Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Mgr. Barbora Candráková

Autoreferát dizertačnej práce

Colourings and 2-factors of class 2 regular graphs

(Farbenia a 2-faktory regulárnych grafov druhej triedy)

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiæ doctor
v odbore doktorandského štúdia: 9.2.1. informatika

Bratislava 2015

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre informatiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: Mgr. Barbora Candráková
Katedra informatiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: Prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Katedra informatiky FMFI UK
Bratislava

Oponenti: ....

....

....

....

....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa .... o ....
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia
vymenovanou predsedom odborovej komisie dňa ....

v študijnom odbore 9.2.1. informatika

na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, ...

Predseda odborovej komisie:
Prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

1 Úvod

Mnohé otázky v teórii grafov sú sústredené okolo *snarkov*, čo sú bezmostové kubické grafy, ktoré sa nedajú hranovo zafarbiť tromi farbami. Medzi snáď najznámejšie otázky patrí hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami od Szekeresa [39] a Seymoura [38] alebo Tutteova hypotéza o 5-toku [40], pričom oba problémy sa dajú redukovať na snarky [16, 25]. S cieľom priblížiť sa k riešeniu týchto problémov sa skúmajú rôzne aspekty snarkov, z ktorých sa my v predkladanej práci venujeme cirkulárnym hranovým farbeniam a štrukturálnym vlastnostiam 2-faktorov. Tieto oblasti sa navzájom prelínajú, ako možno vidieť napríklad z ekvivalentného tvrdenia Vety o štyroch farbách – každý planárny bezmostový kubický graf má 2-faktor, ktorý obsahuje iba párne kružnice.

Cirkulárne hranové farbenie je zovšeobecnením hranového farbenia. Ako farby hrán sa používajú reálne čísla, pričom farby každých dvoch susedných hrán sa musia líšiť aspoň o jedna. Najmenšie číslo, pre ktoré existuje cirkulárne hranové farbenie, sa nazýva cirkulárny chromatický index. Na jednej strane sa cirkulárne hranové farbenia grafov spájajú s dlhodobo otvorenými problémami, ale takisto sa na ne dajú redukovať aj niektoré rozvrhovacie problémy. Problém reprezentujeme grafom tak, aby nájdenie optimálneho rozvrhu zodpovedalo nájdeniu optimálneho cirkulárneho zafarbenia. Príkladom takého problému je Open shop rozvrhovací problém z [33], kde bolo ukázané, že každý periodický rozvrh grafu G sa dá priamo previesť na cirkulárne farbenie daného grafu, a naopak.

Podľa Vizingovej vety môžeme grafy rozdeliť do dvoch skupín – *grafy prvej triedy* sú grafy s chromatickým indexom rovným maximálnemu stupňu grafu, a *grafy druhej triedy* sú grafy s chromatickým indexom o jedna väčším ako je maximálny stupeň grafu. Cirkulárne hranové farbenie je zaujímavé iba pre grafy druhej triedy, nakoľko pre grafy prvej triedy je toto farbenie totožné s hranovým farbením. Pri grafoch druhej triedy treba namiesto dvoch hodnôt indexu brať do úvahy celý spojitý interval hodnôt.

Cirkulárne hranové farbenia kubických grafov sú predmetom intenzívneho skúmania (napr. [1, 11, 10, 12, 22, 32]). Podľa [1], cirkulárny chromatický index bezmostového kubického grafu leží v intervale $[3, 3+2/3]$. Lukoťka a Mazák [29] ukázali, že pre každé dané racionálne číslo r také, že $3 < r < 3 + 1/3$, existuje nekonečná trieda kubických grafov s cirkulárnym chromatickým indexom r. Podľa tej istej práce sú takisto známe kubické grafy s cirkulárnym chromatickým indexom r pre nekonečne veľa hodnôt r takých, že $3+1/3 < r < 3+2/3$, ale globálna situácia v tomto intervale je stále otvorená.

