŠMT, 2016). Jejím cílem je prostřednictvím propojení mezi tématy množin a výrokové logiky budovat porozumění žáků a rozvíjet jejich argumentační dovednosti. Učebnice je strukturovaná jako série gradovaných úloh, které vedou k dílčím cílům: význam logických spojek a kvantifikátorů, porozumění operací s množinami, rozvoj porozumění dělitelnosti a dovednosti zdůvodňovat či argumentovat. Učebnice podporuje konstruktivistický přístup k výuce, kde učitel působí jako průvodce a moderátor diskusí žáků, přičemž dbá, aby se s klíčovými poznatky seznámila celá třída, ne pouze několik jednotlivců. Učiteli může být nápomocná elektronická příručka, která obsahuje nejen výsledky a očekávaná řešení žáků, ale také zkušenosti z pilotního vyučování, cíle jednotlivých témat a úloh a doporučení pro diferenciaci výuky. Lze se k ní dostat i jednoduše načtením QR kódu v dolním rohu na každé stránce (obr. 2).

### Průběh dílny a charakteristika učebnice

Dílny, na níž jsme učebnici poprvé veřejně představili, se účastnilo přibližně 15 lidí, zejména učitelů středních škol. Hlavním cílem bylo seznámit účastníky s celkovou koncepcí pracovních učebnic a ukázat některé typické rysy učebnice prostřednictvím konkrétních úloh. Účastníci dostali k dispozici učebnici k prolistování. Společně jsme se věnovali vybraným úlohám, z kterých jsme některé pouze komentovali, na některé byl vyhrazen čas k řešení.

Učebnice je pracovní (obr. 2) – na levé straně jsou zadání úloh a pravá strana je prázdná, případně obsahuje již předkreslené grafy, tabulky, čtverečkovanou mříž apod. Toto uspořádání umožňuje žákům psát si výpočty a poznámky přímo k řešené úloze, čímž odpadá nutnost dalšího sešitu.


4 V elektrickém obvodu jsou zapojeny dva vypínače a žárovka podle schématu.

Vyplňte tabulku stejným způsobem jako v úloze **1**:

| vypínač $V_1$ | vypínač $V_2$ | žárovka |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Shrňte jednou větou, kdy žárovka svítí.

5 Množinu osob, které si v kavárně daly čaj, označme Č, množinu osob, které chtějí zákusek, označme písmenem Z. Žáci se baví o tom, co by si dali.

Mirka: „Dám si čaj."
Olda: „Dám si zákusek."
Josefína: „Dám si čaj a zákusek."

Do Vennova diagramu zaznamenejte oblasti, do kterých Mirka, Olda a Josefína mohou patřit.

**Domluva**

Spojíme-li dva výroky spojkou „*a zároveň*", dostaneme složený výrok, který je **konjunkcí** původních výroků. Konjunkci značíme symbolem $\wedge$.

Zápis $a \wedge b$ čteme „$a$ a $b$" nebo též „$a$ a zároveň $b$".

Příklad:
Výrok $a$: Karel má rád matematiku.
Výrok $b$: Karel hraje basketbal.
Výrok $a \wedge b$: Karel má rád matematiku a zároveň hraje basketbal.

6 Rozhodněte o pravdivosti výroku.

**a)** Číslo 11 je prvočíslo a zároveň je sudé.

**b)** Brno je druhé největší město na Moravě a jezdí v něm šaliny.

**c)** Obdélník má všechny strany stejně dlouhé a součet jeho vnitřních úhlů je 180°.

**d)** V Jihlavě se ve středověku těžilo stříbro a nyní je krajským městem.

38 Výroky II

5

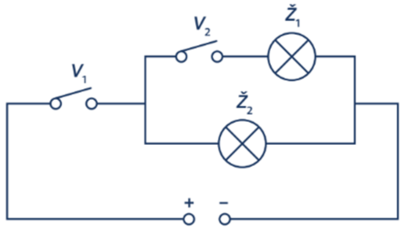
| Mirka | Olda | Josefína |
|---|---|---|
| Č Z U | Č Z U | Č Z U |



Obrázek 2: dvojstránka 38 – 39 pracovní učebnice Množiny a výroky

Učebnice obsahuje výlučně neřešené úlohy, domluvy, značení a historické poznámky. Téměř všechny úlohy jsou gradované (Trojánek, 2018; Votavová et al., 2023), čímž umožňují diferenciaci a individualizaci práce ve třídě. Rozlišujeme úlohy dvojího typu (obr. 2). Úlohy, které vedou k budování pojmu, značíme modře a je užitečné řešit je postupně a nevynechávat. Úlohy s výběrem značíme zeleně a mají za cíl prohloubení porozumění poznatků. Učitel může úlohu zadat podle situace ve třídě, žáci tak neřeší všechny podúlohy, ale např. si vyberou podle potřeby buď základní úroveň a), b), nebo náročnější úlohy e), f). Když je takto označena samostatná úloha, většinou je určená pro rychlé žáky. Kromě tohoto

**1** V elektrickém obvodu jsou zapojeny dva vypínače a dvě žárovky.
V tabulce je vyznačeno, zda je vypínač zapnutý (1), nebo vypnutý (0) a zda žárovky svítí (1), nebo nesvítí (0).




| vypínač $V_1$ | vypínač $V_2$ | žárovka $Ž_1$ | žárovka $Ž_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

**a)** Jestliže jsou oba vypínače zapnuté, svítí obě žárovky.

**b)** Není možné, aby svítila jen žárovka $Ž_1$.

**c)** Existuje možnost, kdy je jeden vypínač zapnutý, ale nesvítí ani jedna žárovka.

**d)** Žárovka 2 svítí právě tehdy, když je zapnutý vypínač $V_1$.

**e)** Vždy, když je zapnutý vypínač $V_1$, svítí žárovka $Ž_1$.

**f)** Jestliže je zapnut právě jeden vypínač, svítí alespoň jedna žárovka.

základního rozdělení může být u úlohy ještě ikonka označující možnost využití digitálních technologií nebo manipulativní úlohu. Další ikony vyskytující se v učebnici symbolizují domluvu nebo značení. Záměrně se pro jednoduchost jazyka a jistou flexibilitu vyhýbáme pojmu definice. Slovo domluva též mnohem lépe vystihuje osobnostně sociální rozvoj žáka, který je podstatným principem navržené výuky. Poslední ikonkou je pergamen označující historické poznámky, které žákům osvětlují, jak se určité myšlenky nebo události vyvíjely v čase, čímž se učivo může stát relevantnějším a zajímavějším.

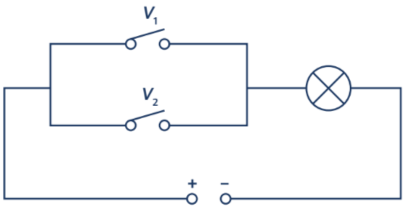
*Obrázek 3: úloha 36/1 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

První řešenou úlohou v rámci dílny byla úloha 36/1 v kontextu elektrického obvodu (obr. 3). Úloha představuje první seznámení s tabulkou pravdivostních hodnot, zatím ve zcela praktickém významu: 1 znamená, že součástkou v obvodu prochází elektrický proud, 0 znamená opak. Stejně jako ve třídě tak i mezi účastníky dílny během diskuse vyvstalo, že někteří pravdivost daných výroků usuzovali ze schématu elektrického obvodu, jiní z tabulky. Cílem úlohy je právě propojovat tyto dvě reprezentace, čehož se následně využije u dalších úloh v tomto prostředí, a budovat tak porozumění této problematice.

Další diskutovanou úlohou v tomto kontextu byla úloha 38/4 (obr. 2). Zde účastníci úlohu neřešili, ale správně odhadli, že cílí na konjunkci, i když má zatím pouze jeden konkrétní význam – popis elektrického obvodu. Konjunkci stejně jako jiné pojmy budujeme ve vícero kontextech. Další úloha 38/5 (obr. 2) propojuje jazyk výroků s jazykem množin. Žáci zde vidí další vizualizaci významu konjunkce, zároveň si ji propojují s příbuzným pojmem průniku množin. Někteří žáci mají tendenci u Mirky a Oldy nechat průnik obou množin nevyplněný. V třídní diskusi typicky zazní, že je rozdíl mezi výrokem “Dám si čaj” a “Dám si pouze čaj”, někdo může argumentovat i tím, že pokud řekneme číšníkovi “Dám si čaj”, nemůžeme čekat zákusek – a zde přichází na řadu diskuse o rozdílu mezi běžným jazykem a přesným jazykem výrokové logiky. V neposlední řadě může žáky mást i to, že zakreslují oblasti, kam Mirka, resp. Olda potenciálně může patřit. Přitom ve skutečnosti musí každý člověk náležet jen do jedné oblasti – nemůžeme si současně dát pouze čaj a zároveň čaj se zákuskem. Typicky až po vyřešení několika úloh přichází domluva, zde domluva na konjunkci (obr. 2).

**7** V elektrickém obvodu jsou zapojeny dva vypínače a žárovka podle schématu.

Vyplňte tabulku stejným způsobem jako v úloze **1**:




| vypínač $V_1$ | vypínač $V_2$ | žárovka |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Shrňte jednou větou, kdy žárovka svítí.

*Obrázek 4: úloha 40/7 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

Poté jsme představili úlohu 40/7 (obr. 4), jejíž cílem je v kontextu elektrického obvodu vytvořit tabulku pravdivostních hodnot disjunkce. Žárovka svítí, pokud je zapnut alespoň jeden z vypínačů $V_1$ nebo $V_2$.

**8** Z předložených mariášových karet vyberte všechny karty, které vyhovují níže uvedené podmínce.

**a)** Vybraná karta je devítka nebo je srdcová.

**b)** Vybraná karta je kulová nebo je větší než 7.

**c)** Vybraná karta je větší než 8 nebo je žaludová.

**d)** Vybraná karta není listová nebo je menší než 9.

*Obrázek 5: úloha 40/8 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

Další konkrétní model disjunkce byl představen v prostředí karet prostřednictvím úlohy 40/8 (obr. 5). Žáci zde zjistí, že aby platila daná tvrzení, stačí splnit jednu z požadovaných vlastností. Někdy pro ně bývá matoucí, že spojka „*nebo*“ připouští v českém jazyce obě možnosti současně – tomuto se podrobněji věnujeme později, ale pokud někdo již teď najde souvislost s úlohou 40/7, může argumentovat i tou. A opět až po vyřešení několika dalších úloh přichází domluva na disjunkci.