Pre regulárne grafy vyššieho stupňa autori v [43] ohraničili cirkulárny chromatický index grafov, ktoré vzniknú karteziánskym súčinom regulárneho grafu a nepárnej kružnice. Nedávno, Lin, Wong, a Zhu [28] ukázali, že pre každé nepárne prirodzené číslo $k \geq 5$ existuje k-regulárny graf s cirkulárnym chromatickým indexom rovným ľubovolnému racionálnemu číslu r takému, že $k < r < k + 1/4$. Napriek tomu zostáva otázne, ako vyzerá množina všetkých možných hodnôt cirkulárnych chromatických indexov pre k-regulárne grafy. V predkladanej práci rozšírime túto množinu o nové hodnoty.

Minimálny počet nepárnych cyklov v 2-faktore snarku G je jedným z parametrov, ktorý vyjadruje, ako ďaleko je od 3-zafarbiteľnosti daný graf G. Tento parameter sa nazýva *nepárnosť* a označuje sa ako $\omega(G)$. Mnohé problémy redukovateľné na snarky sú vyriešené pre snarky s nízkou nepárnosťou [19, 17, 18]. Lukoťka a spol. [31] skúmali aký malý môže byť kubický graf s danou nepárnosťou a vyslovili hypotézu, že každý hranovo 2-súvislý kubický graf s nepárnosťou $\omega(G)$ má aspoň $7{,}5 \cdot \omega(G) - 5$ vrcholov. Táto hranica sa nadobúda pre $\omega(G) \equiv 2 \pmod 4$. V práci odhadneme, koľko vrcholov musí mať bezmostový kubický graf s danou nepárnosťou.

Existuje viacero problémov, kde sa skúma detailnejšia štruktúra kružníc v 2-faktoroch kubických grafov druhej triedy (napr. [4, 26]). V mnohých kontextoch sa vieme ľahko vysporiadať s kružnicami dĺžky 2, 3, a 4 pomocou štandardných redukcií [42], ale existujúce techniky poskytujú obmedzené výsledky pre grafy s 2-faktormi, ktoré obsahujú kružnice dĺžky 5, narozdiel od grafov bez nich. Bolo dokázané [8], že Petersenov graf je jediný kubický graf, ktorý má iba kružnice dĺžky 5 vo všetkých svojich 2-faktoroch. Takisto bolo dokázané, že každý iný kubický graf s aspoň 8 vrcholmi má 2-faktor s kružnicou dĺžky aspoň 7 (viď [27]). V predkladanej práci sa preto budeme zaoberať otázkou, koľko kružníc dĺžky 5 sa môže vyskytovať v 2-faktoroch kubických grafov.

Cyklové pokrytie grafu $G = (V, E)$ je množina *cyklov* grafu G takých, že každá hrana grafu sa nachádza aspoň v jednom cykle z danej množiny. (Pod pojmom *cyklus* rozumieme graf, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa.) Ak hrana grafu G je most, tak neleží na žiadnom cykle, a preto z pohľadu cyklových pokrytí sú zaujímave iba bezmostové grafy. *Dĺžka cyklového pokrytia* je suma všetkých dĺžok cyklov v cyklovom pokrytí. V tejto práci nás zaujímajú také cyklové pokrytia, ktorých dĺžka je čo možno najkratšia. Alon a Tarsi vyslovili hypotézu (hypotéza o krátkom pokrytí cyklami), že dĺžka najkratšieho pokrytia cyklami každého bezmostového grafu s m hranami je najviac $1{,}4m$. Tento horný odhad dĺžky cyklového pokrytia sa nedá vylepšiť, pretože je tesný pre Petersenov graf, ktorý má cyklové pokrytie dĺžky 21 pozostávajúce zo 4 cyklov.

Hypotéza o krátkom pokrytí cyklami súvisí s mnohými ďalšími známymi hypotézami, ako je napríklad ukázané v [21], vyplýva z nej hypotéza o dvojitom pokrytí cyklami. Jamshy, Raspaud, a Tarsi [20] ukázali, že grafy s nikde nulovým 5-tokom, čo sú podľa Tutteovej hypotéze o 5-toku všetky bezmostové grafy, majú cyklové pokrytie dĺžky najviac $1{,}6m$ (tento výsledok sa dá rozšíriť aj na matroidy). Máčajová a spol. [35] ukázali, že z existencie Fano-toku, ktorý používa najviac 5 priamok Fanovej roviny, na bezmostových kubických grafoch vyplýva existencia cyklového pokrytia dĺžky najviac $1,6m$ a z existencie Fano-toku, ktorý používa najviac 4 priamky Fanovej roviny, na bezmostových kubických grafoch (čo je dôsledkom Fulkersonovej hypotézy) vyplýva existencia cyklového pokrytia dĺžky najviac $14/9 \cdot m \approx 1{,}556m$.

Najlepší známy všeobecný výsledok pre krátke pokrytia cyklami dokázali Alon a Tarsi [2] a Bermond, Jackson, a Jaeger [3], ktorí ukázali, že každý bezmostový graf s m hranami má cyklové pokrytie dĺžky najviac $5m/3$. Na druhej strane, existuje mnoho výsledkov pre špeciálne triedy grafov. Odkazujeme čitateľa na monografiu Zhanga [44], kde je celá kapitola venovaná krátkym pokrytiam cyklami. Veľa pozornosti sa venuje kubickým grafom, keďže hocijaký výsledok o krátkych pokrytiach cyklami pre subkubické alebo váhované kubické grafy sa dá rozšíriť pre všeobecné grafy. Doteraz najlepší výsledok pre kubické grafy je vďaka Kaiserovi a spol. [23], ktorí dokázali, že pre každý bezmostový kubický graf s m hranami existuje cyklové pokrytie dĺžky najviac $34m/21 \approx 1{,}619m$, a pre každý bezmostový graf s minimálnym stupňom 3 existuje cyklové pokrytie dĺžky najviac $44m/27 \approx 1{,}630m$. Hlavným problémom, ktorý nedovoľuje vylepšenie tohto výsledku, sú kružnice dĺžky 5 nachádzajúce sa v grafe. Naozaj, Hou a Zhang [15] dokázali, že ak G je bezmostový kubický graf, ktorý má všetky kružnice dĺžky 5 disjunktné, tak G má cyklové pokrytie dĺžky najviac $351/225 \cdot m \approx 1{,}6044m$. Navyše, ak G neobsahuje žiadne kružnice dĺžky 5, potom dĺžka cyklového pokrytia je najviac $1{,}6m$. V práci vylepšíme odhad na dĺžku cyklového pokrytia pre bezmostové kubický grafy.

Problém obchodného cestujúceho (*POC*) je jednou z najviac skúmaných oblastí v informatike i kombinatorickej optimalizácii. Pre danú množinu bodov a vzdialenosti medzi každou dvojicou bodov treba nájsť najkratšiu cestu, ktorá navštívi každý bod práve raz, a ktorá skončí v začiatočnom bode. O tomto probléme sa veľmi dobre vie, že je NP-ťažký. Takisto je NP-ťažké aproximovať ho pomerom lepším ako 220/219 [36]. Prirodzené obmedzenie na POC je požiadavka, aby vzdialenosti medzi bodmi spĺňali trojuholníkovú nerovnosť. Takýto problém nazývame *metrický POC*. Christofides [6] ukázal, že je možné aproximovať metrický POC s pomerom 1,5 v polynomickom čase.