**12** Z předložených mariášových karet vyberte všechny karty, které vyhovují níže uvedené podmínce.

**a)** Jestliže je vybraná karta srdcová, pak je to sedmička.

**b)** Jestliže je vybraná karta kulová, pak je větší než 7.

**c)** Jestliže je vybraná karta větší než 8, pak je žaludová.

**d)** Jestliže vybraná karta není listová, pak je menší než 9.

*Obrázek 6: úloha 42/12 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

V kontextu karet se v rámci úlohy 42/12 žáci poprvé setkávají s konceptem implikace (obr. 6). Mnohdy mají potíže pochopit pravdivost implikace $0 \Rightarrow 1$. Cílem úlohy je, aby si tuto skutečnost uvědomili. Někteří žáci mohou implikaci chápat jako ekvivalenci**.** V takovém případě můžeme daný výrok přeformulovat jako skutečnou ekvivalenci (s použitím spojek jako „*právě tehdy, když*“ nebo „*tehdy a jen tehdy*“) a vyzvat je, aby posoudili rozdíl. V této úloze žáci obvykle nejprve ověřují předpoklad a někteří se mohou ptát, co dělat, pokud nebude splněn. Je užitečné zdůraznit, že naším cílem je vybrat všechny karty, které splňují danou podmínku.

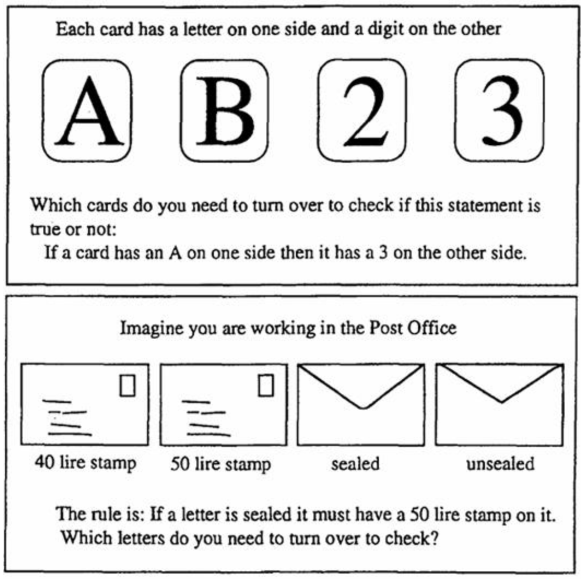
**3** Na stole leží čtyři karty. Každá z nich má na jedné straně uveden nápoj a na druhé věk osoby, která nápoj pije. Platí pravidlo: „Pokud osoba pije alkohol, musí jí být alespoň 18 let.“ Vyberte právě ty karty, které byste museli obrátit, abyste zjistili, zda bylo pravidlo dodrženo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **pivo** | **čaj** | **55** | **13** |

*Obrázek 7: úloha 88/3 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

Implikace se vrací v kapitole Výroky IV, kde budujeme porozumění opačné implikaci a směřujeme k ekvivalenci. K úloze 88/3 (obr. 7) lze přistoupit intuitivně. Prostřední dvě karty není třeba obracet, protože ani v jednom případě nehrozí nedodržení podmínek. Je třeba obrátit obě krajní karty a ověřit, zda 1) Je osoba, která pije pivo, starší 18 let? 2) Pije třináctiletá osoba nealkoholický nápoj? Na úlohu se můžeme podívat také z čistě logického hlediska. Pravidlo by nebylo dodrženo, pokud by osoba pila alkohol a bylo jí méně než 18 let. Je tedy třeba otočit ty karty, u kterých nelze vyloučit, že by k této situaci došlo, tedy první a poslední kartu. Úloha tedy cílí na situace, kdy implikace není v platnosti.

Úloha byla inspirována často citovaným výzkumem Wasona (1968). Podle Johnson-Lairda et al. (1972), kteří zkoumali jinou verzi Wasonovy „výběrové úlohy“ (obr. 8), má kontext úlohy vliv na úspěšnost žáků při jejím řešení. V případě, že řešili žáci úlohu s kontextem známek a doporučených dopisů, byli mnohem úspěšnější, než když řešili úlohu bez sémantického kontextu, pouze s čísly a písmeny.




*Obrázek 8: obměněná verze Wasonovy „výběrové úlohy“ (Johnson-Laird et al., 1972)*

Úloha 90/8 (obr. 9), která připravuje koncept ekvivalence, je zároveň příkladem propojení oblasti výroků s oblastí geometrie. Při řešení úlohy si žáci uvědomí, že výroky $a \Rightarrow b$ a $b \Rightarrow a$ nemusí mít stejnou pravdivostní hodnotu. Výrok a) je nepravdivý, mohlo by se totiž jednat o kosočtverec nebo deltoid. Výrok b) je pravdivý.

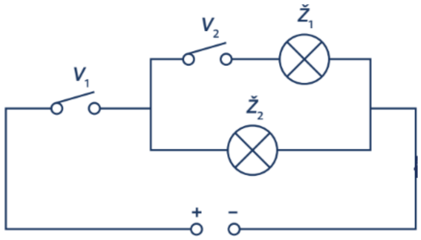
**8** Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující implikace:

**a)** Jestliže jsou úhlopříčky čtyřúhelníku k sobě kolmé, pak je čtyřúhelník čtverec.

**b)** Jestliže je čtyřúhelník čtverec, pak jsou jeho úhlopříčky k sobě kolmé.

*Obrázek 9: úloha 90/8 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

Úloha 90/9 (obr. 10) je ukázkou toho, jak ekvivalenci dvou výroků budujeme: jako konjunkci dvou vzájemně opačných implikací – tak, aby žáci rovnou rozuměli tomu, co ekvivalence vypovídá o vztahu dvou výroků, které spojuje, a jak ji potažmo dokázat. Dvojici ekvivalentních a neekvivalentních tvrzení představuje i tato úloha, při níž se žáci po delší době vracejí k elektrickému obvodu jako modelu složeného výroku. Pro zorientování si žáci mohou rozebrat možné stavy vypínačů v obvodu, případně rozepsat tabulku pravdivostních hodnot.



**9** Na obrázku je schéma elektrického obvodu.



K obvodu se vztahují výroky $ž_1$, $ž_2$ a $v_1$.

$ž_1$: Žárovka $Ž_1$ svítí.
$ž_2$: Žárovka $Ž_2$ svítí.
$v_1$: Vypínač $V_1$ je zapnutý.

Slovně zapište implikace a porovnejte jejich pravdivostní hodnoty.

**a)** $ž_1 \Rightarrow v_1$ a $v_1 \Rightarrow ž_1$ **b)** $ž_2 \Rightarrow v_1$ a $v_1 \Rightarrow ž_2$

*Obrázek 10: úloha 90/9 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

Úloha je 96/4 (obr. 11) je příkladem úlohy ve formátu Concept Cartoons. Ten byl vytvořen v roce 1991 (Keogh & Naylor, 1993) s cílem motivovat a zapojit žáky do řešení problémů. Každý Concept Cartoon je jednoduchý kreslený obrázek, který zobrazuje „bublinový“ rozhovor mezi několika dětmi.


*Obrázek 11: úloha 96/4 z pracovní učebnice Množiny a výroky*

## Závěr

V článku sumarizujícím dílnu na konferenci byla představena ilustrovaná pracovní učebnice, která je postavená na praktických zkušenostech pilotních učitelů a poznatcích z odborné literatury z didaktiky matematiky. Učebnice byla vytvořena osmičlenným týmem (kromě autorů tohoto článku se jedná o Janu Hanušovou, Ivana Hejného, Milana Hejného, Jakuba Kašpara, Evu Novákovou a Daniela Vybírala) a podrobena pilotnímu ověřování a inovacím z nich pramenících. Je koncipována podle teorie generických modelů (Hejný, 2012), aby žáci přecházeli od izolovaných modelů přes model generický k zobecnění a abstrakci. Zásadním principem je diskuse žáků ve třídě. Pro větší přívětivost jazyka učebnice byly použity domluvy a značení namísto tradičních definic a to tak, aby přicházely až po vyřešení několika úloh k nim směřujících. Učebnice obsahuje různé reprezentace téhož tématu (např. karty, elektrické obvody, Vennovy diagramy, tabulky pravdivostních hodnot), což umožňuje žákům nahlížet na látku z různých perspektiv a budovat si porozumění daného konceptu. V učebnici se prolínají matematická témata, zejména množiny a výroky, ale také číselné obory, geometrie, a dokonce i nematematické oblasti, jako je zeměpis či český jazyk.

## LITERATURA


[1] Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis scholae, 6*(2), 41–55. https://doi.org/10.14712/23363177.2015.39

[2] Hanušová, J., Hejný, I., Hejný, M., Kašpar, J., Nováková, E., Sukniak, K. A., Vybíral, D., & Zenkl, D. (2024). *Množiny a výroky – pracovní učebnice pro gymnázia a střední školy.* H-mat

[3] Johnson-Laird, P. N., Legrenzi, P., & Legrenzi, M. S. (1972). Reasoning and a sense of reality. *British journal of Psychology*, *63*(3), 395-400.

[4] Keogh, B., & Naylor, S. (1993). Learning in science: another way in. *Primary Science Review*, 22-22.

[5] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (2016). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Praha. http://www.nuv.cz/t/rvp-pro gymnazia

[6] Trojánek, P. (2018). *Jak si ulehčit práci s gradovanými testy*. H-mat.

https://blog.h-mat.cz/blog/h-edu-jak-si-ulehcit-praci-s-gradovanymi-testy

[7] Votavová, R., Majcíková, K., Ješátková, V., & Bařinková, Z. (2023). *Desatero úspěšné práce s heterogenní třídou*. NPI.

https://www.npi.cz/images/desatero_uspesne_prace_s_heterogenni_tridou.pdf

[8] Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly journal of experimental psychology*, *20*(3), 273-281.



*Mgr. Anna Kuřík Sukniak a Mgr. David Zenkl*
*Karlova Univerzita, Pedagogická fakulta*
*Magdalény Rettigové 4*
*ČR – 11639 Praha 1*
*e-mail:* anna.sukniak@h-mat.cz; david-zenkl@h-mat.cz

# ÚNIKOVÉ MIESTNOSTI VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

PETER VANKÚŠ, MÁRIA ČUJDÍKOVÁ

***ABSTRAKT.*** *V príspevku sa venujeme pracovnej dielni predstavujúcej digitálne vzdelávacie únikové miestnosti vo vyučovaní matematiky. Účastníci prakticky vyskúšali dva typy miestností a vyjadrili záujem o ich integráciu do vyučovania.*

## Úvod

Únikové hry sa definujú ako tímové hry, kde hráči objavujú stopy, riešia hádanky a plnia úlohy v jednej alebo viacerých miestnostiach s cieľom dosiahnuť konkrétny cieľ, zvyčajne uniknúť z miestnosti, v časovom limite (Nicholson, 2015). Špecifickým príkladom využitia únikových hier vo vzdelávaní sú digitálne vzdelávacie únikové hry (digital educational escape room = DEER). Tieto predstavujú moderné digitálne vzdelávacie aplikácie založeného na hre, ktoré ponúkajú pútavé zážitky v rôznych vzdelávacích prostrediach.