Mnohé ďalšie variácie tohto problému sú predmetom rozsiahleho výskumu, ako napr. euklidovský POC, $(1,2)$-POC alebo grafový POC. Z posledne spomenutých, *grafový POC* vyžaduje nájsť čo najkratší uzavretý sled, ktorý obsahuje všetky vrcholy neováhovaného grafu. Daný sled nazývame *POC sled*. Mömke a Svensson [34] našli 1,461-aproximačný algoritmus pre grafový POC. V dizertačnej práci budeme skúmať také inštancie grafového POC, kde graf je jednoduchý kubický a bezmostový. Pretože každý most musí byť použitý dvakrát v ľubovolnom uzavretom slede, POC na kubických grafoch s mostami sa dá redukovať na POC na subkubických grafoch. Boyd a spol. [5] dokázali, že súvislý subkubický graf na n vrcholoch má POC sled dĺžky najviac $4/3 \cdot n - 2/3$, čo je tesný odhad, dokonca aj keď daný graf je kubický multigraf – vieme ľahko pozmeniť konštrukciu grafov, ktoré nadobúdajú hranicu $4/3 \cdot n - 2/3$ z [5], tak, aby sa použili multihrany, ktoré môžu simulovať dva za sebou idúce vrcholy stupňa 2. Preto, ak chceme ďalej vylepšiť tento výsledok, musíme uvažovať jednoduché kubické grafy.

Boyd a spol. [5] dokázali, že každý jednoduchý bezmostový kubický graf s n vrcholmi má POC sled dĺžky najviac $4/3 \cdot n - 2$, ak $n \geq 6$. Correa, Larré, a Soto [7] vylepšili tento výsledok na $(4/3 - 1/61236) \cdot n$. Ak sa ďalej obmedzíme iba na bipartitné kubické grafy, tak dostaneme TSP sled dĺžky najviac $9/7 \cdot n - 2$, ako ukázali Karp a Ravi [24].

2 Hlavné výsledky práce

2.1 Cirkulárne hranové farbenia regulárnych grafov

Skonštruovali sme nekonečné triedy grafov s cirkulárnym chromatickým indexom patriacim do intervalu $(k, k+1/3)$ pre každé $k \geq 4$. Tento výsledok je zaujímavý hlavne pre párne hodnoty k, keďže Lin, Wong, a Zhu [28] poskytli konštrukciu iba pre nepárne hodnoty k. Naša konštrukcia dáva nové hodnoty cirkulárneho chromatického indexu, pričom hodnoty sú blízko k číslu k, napr. $k + 1/(3m+n)$, ako i blízko k číslu $k + 1/3$, napr. $k + a/(3a+1)$.

Veta 1. *Pre všetky prirodzené čísla $k \geq 4$, $a \in \{1, 2, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, a $m, n \geq 1$ existuje k-regulárny graf s cirkulárnym chromatickým indexom $k + \dfrac{a}{(2a+1)m + an}$.*

Prirodzené čísla $2a+1, 2(2a+1), \ldots, a(2a+1)$ predstavujú všetky zvyškové triedy modulo a, preto sa všetky prirodzené čísla väčšie ako $2a^2 + a$ dajú vyjadriť ako $(2a + 1)m + an$ pre vhodné $m, n \geq 1$.

Dôsledok 2. *Pre všetky prirodzené čísla $k \geq 4$, $a \in \{1, 2, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, a $p \geq 2a^2+a+1$ existuje k-regulárny graf s cirkulárnym chromatickým indexom $k + a/p$.*

2.2 Vyhýbanie sa krátkym kružniciam v 2-faktoroch kubických grafov

Použili sme polyhedrálne metódy na skúmanie počtu kružníc dĺžky 5 v 2-faktoroch kubických grafov a dokázali sme nasledovnú vetu.

Veta 3. *Nech G je hranovo 2-súvislý kubický graf iný ako Petersenov graf. Potom G má 2-faktor F taký, že*

1. *G/F je hranovo 5-nepárno-súvislý,*
2. *$I(F, G) \leq 1/10 \cdot |V(G)| + 1/3 \cdot |\mathcal{P}_2(G)| + 1/10 \cdot |\mathcal{P}_3(G)| + 2/15 \cdot |\mathcal{P}^*_{2m}(F, G)|$,*

kde $I(F, G)$ je počet kružníc dĺžky 5 v 2-faktore F.