Vzdelávacie únikové hry majú potenciál ako inovatívny a pútavý prístup na podporu aktívneho učenia. Množstvo štúdií naznačuje, že dobre navrhnuté vzdelávacie únikové hry môžu zvýšiť motiváciu žiakov a zlepšiť ich nadšenie pre učenie sa (Fotaris & Mastoras, 2019; Fotaris & Mastoras, 2022; Manzano-León et al., 2021; Taraldsen et al., 2022; Veldkamp et al., 2020; Videnovik et al., 2022). Fotaris a Mastoras (2019) zdôrazňujú, že vzdelávacie únikové hry ponúkajú príjemný zážitok, pri ktorom sú žiaci aktívnymi účastníkmi učebného procesu. Zdolávaním výziev v rámci týchto hier žiaci získavajú poznatky o riešení problémov z rôznych perspektív, zapájajú sa do tímovej spolupráce a rozvíjajú sociálne väzby, čo všetko prispieva k ich vzdelávaniu.

Čo sa týka pedagogických teórií učenia sa, únikové hry sa opierajú o sociálno-konštruktivistický rámec (Vygotsky, 1978), kde žiaci dosahujú kognitívny rozvoj prostredníctvom interakcií s ostatnými ľuďmi. Pritom sa zapájajú do aktívneho dialógu, ktorý im umožňuje konštruovať nové poznatky a zlepšovať chápanie.

Taraldsen et al. (2022) uvádzajú ako významné oblasti, ktoré používajú DEER zdravotníctvo a oblasti STEM (veda, technológia, inžinierstvo a matematika). Podobne Fotaris a Mastoras (2019) identifikujú zdravotníctvo, prírodné vedy, matematiku, spoločenské vedy, žurnalistiku a informačné a komunikačné technológie ako bežné predmety kde sú DEER integrované. Aj keď sa únikové hry využívajú na rôznych úrovniach vzdelávania, podľa uvedenej štúdie sa najčastejšie používajú v rámci vysokoškolského vzdelávania.

S rastúcimi požiadavkami na pedagógov sa stáva kontinuálny profesionálny rozvoj učiteľov čoraz dôležitejším. Vzdelávacie únikové hry ponúkajú nový prístup na zapojenie účastníkov do zmysluplných vzdelávacích zážitkov, ktoré podporujú spoluprácu, riešenie problémov a kritické myslenie (Veldkamp et al., 2020). Preto majú veľký potenciál na integráciu do celoživotného vzdelávania učiteľov z praxe.

## Použité vzdelávacie únikové miestnosti

V rámci našej pracovnej dielne sme učiteľom predstavili dve konkrétne aplikácie digitálnych vzdelávacích únikových hier zameraných na matematiku. Jedna bola textová verzia únikovej hry vytvorená pomocou Google Forms (Vankúš, n.d.). Táto úniková miestnosť s názvom *Útek z hradu* bola tvorená sériou matematických problémov, spojených príbehom. Pre postup v rámci hry bolo potrebné zadať riešenie problémov, pričom účastníci dostali okamžitú spätnú väzbu o jeho správnosti. Náhľad zobrazenia jedného problému predstavuje Obrázok 1.


*Obrázok 1: ukážka problému v rámci únikovej miestnosti v Google Forms*

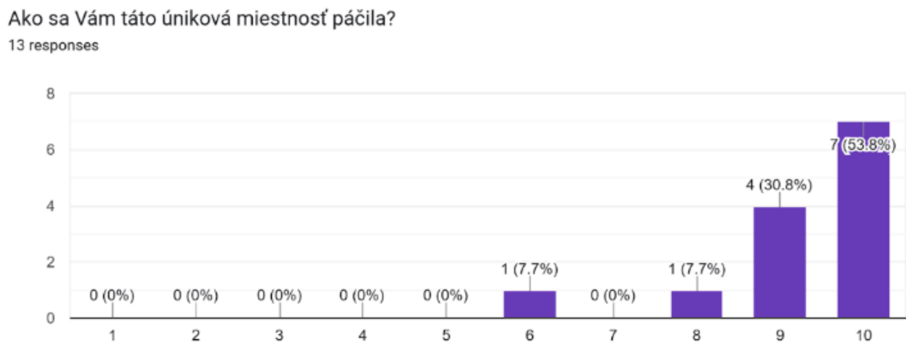
Druhá vzdelávacia úniková miestnosť bola vytvorená pomocou nástroja Room Escape Maker (Dddaaadddooo, n.d.). Vytvorili ju študenti učiteľstva matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky v rámci online nástroja Room Escape Maker https://roomescapemaker.com/. Túto únikovú hru možno charakterizovať ako interaktívnu adventúrnu hru. Proces vytvárania tejto únikovej hry sme opísali v našej predchádzajúcej publikácii (Čujdíková & Vankúš, 2023). Hra vyžaduje použitie viacerých interaktívnych prvkov, ako sú nožnice, kladivo a kľúče k zámkom. Úniková hra obsahuje dva kódové zámky, kde heslo získame číselnými operáciami s údajmi nájdenými počas hry. Pri tom sú používané matematické znalosti z oblasti číselných sústav, hľadanie koreňov kvadratických rovníc a základné aritmetické operácie. Zobrazenie jednej obrazovky tejto únikovej miestnosti ponúka Obrázok 2.

*Obrázok 2: náhľad obrazovky únikovej miestnosti v Room Escape Maker*

### Reakcie účastníkov

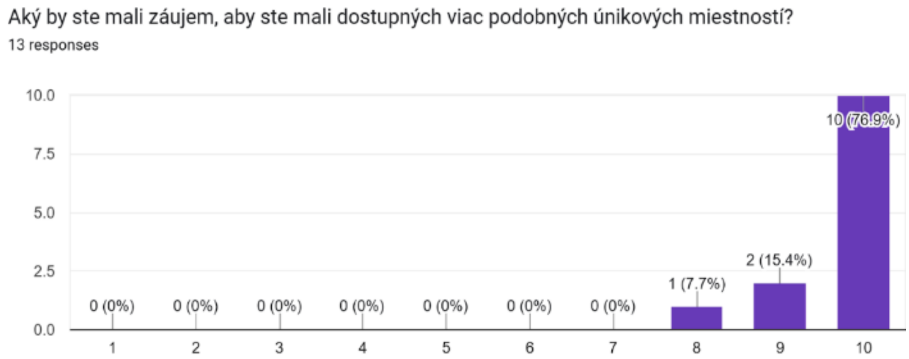
Na základe pozorovania reakcií účastníkov pracovnej dielne a rozhovorov s nimi môžeme konštatovať, že ich obe vzdelávacie únikové hry zaujali. Prejavili pozitívne emócie pri správnom riešení jednotlivých úloh a postupe v hre. Vyjadrili ochotu použiť prezentované únikové miestnosti vo svojom vyučovaní.

Spätnú väzbu na vzdelávaciu únikovú hru *Útek z hradu* sme zisťovali tiež prostredníctvom dotazníka v rámci Google Forms. Vzhľadom na výpadok internetu sa žiaľ niektorým účastníkom druhú vzdelávaciu únikovú hru nepodarilo dohrať a z tohto dôvodu sme nevyhodnocovali dotazník týkajúci sa tejto hry. Získané výsledky dotazníkového prieskumu týkajúce sa únikovej hry *Útek z hradu* zobrazujú nasledujúce obrázky: Obrázok 3, Obrázok 4 a Obrázok 5.




*Obrázok 3: odpovede na otázku „Ako sa Vám táto úniková miestnosť páčila?"*


*Obrázok 4: odpovede na otázku „Považujete túto únikovú miestnosť za vhodnú pre žiakov?"*




*Obrázok 5: odpovede na otázku „Aký by ste mali záujem, aby ste mali dostupných viac podobných únikových miestností?"*

## Záver

Na záver môžeme konštatovať, že vzdelávacie únikové hry majú potenciál byť nástrojom na podporu aktívneho a pútavého učenia sa. Ich využitie v pedagogickej praxi prináša nové možnosti, ako motivovať žiakov a rozvíjať ich kritické myslenie, spoluprácu a schopnosti riešiť problémy. Učitelia, ktorí sa zúčastnili na našich aktivitách, vyjadrili nadšenie z tejto formy vzdelávania a prejavili ochotu ju aplikovať vo svojej praxi. Únikové hry sa ukazujú ako potencionálny inovatívny spôsob, ako v školách vytvárať inšpiratívne učebné prostredie a zvyšovať angažovanosť žiakov. Veríme, že vzdelávacie únikové hry budú čoraz viac nachádzať svoje miesto vo vzdelávaní a prinesú pozitívne výsledky pre všetkých zúčastnených.

LITERATÚRA

[1] Čujdíková, M., Vankúš, P.: Design of an Educational Escape Room by Future Teachers, Košice-Proceedings of the 17th European Conference on Games Based Learning, 2023, https://doi.org/10.34190/ecgbl.17.1.1624

[2] Dddaaadddooo.: ROOM ESCAPE MAKER, online, https://roomescapemaker.com/u/terezkajesuper

[4] Fotaris, P., Mastoras, T.: Escape rooms for learning: A systematic review, Proceedings of the 13th European Conference on Games Based Learning, 2019, https://doi.org/10.34190/GBL.19.179

[5] Fotaris, P., Mastoras, T.: Room2Educ8: A Framework for Creating Educational Escape Rooms Based on Design Thinking Principles, Education Sciences, 2022, https://doi.org/10.3390/educsci12110768

[6] Manzano-León, A., Rodríguez-Ferrer, J.M., Aguilar-Parra, J.M., Martínez Martínez, A.M., Luque de la Rosa, A., Salguero García, D., Fernández Campoy, J.M.: Escape Rooms as a Learning Strategy for Special Education Master's Degree Students,

International Journal of Environmental Research and Public Health, 2021, https://doi.org/10.3390/ijerph18147304

[7] Nicholson, S.: Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities, 2015, White Paper available at http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

[8] Taraldsen, L.H., Haara, F.O., Lysne, M.S., Jensen, P.R., Jenssen, E.S.: A review on use of escape rooms in education – Touching the void, Education Inquiry, 2022, https://doi.org/10.1080/20004508.2020.1860284

[8] Vankúš, P.: Vzdelávacia úniková miestnosť: Útek z hradu, online, https://www.comae.sk/kega037UK_4_2024/aktivity.html

[6] Veldkamp, A., van de Grint, L., Knippels, M.-C.P.J., van Joolingen, W.R.: Escape Education: A Systematic Review on Escape Rooms in Education, Educational Research Review, 2020, https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100364

[7] Videnovik, M., Vold, T., Dimova, G., Kiønig, L.V., Trajkovik, V.: Migration of an Escape Room-Style Educational Game to an Online Environment: Design Thinking Methodology, JMIR serious games, 2022, https://doi.org/10.2196/32095

[8] Vygotsky, L.S.: Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes, Cambridge-Harvard University Press, 1978.