Symboly $\mathcal{P}_2(G)$, $\mathcal{P}_3(G)$ a $\mathcal{P}^*_{2m}(F, G)$ označujú špeciálne množiny podgrafov grafu G, ktoré vzniknú z Petersenovho grafu. Ďalej sme tento výsledok použili na dokázanie nasledovnej vety.

Veta 4. *Nech G je hranovo 2-súvislý kubický graf iný ako Petersenov graf. Potom G má 2-faktor s nanajvýš $2(n - 2)/15$ kružnicami dĺžky 5 a bez trojuholníkov. Existuje nekonečná trieda grafov, pre ktorú je táto hranica tesná.*

Ako dôsledky Vety 3 dostaneme nasledovné dva výsledky.

Dôsledok 5. *Nech G je cyklicky hranovo 3-súvislý kubický graf na n vrcholoch iný ako Petersenov graf. Potom G má 2-faktor s nanajvýš $n/9$ kružnicami dĺžky 5.*

Dôsledok 6. *Nech G je cyklicky hranovo 4-súvislý kubický graf na n vrcholoch iný ako Petersenov graf. Potom G má 2-faktor s nanajvýš $n/10$ kružnicami dĺžky 5.*

Rovnakú metódu sme použili na dokázanie nasledovnej vety.

Veta 7. *Každý bezmostový kubický graf G iný ako Petersenov graf má aspoň $5{,}8\overline{3} \cdot \omega(G)$ vrcholov.*

Tento výsledok vylepšuje doteraz najlepší známy odhad $5{,}41 \cdot \omega(G)$ z [31].

Všetky 2-faktory zo znení viet sa dajú získať pomocou ľubovolného algoritmu na hľadanie perfektného párenia s minimálnou váhou.

2.3 Krátke cyklové pokrytia kubických grafov

Podarilo sa nám vylepšiť metódu, ktorá bola použitá v práci [23], a spolu s metódou na vyhýbanie sa kružniciam dĺžky 5 v 2-faktoroch kubických grafov sme vylepšili horný odhad na dĺžku najkratšieho cyklového pokrytia kubických bezmostových grafov.

Veta 8. *Každý bezmostový kubický graf G s m hranami má cyklové pokrytie dĺžky najviac $1{,}6m$.*

Vďaka našej technike môžeme tento výsledok vyjadriť aj za pomoci počtu kružníc dĺžky 5, ktoré sa nachádzajú v grafe. Týmto sa nám podarilo vylepšiť výsledky Houa a Zhanga [15].

Veta 9. *Každý bezmostový kubický graf G s m hranami a nanajvýš k kružnicami dĺžky* 5 *má cyklové pokrytie dĺžky najviac* $14/9 \cdot m + 1/9 \cdot k$.

Dôsledok 10. *Každý bezmostový kubický graf G s m hranami, ktorý má všetky kružnice dĺžky* 5 *disjunktné, má cyklové pokrytie dĺžky najviac* $212/135 \cdot m \approx 1{,}570m$.

Dôsledok 11. *Každý bezmostový kubický graf G s m hranami, ktorý neobsahuje žiadne kružnice dĺžky* 5*, má cyklové pokrytie dĺžky najviac* $14/9 \cdot m \approx 1{,}556m$.

2.4 Problém obchodného cestujúceho na kubických grafoch

Na grafový POC sme taktiež použili polyhedrálne metódy a dokázali sme nasledovný výsledok.

Veta 12. *Nech G je jednoduchý súvislý bezmostový kubický graf s $n \geq 8$ vrcholmi. Potom G má POC sled dĺžky najviac* $1{,}3 \cdot n - 2$.

Dôkaz tohto tvrdenia je konštruktívny, pričom samotný POC sled sa dá skonštruovať v polynomickom čase, čím dostaneme 1,3-aproximačný algoritmus pre grafový POC.

3 Zoznam použitej literatúry

[1] Afshani, P., Ghandehari, M., Ghandehari, M., Hatami, H., Tusserkani, R., and Zhu, X. Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3. *J. Graph Theory 49*, 4 (2005), 325–335.

[2] Alon, N., and Tarsi, M. Covering multigraphs by simple circuits. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods 6*, 3 (1985), 345–350.

[3] Bermond, J. C., Jackson, B., and Jaeger, F. Shortest coverings of graphs with cycles. *J. Combin. Theory Ser. B 35*, 3 (1983), 297–308.

[4] Boyd, S., Iwata, S., and Takazawa, K. Finding 2-factors closer to tsp tours in cubic graphs. *SIAM J. Discrete Math. 27*, 2 (2013), 918–939.

[5] Boyd, S., Sitters, R., van der Ster, S., and Stougie, L. The traveling salesman problem on cubic and subcubic graphs. *Mathematical Programming 144*, 1-2 (2014), 227–245.

[6] Christofides, N. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

[7] Correa, J. R., Larré, O., and Soto, J. A. Tsp tours in cubic graphs: Beyond 4/3.

[8] DeVos, M. Petersen graph conjecture - not too hard. `http://garden.irmacs.sfu.ca/?q=op/petersen_graph_conjecture`, 2007.

[9] Edmonds, J. Maximum matching and a polyhedron with $0,1$ vertices. *J. of Res. the Nat. Bureau of Standards 69 B* (1965), 125–130.

[10] Ghebleh, M. The circular chromatic index of goldberg snarks. *Discrete Mathematics 307*, 24 (2007), 3220 – 3225.

[11] Ghebleh, M. Circular chromatic index of generalized Blanuša snarks. *Electron. J. Combin. 15*, R44 (2008).

[12] Ghebleh, M., Král, D., Norine, S., and Thomas, R. The circular chromatic index of flower snarks. *Electron. J. Combin. 13*, N20 (2006).

[13] Holton, D. A., and Sheehan, J. *The Petersen Graph.* Cambridge Universimaximum matching and a polyhedron with 0 1-vertices bibtexty Press, 1993.

[14] Holyer, I. The np-completeness of some edge-partition problems. *SIAM J. Comput. 10*, 4 (1981), 713–717.

[15] Hou, X., and Zhang, C. Q. A note on shortest cycle covers of cubic graphs. *Journal of Graph Theory 71*, 2 (2012), 123–127.

[16] Huck, A. Reducible configurations for the cycle double cover conjecture. *Discrete Applied Mathematics 99*, 1–3 (2000), 71–90.

[17] Huck, A., and Kochol, M. Five cycle double covers of some cubic graphs. *J. Combin. Theory Ser. B 64*, 1 (1995), 119–125.

[18] Häggkvist, R., and McGuinness, S. Double covers of cubic graphs of oddness 4. *J. Combin. Theory Ser. B 93*, 2 (2005), 251–277.

[19] Jaeger, F. Nowhere-zero flow problems. *L. W. Beinecke, R. J. Wilson (ed.), Selected topics in graph theory 3* (1988), 71–95.

[20] Jamshy, U., Raspaud, A., and Tarsi, M. Short circuit covers for regular matroids with a nowhere zero 5-flow. *J. Combin. Theory Ser. B 43*, 3 (1987), 354–357.

[21] Jamshy, U., and Tarsi, M. Short cycle covers and the cycle double cover conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B 56*, 2 (1992), 197–204.

[22] Kaiser, T., Král, D., and Škrekovski, R. A revival of the girth conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B 92*, 1 (2004), 41–53.