*PaedDr. Peter Vankúš, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk*

*Mgr. Mária Čujdíková, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: maria.cujdikova@fmph.uniba.sk*

# VYUČOVANIE PODMIENENEJ PRAVDEPODOBNOSTI

PETER VANKÚŠ, MICHAELA VARGOVÁ

**ABSTRAKT.** *Ako vyučovať podmienenú pravdepodobnosť? V príspevku predstavíme program pracovnej dielne zameranej na tri spôsoby vizualizácie riešenia úloh z podmienenej pravdepodobnosti. Uvedieme tiež názory účastníkov na to, ktorý z prezentovaných spôsobov vizualizácie preferujú.*

## Úvod

V našom príspevku predstavíme skúsenosti z pracovnej diele zameranej na prístupy k riešeniu úloh z podmienenej pravdepodobnosti z pohľadu učiteľov matematiky. Pracovná dielňa sa konala na konferencii Dva dni s didaktikou matematiky, ktorú v dňoch 5. a 6. septembra 2024 organizovalo Oddelenie didaktiky matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Zúčastnilo sa jej 12 učiteliek a učiteľov matematiky.

Pri riešení úloh z podmienenej pravdepodobnosti môžu vhodné prístupy, ako je vizualizácia situácie, uľahčiť žiakom prácu (Batanero & Álvarez-Arroyo, 2024). Počas pracovnej dielne sme učiteľom a učiteľkám predstavili tri prístupy na riešenie zadaných úloh: 1) znázornenie pomocou početností výskytov (Vargas, et al., 2019), 2) vizualizácia pomocou jednotkového štvorca (Böcherer-Linder & Eichler, 2019) a 3) vizualizácia situácie pomocou stromového grafu. Z dôvodu obmedzeného priestoru ilustrujeme tieto prístupy na jednej vybranej úlohe, pričom na pracovnej dielni sme ich využili aj pri riešení ďalších piatich úloh z podmienenej pravdepodobnosti.

## Úloha o taxíkoch

Úloha, na ktorej budeme ilustrovať jednotlivé prístupy, je upravenou verziou známej úlohy z podmienenej pravdepodobnosti o taxíkoch (Tversky & Kahneman, 1980). Predstavíme ju v podobe, v akej sme ju použili na pracovnej dielni.

*V meste sú dve taxislužby. Jedna má 85 zelených áut, druhá 15 modrých áut. Počas hmlistého večera jazdili všetky taxíky. Jeden zrazil mladého muža. Ten neskôr vypovedal, že taxík bol modrý. Polícia overila, nakoľko je muž schopný rozoznať farbu v podobných podmienkach, ako boli v ten večer. Zistila, že farbu dokáže určiť správne v 75% prípadov. Aká je pravdepodobnosť, že muž bol naozaj zrazený modrým taxíkom?*

Po odprezentovaní zadania úlohy sme prítomným učiteľkám a učiteľom predstavili tri prístupy, ktoré sme charakterizovali v úvodnej časti nášho príspevku. Pre názornosť si ich uvedieme.

Uvažované javy označíme v ďalších častiach textu nasledovne: $Z$ – muža zrazil zelený taxík; $M$ – muža zrazil modrý taxík; $V_Z$ – muž videl farbu taxíka, ktorý ho zrazil, ako zelenú; $V_M$ – muž videl farbu taxíka, ktorý ho zrazil, ako modrú.

## Vizualizácia pomocou početností výskytov

Predstavme si, že je daných taxíkov 10 000 (pri takomto počte sa počas riešenia vyhneme zlomkom). Máme teda 8500 zelených áut a 1500 modrých áut. Muž vypovedá, že ho zrazil modrý taxík v 25 % prípadoch zrazenia zeleným taxíkom. To zodpovedá početnosti výskytov 0,25 · 8500 = 2125. Takto tiež vypovedá v 75 % prípadov zrazenia modrým taxíkom, čo zodpovedá početnosti výskytov 0,75 · 1500 = 1125. Muž teda vypovedá, že ho zrazil modrý taxík v 3250 (2125 + 1125) prípadoch. Z toho ho v skutočnosti zrazil modrý taxík v 1125 prípadoch, hľadaná pravdepodobnosť je preto 1125/3250, t.j. cca 0,35. Vizualizácia danej situácie je znázornená v Tabuľke 1.

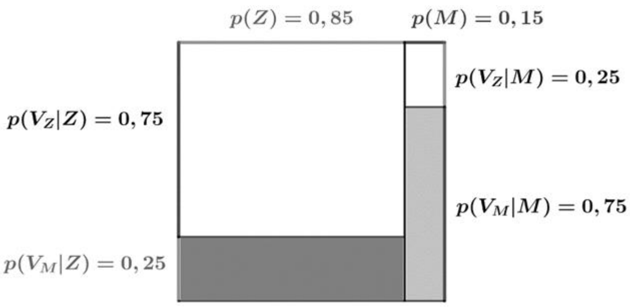
| | $V_Z$ | $V_M$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | $\lvert Z \cap V_Z \rvert = 0{,}75 \cdot 8\,500 = 6\,375$ | $\lvert Z \cap V_M \rvert = 0{,}25 \cdot 8\,500 = 2125$ | 8 500 |
| $M$ | $\lvert M \cap V_Z \rvert = 0{,}25 \cdot 1\,500 = 375$ | $\lvert M \cap V_M \rvert = 0{,}75 \cdot 1\,500 = 1\,125$ | 1 500 |
| $\sum$ | 6 750 | 3 250 | $\lvert \omega \rvert = 10\,000$ |

*Tabuľka 1: vizualizácia úlohy tabuľkou početností výskytov*

## Vizualizácia pomocou jednotkového štvorca

Nech obsah štvorca so stranou dĺžky jedna zodpovedá celému uvažovanému pravdepodobnostnému priestoru Ω. Dĺžky úsečiek, vyznačených na vodorovnej strane uvažovaného štvorca rôznymi odtieňmi sivej farby, zodpovedajú pravdepodobnostiam $p(Z)$, $p(M)$. Dĺžky úsečiek, vyznačených na zvislých stranách štvorca, zodpovedajú podmieneným pravdepodobnostiam, napr. $p(V_Z|Z)$, označujúcej pravdepodobnosť javu, že muž videl zelený taxík za predpokladu, že ho naozaj zrazil zelený taxík.

Keďže chceme zistiť pravdepodobnosť javu $p(M|V_M)$, že muža zrazil modrý taxík za predpokladu, že videl modrý taxík, stačí nám zistiť hodnotu pomeru $p(M|V_M) = \frac{p(M \cap V_M)}{p(V_M)}$. Hodnote pravdepodobnosti $p(M \cap V_M)$ v uvažovanej reprezentácii zodpovedá obsah obdĺžnika, vyznačeného svetlejším odtieňom sivej farby a hodnotu pravdepodobnosti $p(V_M)$ predstavuje súčet obsahov oboch sivo vyfarbených obdĺžnikov. Pre hľadanú pravdepodobnosť tak dostávame $p(M|V_M) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}75}{0{,}15 \cdot 0{,}75 + 0{,}85 \cdot 0{,}25} \approx 0{,}35$. Opisovanú situáciu vizualizuje Obrázok 1.




*Obrázok 1: vizualizácia úlohy pomocou jednotkového štvorca*

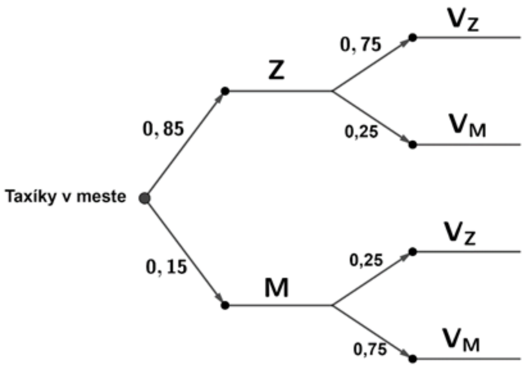
**Vizualizácia situácie pomocou stromových grafov**

Stromový diagram umožňuje znázorniť uvažované javy pomocou bodov (uzlov) v hierarchicky usporiadaných úrovniach. Body v prvej úrovni zodpovedajú javom, označených písmenami $Z$, $M$, pričom pravdepodobnosti $p(Z)$, $p(M)$ týchto javov sú umiestnené pri zodpovedajúcich vetveniach.

Body v druhej úrovni zodpovedajú javom $Z \cap V_Z$, $Z \cap V_M$, $M \cap V_Z$, $M \cap V_M$, pričom pravdepodobnosti týchto javov predstavujú súčin vyznačených pravdepodobností na zodpovedajúcej vetve, napr. $p(M \cap V_M) = p(M) \cdot p(V_M|M) = 0{,}15 \cdot 0{,}75$.

Pre hľadanú pravdepodobnosť tak opäť dostávame $p(M|V_M) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}75}{0{,}15 \cdot 0{,}75 + 0{,}85 \cdot 0{,}25} \approx 0{,}35$.

Vizualizáciu pomocou stromového grafu znázorňuje Obrázok 2.




*Obrázok 2: vizualizácia situácie pomocou stromového grafu*

## Záver

Po predstavení uvedených prístupov na úlohe o taxíkoch učiteľky a učitelia mali možnosť aplikovať ich pri riešení ďalších piatich úloh z podmienenej pravdepodobnosti. Po tejto aktivite sme zisťovali ich názory ohľadom vzťahu k jednotlivým prístupom vizualizácie a tiež ich preferencie ohľadom ich použitia pri vyučovaní žiakov. Zistili sme, že na škále od 1 (pozitívny vzťah) do 5 (negatívny vzťah) stredná hodnota v prípade vizualizácie pomocou početnosti výskytov bola po zaokrúhlení 1,33. V prípade vizualizácie pomocou jednotkového štvorca bola 1,42. V prípade vizualizácie pomocou stromového grafu bola 1,83. Pri vyučovaní svojich žiakov 8 učiteliek a učiteľov preferuje vizualizáciu pomocou početnosti výskytov, 8 vizualizáciu pomocou jednotkového štvorca a 7 vizualizáciu pomocou stromového grafu. V tejto otázka sa dalo označiť viacero položiek, pričom jednou z nich bol aj Bayesov vzorec, ktorý označili dvaja učitelia. Názory učiteľov naznačujú, že ilustrované prístupy učiteľov zaujali a majú záujem ich aplikovať vo vyučovaní matematiky.


## Grantová podpora

Článok bol podporený z projektu KEGA 076UK-4/2024: Implementácia metódy Challenge-based education v neformálnom vzdelávaní.

## Literatúra


[1] Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R.: *Teaching and learning of probability*, ZDM Mathematics Education, 2024, DOI: 10.1007/s11858-023-01511-5

[2] Böcherer-Linder, K., Eichler, A.: *How to Improve Performance in Bayesian Inference Tasks: A Comparison of Five Visualizations*, Frontiers in Psychology, 2019, DOI: 10.3389/fpsyg.2019.00267

[3] Tversky, A., Kahneman, D.: *Causal schemas in judgments under uncertainty*, Hillsdale-NJ, Erlbaum, 1980

[4] Vargas, F., Benincasa, T., Cian, G., Martignon, L.: *Fostering Probabilistic Reasoning Away from Fallacies: Natural Information Formats and Interaction between School Levels*, International Electronic Journal of Mathematics Education, 2019, DOI: 10.29333/iejme/5716



*PaedDr. Peter Vankúš, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk*

*Mgr. Michaela Vargová, PhD.*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*SK – 842 48 Bratislava*
*e-mail: michaela.vargova@fmph.uniba.sk*

# VIZUALIZÁCIA RIEŠENIA LINEÁRNYCH ROVNÍC

ZUZANA VÁŽNA

***ABSTRAKT.*** *Téma riešenia lineárnych rovníc zohráva kľúčovú úlohu vo vzdelávaní žiakov stredných škôl, pretože predstavuje základný koncept v matematike s významnými aplikáciami v mnohých ďalších vedných odboroch. Tento príspevok sa zameriava na využitie vizualizácie ako účinného nástroja na výučbu a pochopenie lineárnych rovníc na stredných školách.*

## Lineárne rovnice

Lineárne rovnice s jednou neznámou sú najčastejším typom rovníc. Lineárne rovnice predstavujú veľmi jednoduchý model, umožňujúci matematizáciu viacerých situácií každodenného života. Aj z tohto dôvodu je potrebné vedieť s nimi pracovať, chápať spôsoby ich riešenia a dôjsť k správnemu výsledku. V súčasnosti sa skôr zdôrazňuje venovať pozornosť správnemu zavedeniu premennej v učive ZŠ, aby sa predchádzalo formálnym poznatkom a aby žiaci tento pojem pochopili.

Niektorý žiaci v riešení rovníc a nerovníc sú neúspešní. Dôvodom sú problémy s porozumením viacerých konceptov ZŠ matematiky. Cieľom je podporiť porozumenie pojmu neznámej pomocou vizuálnych reprezentácií.

### Lineárna rovnica

Ak *f*, *g* sú funkcie a $M \subset R$ je neprázdna množina, tak úlohu nájsť všetky hodnoty $x \in M$, pre ktoré platí $f(x) = g(x)$ nazývame rovnica s neznámou *x* a symbolicky zapisujeme

$$\boldsymbol{f(x) = g(x), x \in M.}$$

Výrazy $f(x)$a $g(\ x\ )$ sa nazývajú **ľavá a pravá strana rovnice**, množina $M \cap D(f) \cap D(g)$ sa nazýva **definičný obor rovnice**. Informáciu „$x \in M$" v zápise vynecháme, ak množinou *M* je množina všetkých hodnôt $x$, ktoré možno dosadiť do obidvoch strán rovnice, t.j. $M = D(f) \cap D(g)$. Množina všetkých $x \in M$, pre ktoré platí $f(x) = g(x)$ sa nazýva **množina všetkých riešení/ koreňov rovnice**, každý prvok tejto množiny je **riešenie / koreň rovnice**.

Lineárna rovnica s neznámou *x* je rovnica, ktorú možno zapísať v tvare $ax + b = 0$, kde *a*, *b* sú konštanty. Ak *a* ≠ 0, je jediným riešením rovnice[1] $ax + b = 0$ číslo $x = -\frac{b}{a}$.

### Úprava rovnice

$f(x) = g(x), x \in M$, sa nazýva

- **ekvivalentná,** ak jej požitím dostaneme rovnicu, ktorá má tú istú množinu koreňov ako pôvodná rovnica, teda platí ekvivalencia $\forall\ a\ \in M$:
  $a\ je\ kore\check{n}\ rovnice\ pr\acute{a}ve\ vtedy, ke\v{d}\ a\ \ je\ kore\check{n}\ novej\ rovnice.$
- **dôsledková**, ak platí implikácia$\forall\ a\ \in M$: Ak *a* je koreň pôvodnej rovnice, tak *a* je koreň novej rovnice.

Teda touto úpravou sa „nestratí" žiadny koreň rovnice, nová rovnica však môže mať korene, ktoré nie sú koreňmi pôvodnej rovnice.

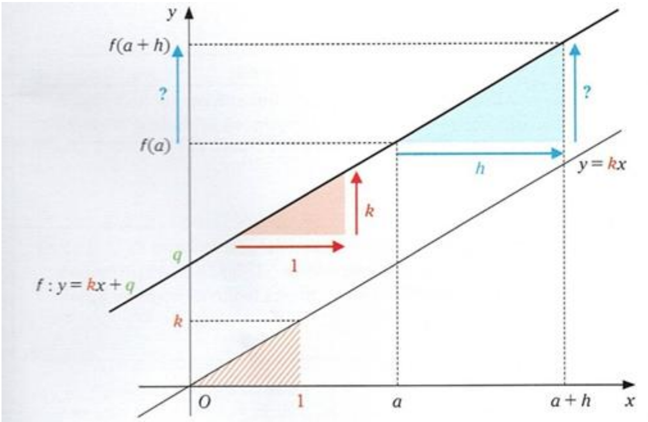
---

[1]Kubáček, Z., Žabka, J. Seminár z matemtiky 1.časť, Mapa Slovakia Plus, s.r.o., 201, ISBN 978-80-8067-309-3
96 s

Špeciálne platí: Ak nová rovnica nemá korene, tak ich nemohla ani mať ani pôvodná rovnica.

Riešeniu lineárnych rovníc graficky predchádzalo zavedenie pojmu lineárna funkcia a jej graf.

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva lineárna, ak jej predpis možno zapísať v tvare $y = kx + q$, kde $k$ a $q$ sú konštanty (ktoré nazývame **koeficienty**). Ak definičný obor lineárnej funkcie je množina $R$ všetkých reálnych čísel, je jej grafom v karteziánskej súradnicovej sústave priamka, ktorá prechádza bodom $[0; q]$. Číslo $k$ sa nazýva smernica tejto priamky. (Kubáček, str 110). Graf lineárnej funkcie $y = kx + q$ vznikne posunutím priamky, ktorá je grafom priamej úmernosti $y = kx$.




*Obrázok 1*

Interpretácia koeficientov $k, q$ v predpise lineárnej funkcie $f: y = kx + q$:

- číslo $q$ určuje priesečník s osou $Oy$,
- číslo $k$ určuje, o koľko sa zmení funkčná hodnota, ak sa hodnota $x$ zväčší o $1$ (pozri červený trojuholník na obrázku).

**Metódy vizualizácie**

Metódy vizualizácie pri riešení lineárnych rovníc sú veľmi užitočné na pochopenie vzťahov medzi premennými a na vizualizáciu riešení týchto rovníc. Existuje niekoľko spôsobov, ako pristupovať k vizualizácii, pričom niektoré sú vhodnejšie pre určitý typ problému alebo úrovne vzdelania. Tu sú rozpracované metódy vizualizácie pomocou stĺpcov, vektorov a žetónov:

**1. Stĺpce (Barové diagramy)**

Barové diagramy (stĺpce) sú vizualizačnou metódou, ktorá pomáha ilustrovať pomery a vzťahy medzi číselnými hodnotami alebo koeficientmi v rovniciach. Táto metóda je veľmi vhodná na riešenie jednoduchších rovníc a na pochopenie základných konceptov rovnosti.

**Použitie:**

- **Jednoduchá rovnica:** Predstavte si rovnica 3x+2=53x + 2 = 53x+2=5. Môžeme si predstaviť 3x3x3x ako výšku jedného stĺpca, 222 ako výšku druhého stĺpca a 555 ako ich súčet.

- **Krok 1:** Nakreslite stĺpec pre každú časť rovnice. Jeden stĺpec bude predstavovať 3x3x3x, druhý 222.
- **Krok 2:** Na druhej strane rovnosti (pravá strana rovnice) nakreslite stĺpec s výškou 555, ktorý reprezentuje výsledok.
- **Krok 3:** Hľadáte výšku jedného dielu xxx tak, aby súčet oboch stĺpcov na ľavej strane bol rovný výške stĺpca na pravej strane.

Tento prístup pomáha vizuálne rozložiť a pochopiť rozdelenie hodnôt v rovnici.

**Výhody:**

- Pomáha s intuitívnym chápaním rovností.
- Umožňuje pracovať s proporciami a súčtami na vizuálnej úrovni.

**2. Vektory**

Vektorová vizualizácia je veľmi užitočná pri riešení sústav lineárnych rovníc alebo pri práci s viacrozmernými priestormi. Každá rovnica je v tomto prípade reprezentovaná ako vektor, ktorý sa môže nakresliť v rovine (pri dvoch premenných) alebo v priestore (pri troch a viac premenných).

**Použitie:**

- **Rovnice s dvoma premennými:** Napríklad pre rovnica x+y=5x + y = 5x+y=5 môžeme zakresliť do roviny vektor (x,y)(x, y)(x,y), kde xxx a yyy sú súradnice, ktoré predstavujú riešenia tejto rovnice.
- **Viacnásobné rovnice:** Každá rovnica je reprezentovaná ako vektor, a riešenie rovnice je prienik týchto vektorov. V priestore sa tieto vektory pretínajú, čím vytvárajú riešenie sústavy lineárnych rovníc.

**Výhody:**

- Dáva jasný geometrický pohľad na riešenie rovníc.
- Je užitočná najmä pri riešení sústav lineárnych rovníc, pretože zobrazuje prienik jednotlivých rovníc.
- Vizuálne ukazuje vzťah medzi premennými v n-rozmerných priestoroch.

**Nevýhody:**

- Môže byť náročná na pochopenie pre začiatočníkov, najmä v kontexte viacrozmerných vektorových priestorov.