[23] Kaiser, T., Král, D., Lidický, B., Nejedlý, P., and Šámal, R. Short cycle covers of graphs with minimum degree three. *SIAM J. Discrete Math. 24*, 1 (2010), 330–355.

[24] Karp, J., and Ravi, R. A 9/7-approximation algorithm for graphic tsp in cubic bipartite graphs.

[25] Kochol, M. Smallest counterexample to the 5-flow conjecture has girth at least eleven. *J. Combin. Theory Ser. B 100*, 4 (2010), 381–389.

[26] Král, D., Máčajová, E., Mazák, J., and Sereni, J.-S. Circular edge-colorings of cubic graphs with girth six. *J. Combin. Theory Ser. B 100*, 4 (2010), 351–358.

[27] Kündgen, A., and Richter, R. On 2-factors with long cycles in cubic graphs. *Ars Mathematica Contemporanea 4*, 1 (2010), 79–93.

[28] Lin, C., Wong, T.-L., and Zhu, X. Circular chromatic indices of regular graphs. *J. Graph Theory* (2013).

[29] Lukoťka, R., and Mazák, J. Cubic graphs with given circular chromatic index. *SIAM J. Discrete Math. 24* (2010), 1091–1103.

[30] Lukoťka, R., Máčajová, E., Mazák, J., and Škoviera, M. Circuits of length 5 in 2-factors of cubic graphs. *Discrete Mathematics 312*, 14 (2012), 2131–2134. Special Issue: The Sixth Cracow Conference on Graph Theory, Zgorzelisko 2010.

[31] Lukoťka, R., Máčajová, E., Mazák, J., and Škoviera, M. Small snarks with large oddness. *Electron. J. Combin. 22*, 1 (2015).

[32] Mazák, J. Circular chromatic index of type 1 Blanuša snarks. *J. Graph Theory 59*, 2 (2008), 89–96.

[33] Modarres, M., and Ghandehari, M. Applying circular coloring to open shop scheduling. *Scientia Iranica 15*, 5 (2008), 652–660.

[34] Moemke, T., and Svensson, O. Approximating graphic tsp by matchings. In *Proceedings of the 2011 IEEE 52Nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Washington, DC, USA, 2011), FOCS '11, IEEE Computer Society, pp. 560–569.

[35] Máčajová, E., Raspaud, A., Tarsi, M., and Zhu, X. Short cycle covers of graphs and nowhere-zero flows. *J. Graph Theory 68*, 4 (2011), 340–348.

[36] Papadimitriou, C. H., and Vempala, S. On the approximability of the traveling salesman problem. *Combinatorica 26*, 1 (2006), 101–120.

[37] Petersen, J. Die theorie der regulären graphen. *Acta Math. 15* (1891), 193–200.

[38] Seymour, P. Sums of circuits. *Graph Theory and related topics (J.A. Bondy and U.S.R Murty, eds.) 6* (1979), 341–355.

[39] Szekeres, G. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society 8*, 03 (1973), 367–387.

[40] Tutte, W. T. A contribution on the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math. 6* (1954), 80–91.

[41] V. V. Mkrtchyan, S. S. P. Petersen graph conjecture. `http://garden.irmacs.sfu.ca/?q=op/petersen_graph_conjecture`, 2007.

[42] Watkins, J. J., and Wilson, R. J. A survey of snarks. *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Y. Alavi et al. (eds.) 2* (1991), 1129–1144.

[43] West, D. B., and Zhu, X. Circular chromatic index of Cartesian products of graphs. *J. Graph Theory 57*, 1 (2008), 7–18.

[44] Zhang, C. Q. *Integer flows and cycle covers of graphs.* CRC Press, 1997.

[45] Zhu, X. Circular chromatic number: a survey. *Discrete Mathematics 229*, 1-3 (2001), 371–410.

4 Zoznam publikovaných prác autora so vzťahom ku skúmanej problematike

[1] Candráková, B., and Lukoťka, R. Avoiding 5-circuits in 2-factors of cubic graphs. *zaslané na publikovanie* (2014).