**3. Žetóny (alebo vizuálna algebra)**

Žetónová metóda, často používaná v základnej a strednej škole, je vizuálna metóda riešenia lineárnych rovníc pomocou symbolických objektov (napríklad farebných žetónov). Táto metóda sa často používa v spojení s manipuláciou a „fyzickým“ riešením rovníc, najmä pri výučbe mladších žiakov.

**Použitie:**

- **Jednoduché rovnice:** Predstavte si rovnicu 2x+3=72x + 3 = 72x+3=7. Pre xxx môžeme použiť modré žetóny a pre číslo 333 červené žetóny. Na pravej strane rovnice nakreslíme alebo použijeme 7 žetónov.
- **Krok 1:** Na ľavej strane položíme 2 modré žetóny (predstavujúce xxx) a 3 červené žetóny (predstavujúce číslo 333).
- **Krok 2:** Na pravej strane rozložíme 7 červených žetónov.
- **Krok 3:** Cieľom je izolovať modré žetóny na jednej strane (v tomto prípade modré reprezentujú xxx), aby sme našli hodnotu xxx. Postupne odoberáme alebo presúvame žetóny, aby sme dosiahli rovnováhu.

**Výhody:**

- Je veľmi intuitívna pre mladších žiakov, pretože pracuje s vizuálnymi a fyzickými objektmi.
- Pomáha pochopiť proces izolácie premenných v rovniciach.
- Je to interaktívny spôsob učenia, ktorý podporuje manipuláciu s konceptami rovností.

**Nevýhody:**

- Obmedzená na jednoduchšie rovnice a nemusí byť efektívna pre zložitejšie algebraické výrazy alebo viacnásobné premenné.

**Zhrnutie a praktická aplikácia:**

- **Stĺpce** sú vhodné na jednoduché vizuálne rozloženie hodnôt a sú vhodné pre základné rovnice.
- **Vektory** poskytujú geometrický a priestorový pohľad na riešenie rovníc, obzvlášť pri práci so sústavami rovníc.
- **Žetóny** sú vizuálnou a manipulačnou metódou, ktorá je efektívna pre základné rovnice, najmä pre začiatočníkov a deti.

Každá z týchto metód má svoje výhody a využitie podľa úrovne študentov a zložitosti rovníc, ktoré sa riešia. Vďaka vizualizácii sa učí jednoduchšie pochopiť abstraktné algebraické pojmy a mechanizmy.

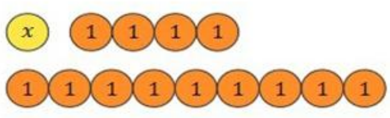
### Metódy vizualizácie pri riešení lineárnych rovníc – žetóny

Pri výučbe matematiky, najmä v nižších ročníkoch základných škôl, je dôležité, aby žiaci pochopili základy algebraických pojmov, ako sú rovnice. Riešenie lineárnych rovníc môže byť pre nich náročné, ak im tieto pojmy nie sú predstavené dostatočne názorne. Jednou z účinných metód, ktorá žiakom pomáha pochopiť princípy riešenia lineárnych rovníc, je metóda **vizualizácie pomocou žetónov**.

### Princíp metódy žetónov

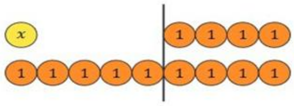
Metóda žetónov umožňuje žiakom vizualizovať rovnice a pochopiť koncept premenných a čísel. Tento postup zahŕňa používanie žetónov (alebo iných vizuálnych prvkov), ktoré reprezentujú premenné (napríklad „x“) a konštanty (čísla). Rovnice sú potom prekladané do vizuálnej formy, ktorá umožňuje ich riešenie postupnými krokmi.

Uvažujme napríklad jednoduchú rovnicu $x + 4 = 9$. Pri jej riešení budeme používať konkrétnu reprezentáciu– žetóny. Pomocou žetónov môžeme uvedenú rovnicu reprezentovať nasledovne:



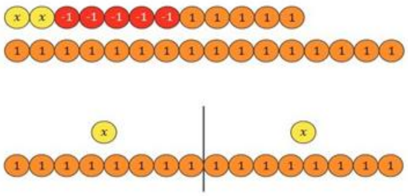

*Obrázok 2*

Riešenie rovnice predstavuje odpoveď na otázku: Za koľko jednotkových žetónov musíme zameniť žltý („*x*-ový“) žetón, aby žetóny v oboch riadkoch predstavovali rovnakú hodnotu (aby sa hodnota v oboch riadkoch rovnala)? Potom môžeme proces riešenia modelovať nasledovne:



*Obrázok 3*

V tomto prípade sa na odstránenie žetónov "$-1$" v hornom riadku použijú „nulové páry“. Žiaci však musia pochopiť, že ak sa horný riadok náhle zvýši o $5$, potom sa musí o $5$ zvýšiť aj dolný riadok, aby sa zachovala rovnosť:



*Obrázok 4:* $2x - 5 = 11$

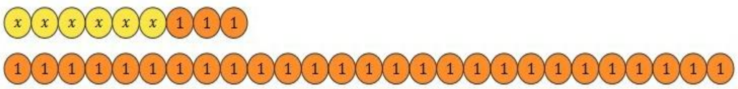
Uvažujme situáciu, vyjadrenú nasledujúcou rovnicou $3(2x + 1) = 27$ (pre jednoduchosť predpokladajme, že $x \in N$)

Symbolicky sa táto rovnica zvyčajne rieši jedným z dvoch spôsobov:

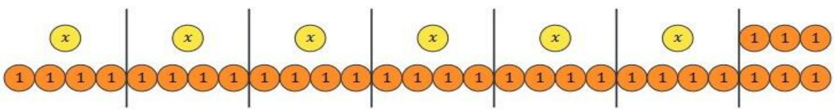
Po roznásobení zátvorky postupujeme rovnako ako pri jednoduchšej lineárnej rovnici.

Najskôr celú rovnicu predelíme číslom 3 a následne riešime získanú rovnicu.

Obrázok 5



Obrázok 6

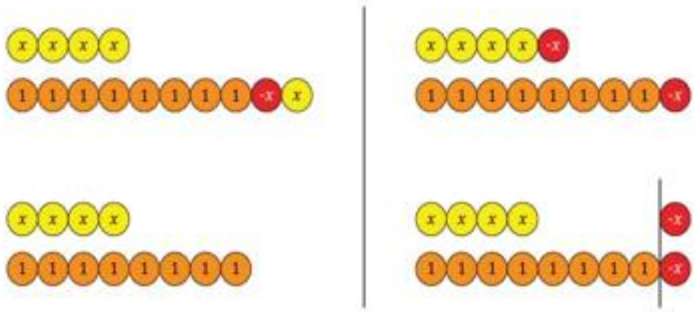


Obrázok 7

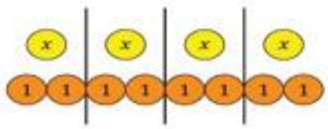
$$3x + 5 = 13 - x$$

Obrázok 8

Obrázok 9



Obrázok 10



Obrázok 11

**Využitie vizualizácie v praxi**

Žetónová metóda je bežne používaná v nižších ročníkoch základných škôl alebo v prípade žiakov SOŠ, ktorí majú problémy s abstraktným chápaním algebraických konceptov. Pomáha pri budovaní intuitívneho pochopenia toho, ako rovnice fungujú, a poskytuje konkrétne nástroje na riešenie matematických problémov. Táto metóda je tiež účinná pre tých, ktorí sa učia pomocou manipulácie s fyzickými objektmi, pretože kombinuje vizuálnu a hmatovú spätnú väzbu.

Pri listovaní dostupnými stredoškolskými učebnicami matematiky je zrejmé, že aj najnovšie publikácie (hoci sú farebnejšie, lesklejšie a estetickejšie) premeškali príležitosť vizualizovať algebrické myšlienky a urobiť ich zjavnými a zrozumiteľnými pre väčšinu žiakov. Vo všeobecnosti študenti považujú algebru za ťažkú, pretože pre mnohých je to súbor abstraktných, neintuitívnych a zahmlených pravidiel.

## LITERATÚRA


[1] **STACY, David A.** *Algebra and Visualization: Modern Methods*. San Francisco: Math Solutions Publications, 2011. ISBN 978-1935099308. [2]

[2] **Novotný, M.: Vizualizácia v matematike pre stredné školy**. Praha: Portál, 2010. ISBN 978-80-7367-687-3.

[3] MATTOCK, P. *Visible Maths, British Library Cataloguing-in-Publication.* British Library Cataloguing-in-Publication Data, 2019. ISBN 978-178583350-2

[4] KUBÁČEK, Z., ŽABKA, J. *Seminár z matemtiky 1.časť*, Mapa Slovakia Plus, s.r.o., 201, ISBN 978-80-8067-309-3



*Ing. Ing. Zuzana Vážna,*
*Škola SPŠE*
*ulica č. Zochova 9*
*811 01 BRATISLAVA*
*e-mail: vazna@zochova.sk*

# KVADRATICKÝ GENERÁTOR

ZUZANA VÁŽNA

***Abstrakt.*** *Kvadratické rovnice a nerovnice sú základom pre ďalšie štúdium algebraických vzťahov na stredných školách a vyžadujú znalosti ako diskriminantu, počítanie koreňov, analyzovanie intervalov a testovanie hodnôt v týchto intervaloch.* ***Generátor kvadratických rovníc a nerovníc*** *je nástroj, ktorý slúži na automatické vytváranie kvadratických rovníc na základe určitých parametrov.*

## Kvadratické rovnice a nerovnice

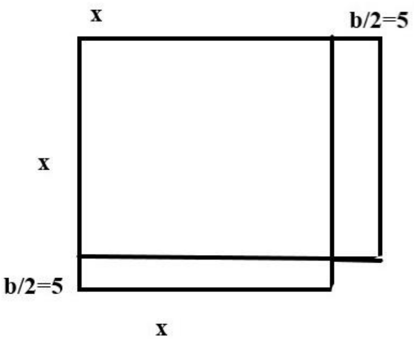
Riešenie kvadratických rovníc s jednou neznámou v stredoškolskej matematike predstavuje podstatné a dôležité rozšírenie učiva o lineárnych rovniciach zo ZŠ. Kvadratické rovnice sa na SOŠ riešia iba v študijných odboroch v druhom ročníku a v prvom ročníku nadstavbového štúdia.

**Kvadratická rovnica** (tiež rovnica druhého stupňa) s neznámou $x$ je rovnica, ktorú možno zapísať v tvare $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$. Výraz $ax^2 + bx + c$, v ktorom $x$ označujeme premennú a $a \neq 0$, sa nazýva kvadratický trojčlen, $\boldsymbol{ax^2}$ je kvadratický člen, $\boldsymbol{bx}$ je lineárny člen a $\boldsymbol{c}$ je absolútny člen[2].