[2] Candráková, B., and Lukoťka, R. Cubic TSP - a 1.3-approximation. *rukopis* (2015).

[3] Candráková, B., and Lukoťka, R. Short cycle covers on cubic graphs using 2-factors avoiding 5-circuits. *rukopis* (2015).

[4] Candráková, B., and Máčajová, E. The circular chromatic index of k-regular graphs. In *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, J. Nešetřil and M. Pellegrini, Eds., vol. 16 of *CRM Series*. Scuola Normale Superiore, 2013, pp. 333–338.

[5] Candráková, B., and Máčajová, E. k-Regular graphs with the circular chromatic index close to k. *Discrete Mathematics 322*, 0 (2014), 19–25.

5 Summary

Many questions in graph theory are centred around *snarks*, which are bridgeless non-3-edge-colourable cubic graphs. In this thesis we concentrate on circular edge-colourings and structural properties of 2-factors.

A *circular edge-colouring* is a generalization of edge-colouring where real numbers are used as colours instead of integers. The colours of edges incident to the same vertex must differ by at least one. The least number r for which there exists such assignment of colours to edges of a graph with all colours at most r is called a *circular chromatic index*. as. The circular edge-colouring is interesting only for *class* 2 *graphs*, which are graphs with the chromatic index equal to their maximum degree plus one. Recently Lin, Wong, and Zhu [28] have shown that for each odd integer $k \geq 5$ there exists a k-regular graph with the circular chromatic index equal to any rational number r such that $k < r < k + 1/4$. We present a construction of infinitely many k-regular graphs with circular chromatic indices belonging to the interval $(k, k + 1/3)$ for any $k \geq 4$.

There are several applications where detailed circuit structure of 2-factors in cubic graphs is studied (e.g. [4, 26]). In many contexts we can deal with the circuits of length 2, 3, and 4 by standard reductions [42]. However, the existing techniques provide limited results for graphs with 2-factors containing circuits of length 5 as opposed to graphs without them. It is therefore natural to ask how many 5-circuits can be avoided in 2-factors of cubic graphs. We show that every cyclically 4-edge-connected cubic graph G has a 2-factor with at most $|V(G)|/10$ circuits of length 5, every cyclically 3-edge-connected cubic graph has a 2-factor with at most $|V(G)|/9$ circuits of length 5, and every 2-edge-connected cubic graph G has a 2-factor with at most $2(n-2)/15$ circuits of length 5. The last bound is sharp as we show by constructing an infinite family of graphs attaining the bound.

A *cycle cover* of a graph $G = (V, E)$ is a collection of *cycles* in G such that each edge of the graph is contained in at least one of the cycles. (By the term *cycle* we understand a graph with all vertices of even degree.) We are interested in finding cycle covers such that their length is as small as possible. Alon and Tarsi conjectured (short cycle cover conjecture) that the length of the shortest cycle cover of every bridgeless graph on m edges is at most $1.4m$. The best result for cubic graphs up to date is by Kaiser et al. [23]. They proved that there exist a cycle cover of length at most $34m/21 \approx 1.619m$ for each bridgeless cubic graph. We improve this bound to $1.6m$.

Graphic TSP asks to find a closed tour as short as possible such that it contains all vertices of an unweighted graph. We call such tour *travelling salesman tour* or *TSP tour* for short. We study instances of graphic TSP, where the graph is simple cubic and bridgeless. Boyd et al. [5] proved, that a simple connected bridgeless cubic graph on n vertices has a TSP tour of length at most $4/3 \cdot n - 2$, provided $n \geq 6$. We prove that a connected bridgeless cubic graph on $n \geq 8$ vertices has a travelling salesman tour of length at most $1.3 \cdot n - 2$. The proof of this result is constructive and the tour can be constructed in polynomial time.