Vzťahy medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice sa nazývajú **Viétove vzťahy.**

Kvadratická rovnica $x^2 + bx + c = 0$ (v tzv. normovanom tvare, t.j. koeficient pri $x^2$ je 1) má korene $x_1$ $a$ $x_2$, práve vtedy, keď platia rovnosti $x_1 + x_2 = -b$ $a$ $x_1 . x_2 = c$. Tieto rovnosti sa nazývajú **Viétove vzťahy** (pre kvadratickú rovnicu).[3]

Rozhodli sme sa ukázať žiakom riešenie kvadratických rovníc úpravou na štvorec. Aby sme žiakom umožnili vytvoriť si názornejšiu predstavu o význame jednotlivých algebraických úprav, inšpirovali sme sa postupom perzkého matematika al – Chorezmiho (9. st.), ktorý riešil niektoré typy kvadratických rovníc geometricky.




Napr. pri riešení rovnice $x^2 + 10x = 39$ znázornil kvadratický člen $x^2$ štvorcom so stranou $x$, lineárny člen $10x$ dvoma obdĺžnikmi so stranami 5 a $x$. Dostal tak útvar, ktorého obsah je 39. Ten doplnil na štvorec. Obsah štvorca vedel, odtiaľ vedel nájsť veľkosť $x$.[4]

Na hodine mali žiaci za úlohu dokončiť al – Chorezmího postup a nájsť $x$. Tento geometrický postup sme riešili aj algebraicky. Výhodou zápisu je, že pomocou neho vieme nájsť aj druhý koreň danej

---

[2] Kubáček, Z., Žabka, J. Seminár z matemtiky 1.časť, Mapa Slovakia Plus, s.r.o., 201, ISBN 978-80-8067-309-3
124 s

[3] Kubáček, Z., Žabka, J. Seminár z matemtiky 1.časť, Mapa Slovakia Plus, s.r.o., 201, ISBN 978-80-8067-309-3
127 s

rovnice (záporný koreň nemôžeme znázorniť ako dĺžku úsečky). Študenti spoločne dospeli k úprave kvadratického trojčlena na úplný štvorec.

$x^2 + 10x = 39$
$x^2 + 2\,.\,5x = 39$
$x^2 + 2\,.\,5x + 25 = 39 + 25$
$(x + 5\,)^2 = 64$
$x + 5 = \pm 8$
$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{3}, x_2 = -13$

Toto je istá séria krokov vedúca k úprave nazývanej doplnenie kvadratického trojčlena na štvorec a zovšeobecnenie predchádzajúceho postupu.

V každom z týchto krokov možno zotrvať aj dlhšie (prerátať viac úloh rovnakého typu) podľa individuálnych potrieb žiaka. Na hodinách študenti prepočítali niekoľko úloh, kde upravovali kvadratický trojčlen na úplný štvorec.

Pri riešení kvadratických nerovníc využívame poznatky z riešenia kvadratických rovníc.

a) Pri riešení kvadratickej nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ môžeme napríklad postupovať tak, že najskôr vyriešime kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ (t.j, nájdeme *x*-ové súradnice priesečníkov paraboly, ktorá je grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$, s osou *x*) a následne načrtneme parabolu. Na základe tejto paraboly a súradníc jej priesečníkov s osou $x$ určíme intervaly, v ktorých parabola leží nad osou $x$.
b) Pri riešení kvadratickej nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ najskôr vyriešime kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ a načrtneme parabolu, ktorá je grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$. Na základe tejto paraboly a súradníc jej priesečníkov s osou $x$ určíme intervaly, na ktorých parabola leží pod osou $x$.
c) Prípadne kvadratické nerovnice upravíme na súčinový tvar a riešime metódou nulových bodov.

### Kvadratický generátor

Študenti tretieho ročníka Katarína Drobná a Juraj Kopičiar odboru umelá inteligencia naprogramovali v programovacom jazyku PYTHON kvadratický generátor na precvičovanie riešenia kvadratických rovníc a nerovnice. Pri precvičovaní kvadratických rovníc je možnosť výberu riešiť úplné a neúplné kvadratické rovnice. Na výber sú aj metódy riešenia kvadratických rovníc s vysvetlením postupu riešenia. Pri riešení kvadratických nerovníc je uvádzaný iba výsledok. Kvadratický generátor je v tom jedinečný, že vygeneruje vždy iné rovnice aj nerovnice. Učiteľ ale žiak má možnosť si tieto rovnice aj vytlačiť. Na výber je slovenská aj anglická verzia. Generátor nájdete na stránke: kvadratickygenerator.zochova.eu.

*Ing. Ing. Zuzana Vážna,*
*Škola SPŠE*
*ulica č. Zochova 9*
*811 01 BRATISLAVA*
*e-mail: vazna@zochova.sk*

# POSTUP ALEBO VÝSLEDOK? VPLYV GEOMETRICKÉHO POZNANIA BUDÚCEHO UČITEĽA NA HODNOTENIE ŽIACKYCH RIEŠENÍ.

DANIELA KOVALČÍKOVÁ

***ABSTRAKT.*** *Vidia budúci učitelia rozdiely v úrovni geometrického myslenia žiakov na základe ich riešení? Analyzujeme opravu 7 žiackych riešení geometrickej úlohy budúcimi učiteľmi matematiky, ktorej cieľom je sformulovať odporúčania pre vzdelávanie budúcich učiteľov matematiky a ďalšie vzdelávanie učiteľov z geometrie.*

## Úvod

Geometria je veľmi dôležitou oblasťou školskej matematiky, ktorá je nevyhnutná k úspešnému zvládnutiu nielen geometrie, ale aj iných oblastí matematiky. Vo výskumoch (napr. Gal a Linchevski, 2010; Özerem, 2012) môžeme nájsť niekoľko dôvodov, prečo majú žiaci problémy s geometriou. Množstvo výskumov poukazuje na vplyv vedomostí učiteľov na učenie sa žiakov (Shulman, 1987; van Dooren a kol., 2002; Carrillo a kol., 2018). Podľa Gal, 2011, hoci matematické vedomosti učiteľov sú zvyčajne primerané, často majú problémy s analýzou, pochopením riešení žiakov a identifikáciou ich ťažkostí.

## Metodológia

### Účastníci a kontext

Výskumu sa zúčastnilo 15 budúcich učiteľov matematiky z UPJŠ v Košiciach v rámci predmetu Seminár k matematickým krúžkom. Triedu tvorilo 6 študentov 2. ročníka a 9 študentov 3. ročníka bakalárskeho stupňa štúdia. Študenti mali absolvované kurzy z prvého ročníka (matematická analýza a algebra), Geometriu I (euklidovská geometria aj axiomatický systém) a Geometriu II (syntetická stereometria – polohové a metrické vlastnosti). Geometriu III (analytická geometria v n-rozmernom priestore) a Geometriu IV (kvadratické plochy, zhodné a podobné zobrazenia) absolvovali len študenti 3. ročníka.

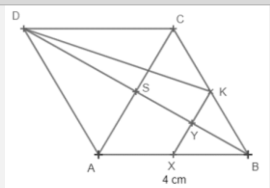
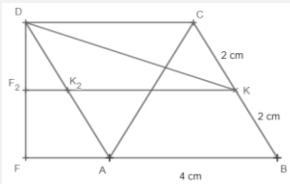
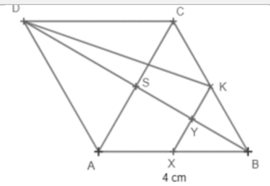
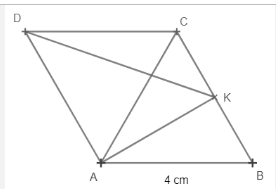
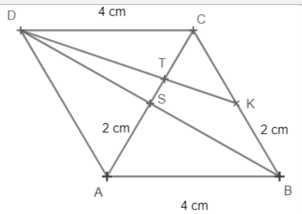
### Výskumný nástroj a zber údajov

Výskumná úloha: *V kosoštvorci ABCD s dĺžkou strany 4 cm a uhlopriečkou AC s dĺžkou 4 cm je bod K stredom strany BC. Ďalej sú zostrojené body L a M, ktoré spolu s bodmi D a K tvoria štvorec KLMD. Vypočítajte plochu štvorca KLMD. (MO-KK-Z9-Růžičková)*

Budúci učitelia mali na jej riešenie 20 minút počas seminára, s možnosťou hľadania viacerých stratégií riešenia. Za domácu úlohu mali následne opraviť 7 žiackych riešení – analyzovať postup riešenia a zhodnotiť ho a riešenia zoradiť od najlepšieho po najhoršie.

S cieľom vybrať rôzne žiacke riešenia sme analyzovali riešenia 70 žiakov z Košického kraja. Správnu stratégiu riešenia použilo 22 žiakov, nesprávnu stratégiu 39 žiakov (20 úlohu narysovalo a odmeralo), 9 žiakov nemalo žiadne riešenie. Vybrané riešenia do výskumného nástroja obsahovali rôzne stratégie riešenia, úroveň komentára, vysvetlenia a zdôvodnenia bola rozdielna. Dve riešenia mali správny výsledok (Adam a Emma), dve mali správne číselné vyjadrenie s iracionálnymi číslami (Daniel a Filip), ale Daniel neurčil hodnotu výrazu a Filip urobil chybu v poslednom kroku a dostal nesprávny výsledok. Cyril pri riešení použil pomerne bežnú stratégiu, ale s nesprávnym tvrdením o výške rovnostranného trojuholníka.

Boris a Gusto použili stratégiu rysovania a merania. Každý zo 7 vybraných žiakov určil čiastkový cieľ úlohy, ktorým je nájsť dĺžku úsečky DK. Všetky správne stratégie aspoň raz použili Pytagorovu vetu. Stručný opis použitých stratégií je uvedený v tabuľke 1.

| Žiak | Popis stratégie | Schéma riešenia | Komentár k riešeniu |
|---|---|---|---|
| **Adam** | **Stratégia $S_{AD}$**<br>- Vlastnosti strednej priečky trojuholníka<br>- Vlastnosti uhlopriečok kosoštvorca<br>- 2x Pytagorova veta |  | Riešenie je bez obrázka. Je dobre odôvodnené, až na vysvetlenie označenia dvoch použitých bodov.<br>Výsledok je správny. |
| **Boris** | **Stratégia $S_{BG}$**<br>Výsledok sa získa meraním dĺžky úsečky KD. | | Riešenie začína pozorovaním invariantných vlastností. Pokračuje narysovaním a odmeraním dĺžky úsečky a jej nesprávnym umocnením. |
| **Cyril** | **Stratégia $S_C$**<br>- Dokreslenie výšky kosoštvorca<br>- Určenie podobných trojuholníkov<br>- Použitie Pytagorovej vety |  | Riešenie obsahuje tvrdenie, že výška rovnostranného trojuholníka je 7/8 jeho strany, čo je pravdepodobne aproximácia skutočnej hodnoty (√3/2). Niektoré z použitých tvrdení neboli jasne vysvetlené. Nesprávny výsledok je kvôli zaokrúhľovaniu pri výpočtoch. |
| **Daniel** | **Stratégia $S_{AD}$**<br>Rovnaká ako Adam |  | Niektoré z použitých výrokov nie sú v riešení jasne vysvetlené.<br>Výsledkom je správne číselné vyjadrenie s iracionálnymi číslami, ktoré nie je upravené. |
| **Emma** | **Stratégia $S_E$**<br>- Výpočet uhlov v trojuholníkoch AKC a AKD<br>- 2x Pytagorova veta |  | Najefektívnejšie riešenie.<br>Je takmer bez akejkoľvek argumentácie, vysvetlenia, prečo sú použité vlastnosti a vzťahy platné.<br>Výsledok je správny. |
| **Filip** | **Stratégia $S_F$**<br>- Vlastnosti uhlopriečok kosoštvorca a strednej priečky rovnostranného trojuholníka<br>- 2x Pytagorova veta |  | Obrázok je len schémou.<br>Použité výroky sú dobre vysvetlené.<br>Číselný výraz obsahujúci iracionálne číslo je v poslednom kroku vypočítaný nesprávne. |
| **Gusto** | **Stratégia $S_{BG}$**<br>Rovnaká ako Boris | | Konštrukčná úloha s odmeraním potrebnej strany a jej umocnením. |

*Tabuľka 2*

## Výsledky

### Riešenie problému zo strany PST

Počas seminára vyriešilo problém 7 PST, ktorých stratégie sú zapísané v tabuľke 2 ($S_H$ je označenie pre stratégiu stredoškolským aparátom). Na začiatku riešenia úlohy PST nakreslili prototypový obrázok kosoštvorca, v ktorom je uhlopriečka AC dlhšia ako BD. Takýto náčrt väčšinou sťažoval objavenie invariantných vlastností potrebných na riešenie úlohy. Diskutovali aj o tom, že v texte úlohy chýbala informácia o orientácii štvorca KLMD, čo svedčilo o tom, že neidentifikovali čiastkový cieľ úlohy – vypočítať dĺžku KD.

### Hodnotenie riešení žiakov zo strany PST

V tabuľke 2 je uvedený prehľad toho, ako PST zoradili riešenia študentov.

| PSTs (ročník) | 1 (3) | 2 (3) | 3 (2) | 4 (2) | 5 (3) | 6 (3) | 7 (2) | 8 (3) | 9 (2) | 10 (3) | 11 (2) | 12 (2) | 13 (3) | 14 (3) | 15 (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | E | D | E | D | D | E | E | D | A | E | A | D | E | E | E |
| **2.** | D | F | D | F | F | G | A | E | D | D | D | A | D | A | A |
| **3.** | A | G | B | A | B | A | D | F | E | F | E | E | G | D | D |
| **4.** | F | B | A | E | G | B | C | A | B | A | B | G | F | G | C |
| **5.** | C | A | G | C | A | D | F | C | G | G | G | B | C | C | F |
| **6.** | G | C | C | B | E | C | B | B | C | B | C | C | A | F | B |
| **7.** | B | E | F | G | C | F | G | G | F | C | F | F | B | B | G |
| **Stratégia PST** | 0 | 0 | 0 | $S_C$ | 0 | $S_E$ | 0 | 0 | $S_E$ | $S_H$ | $S_E$ | $S_C$ | 0 | 0 | $S_E$ |

*Tabuľka 3*

8 PST vybralo Emmino riešenie ako najlepšie. Jej riešenie je ľahko sledovateľné s jasným a veľkým farebným obrázkom. Dôležité body, úsečky a použité uhly sú označené. Riešenie je efektívne a rýchlo vedie k výsledku. Rovnakú stratégiu riešenia použili pri riešení úlohy 4 PST. Na druhej strane Emmino riešenie je takmer bez akejkoľvek argumentácie, vysvetlenia, prečo sú použité vlastnosti a vzťahy platné.

5 PST vyhodnotilo Filipove riešenie ako najhoršie, hoci je v ňom len numerická chyba, ktorej sa Filip dopustil, keď v poslednom kroku zjednodušoval číselný výraz pomocou iracionálneho čísla. Na druhej strane Danielovo riešenie, v ktorom sa číselný výraz s iracionálnym číslom nepočíta, vyhodnotilo ako najlepšie 5 PST. Žiadny z učiteľov neumiestnil Filipa na prvé miesto. Všetci učitelia hodnotili Daniela lepšie ako Filipa.

10 PST zaradilo aspoň jedno riešenie s použitím merania (Boris a Gusto) vyššie ako niektoré z deduktívnych riešení, hoci s nesprávnym výsledkom v dôsledku numerickej chyby (Filip) alebo zaokrúhľovania pri výpočtoch (Cyril) (vyznačené červenou farbou). Dvaja z nich (PST 2 a 5) zaradili tieto riešenia vyššie ako Adamovo riešenie, ktoré je deduktívnym riešením bez explicitne nakresleného obrázka so správnym výsledkom a správnou argumentáciou, okrem vysvetlenia označenia dvoch bodov. 5 PST zaradilo tieto riešenia vyššie ako Filipovo riešenie, čo je deduktívne riešenie so správnou argumentáciou, ale nesprávnym výsledkom v dôsledku nesprávneho výpočtu.

## Záver

V tejto štúdii nás zaujímalo najmä to, ako PST hodnotili riešenia žiakov so správnymi aj nesprávnymi výsledkami a ako hodnotili rôzne metódy riešenia.

Viac ako polovica PST vybrala Emmino riešenie ako najlepšie, napriek chýbajúcej argumentácii. V prípade iných riešení, ktoré používali menej častú stratégiu, PST niekedy kritizovali nedostatočné zdôvodnenie, ale v Eminom prípade to väčšine z nich nevadilo. To vyvoláva otázku: Uvedomujú si PST potrebu zdôvodnenia a odôvodnenia, alebo ho považujú za potrebné len na uľahčenie pochopenia riešenia?

Ako už bolo uvedené, 5 PST hodnotilo Filipove riešenie ako najhoršie. Prekvapujúce je, že PST 12 umiestnil Filipove riešenie na posledné miesto a Danielovo na prvé, hoci Filipove riešenie je lepšie zdôvodnené a má len jednu numerickú chybu v poslednom kroku a Daniel numerický výraz vôbec nevypočítal. Myslíme si, že existujú 3 možné dôvody takéhoto zlého hodnotenia Filipovho riešenia: (1) Jeho obrázok nie je presným vizuálnym zobrazením situácie, ale schémou, ktorá má požadované vlastnosti, hoci vyzerá inak. (2) Použitý spôsob riešenia bol zriedkavý a tým nepochopený (použili ho len 2 žiaci zo 70 a žiadny PST). (3) V porovnaní s ostatnými riešeniami sa výsledok najviac líši od správneho výsledku. Na druhej strane niektorí PST ocenili Filipovo riešenie.

Naše zistenia týkajúce sa hodnotenia Borisovho a Gustovho riešenia tiež naznačili, že mnohí PST v tejto štúdii nevideli rozdiel medzi riešeniami využívajúcimi meranie a riešeniami využívajúcimi deduktívne uvažovanie. Hoci sa žiadny z PST nepokúsil vyriešiť úlohu pomocou merania, mnohí z nich zaradili riešenie s výsledkom blízkym očakávanému výsledku, hoci získanému meraním, vyššie ako správne deduktívne uvažovanie. To vyvoláva otázku: Chápu PST, že meranie je proces odhadu a že iba výpočet založený na správnom deduktívnom uvažovaní vedie k presnému výsledku?

Vo všeobecnosti PST často opisovali žiacke riešenie, namiesto toho, aby hodnotili riešenie. Keď hodnotili, často sa zameriavali na vizuálnu stránku alebo celkovú čitateľnosť riešenia. Správnosť výsledku mala pomerne veľký vplyv na ich hodnotenie.

Výsledky nášho výskumu poukázali na problémy, ktorým musíme čeliť pri profesionálnom rozvoji PST počas posledných dvoch rokov ich vysokoškolského štúdia. Ukázali, že PST neuplatnili v praxi niektoré matematické vedomosti, ktoré museli preukázať počas vzdelávania v geometrii, čo poukazuje na druhú diskontinuitu pri prechode od vzdelávania k praxi. Domnievame sa, že jedným zo spôsobov, ako to prekonať, je zaradenie úloh orientovaných na učiteľa, ako to navrhujú viaceré štúdie (napr. Eichler a Isaev, 2023). Taktiež si myslíme, že zaradenie otvorených matematických úloh, ako sú úlohy s viacerými stratégiami, úlohy s viacerými výsledkami a investigatívne úlohy, ako navrhujú Klein & Leikin (2020), do prípravy na geometriu, by mohlo pomôcť prekonať niektoré zo zistených problémov. Samozrejme, v tejto oblasti je potrebný ďalší výskum.

LITERATÚRA

[1] Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

[2] Eichler, A., & Isaev, V. (2023). Improving Prospective Teachers' Beliefs About a Double Discontinuity Between School Mathematics and University Mathematics. Journal für Mathematik-Didaktik, 44, 117–142. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00206-w

[3] Gal, H. (2011). From Another Perspective-training teachers to cope with problematic learning situations in geometry. Educational Studies in Mathematics, 78, 183–203. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9321-6

[4] Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Educational Studies in Mathematics, 74, 163–183. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9232-y

[5] Klein, S., & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel?. Educational Studies in Mathematics, 105, 349–365. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y

[6] Özerem, A. (2012). Misconceptions In Geometry And Suggested Solutions For Seventh Grade Students. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 55, 720-729. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.557

[7] Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1–22.

[8] van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 319–351. https://doi.org/10.2307/4149957



*Mgr. Daniela Kovalčíková*
*Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach*
*Jesenná 5*
*040 01 Košice*
*e-mail: daniela.kovalcikova@student.upjs.sk*

**Dva dni s didaktikou matematiky 2024. Zborník príspevkov.**

| | |
|---|---|
| Editor: | Mária Slavíčková |
| Počet strán: | 114 |
| Vydala: | Fakulta matematiky, fyziky a informatiky |
| | Univerzita Komenského v Bratislave |
| Miesto vydania: | Bratislava |
| Rok vydania: | 2024 |

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

*ISBN 978-80-8147-154-4*
*EAN 9788081471544*