Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mgr. Anton Belan

Autoreferát dizertačnej práce

Potreba dôkazov vo vyučovaní matematiky

na získanie akademického titulu philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia: 9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Bratislava 2017

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia
na Katededre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Predkladateľ: **Mgr. Anton Belan**
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Školiteľ: **Doc. RNDr. Katarína Bachratá, PhD.**
Katedra softvérových technológií
Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina

Oponenti: **…………………………………………**
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………

Obhajoba dizertačnej práce sa koná ……………. o ……… hod
před komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia vymenovanou predsedom odborovej komisie prof. RNDr. Pavlom Zlatošom, CSc.

Vo vednom odbore 9.1.8 Teória vyučovania matematiky

Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Predseda odborovej komisie:
prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Abstrakt

Práca sa zaoberá dôkazmi a dokazovaním vrámci konštruktivistického prístupu k vyučovaniu matematiky. Študuje sa úloha dôkazu vo všetkých fázach vzniku matematického poznatku (motivácia – izolované modely – zovšeobecnenie – univerzálne modely – abstrakcia – kryštalizácia). Skúma sa vzťah ľudí k matematickým dôkazom. Testuje sa schopnosť rozoznať správny a nesprávny dôkaz. Porovnáva sa schopnosť dospelých a detí poradiť si s dôkazom v oblasti logiky. Na základe zistení z tohto výskumu, štúdia historickej motivácie k zavedeniu niektorých pojmov a súčasných prístupov k výuke matematickej analýzy vznikol kurz matematickej analýzy pre vyššie ročníky gymnázia, ktorý si kladie za cieľ nechať čo najviac iniciatívy ohľadom tvorby pojmov, dokazovania a hľadania logických súvislostí na strane študenta. Vytvorenie tohto kurzu je hlavným cieľom tejto práce. U absolventov kurzu sa následne otestovalo porozumenie základným konceptom, vzťah k matematike a prístup k učeniu.

Abstract

The work deals with proofs and proving within a constructivist approach to teaching mathematics. The role of proof is studied at all stages of mathematical knowledge (motivation – isolated models – generalizatio - universal models – abstraction – crystallization). The attitude of people to mathematical proof is studied. The ability to recognize correct and incorrect proof is tested. We compare the ability of adults and children to deal with logical proof. Based on the findings of this research, a study of historical motivation to create some concepts, and current approaches to teaching mathematical analysis, a mathematical analysis course for higher grades of high school has been created, which aims to leave as many initiatives as possible regarding concepts, proving, and searching for logical connections to students. Creating this course is the main goal of this work. Graduates of the course were then tested on their understanding of the basic concepts, their relationship to mathematics, and their attitude to learning.

Úvod

K dôkazom a dokazovaniu v matematike sa učiteľská aj laická verejnosť stavia rôznorodo. Na jednej strane je deklarované, že pozitívny prístup k matematike, ktorý by mal byť výsledkom pedagogickej činnosti je založený na rešpekte k pravde a na vôli hľadať zdôvodnenia a posudzovať ich pravdivosť. Na druhej strane časť verejnosti rovnako ako časť učiteľského stavu nepristupuje k dôkazom ako k prostriedku hľadania pravdy, ale ako k nutnému zlu, ktorého význam im ostáva skrytý. A aj ľudia, ktorí dôkazom istú váhu priznávajú, môžu uprednostňovať prístup k matematike, vrámci ktorého je dôležitejšie získať výsledok, než porozumieť mechanizmu. Preto sme si vytýčili za cieľ preskúmať otázku dokazovania a dôkazov vo vzdelávaní, zistiť aspoň v niektorých konkrétnych prípadoch postoje k dôkazom a schopnosti ľudí dokazovať.

Tieto pozorovania sme využili pri tvorbe konštruktivisticky zameraného kurzu matematickej analýzy pre vyššie ročníky gymnázia. Našim cieľom bolo vytvoriť kurz, ktorý by podporoval samostatnosť žiakov pri vytváraní dôkazov a hľadaní logických súvislostí a túto činnosť im neznechutil, ktorý by zodpovedal na všetky základné otázky, ktoré začiatočníka v odbore môžu trápiť a aspoň naznačil odpovede na zložitejšie z nich, ktorý kladie dôraz na praktické aplikácie a ktorý by bol použiteľný aj ako kurz pre samoukov alebo ako podporný text pre poslucháčov vysokých škôl.

Dôležitým zdrojom, z ktorého sme pri tvorbe nášho kurzu čerpali, bola (okrem získaných skúseností s dôkazmi a dokazovaním) historická genéza niektorých dôležitých pojmov matematickej analýzy a jej reflexia v aktuálne existujúcich kurzoch.

V práci popisujeme štruktúru nášho kurzu, spôsob, akým sú zavádzané nové pojmy a ako na seba naväzujú jednotlivé celky a zaujímavé momenty, ktoré sa udiali počas dvojročného obdobia, keď sme kurz testovali na našich študentoch a ktoré sa spätne stali súčasťou kurzu.

Šruktúra práce je nasledovná:

1.Úvod
- 1.1.Konštruktivizmus
- 1.2.Vznik matematického poznatku
- 1.3.Dôkazy vo vyučovaní – ciele a dokumenty

2.Vnímanie a akceptácia dôkazov
- 2.1.Dôkaz na sociálnej sieti
- 2.2.Veria ľudia dôkazom?
  - 2.2.1.Logika – výsledky v ankete
  - 2.2.2.Logika – výsledky v seminári SEZAM

Dôkazy a konštruktivizmus

V prvej kapitole rozoberáme teoretické východiská. Popisujeme konštruktivizmus a jeho základné myšlienky formulované zakladateľmi. Rozoberáme vznik matematického poznatku podľa Víta a Milana Hejných (Motivácia – Hladina izolovaných modelov – Zovšeobecnenie – Hladina univerzálnych modelov – Abstrakcia – Kryštalizácia) pričom pri každej hladine a hladinovom zdvihu uvádzame konkrétne aplikácie teórie v oblasti dôkazov. Rozoberáme aj možné riziká, ktoré plynú z toho, že niektorá fáza nie je didakticky podchytená. V časti „ciele a dokumenty" sledujeme úlohu, ktorú prikladajú dôkazom a dokazovaniu dôležité didaktické dokumenty na národnej a nadnárodnej úrovni. Za pre nás zvlášť dôležitý považujeme dokument Európskeho parlamentu „Kľúčové kompetencie pre celoživotné vzdelávanie", ktorý vrámci matematických kompetencií *základné* zručnosti definuje takto:

> Jednotlivec by mal mať schopnosť aplikovať v každodennom kontexte doma aj v práci základné matematické princípy a procesy a sledovať a posúdiť reťazec argumentov. Jednotlivec by mal byť schopný matematicky zdôvodňovať, porozumieť matematickému dôkazu a komunikovať v reči matematiky a používať vhodné prostriedky.

a *základné* postoje takto:

> Pozitívny prístup k matematike je založený na rešpekte k pravde a na vôli hľadať zdôvodnenia a posudzovať ich pravdivosť.

To, že sú tieto zručnosti a postoje definované ako základné znamená, že naša pedagogická činnosť by mala smerovať k tomu, aby si ich naši žiaci osvojili.

Vnímanie a akceptácia dôkazov

V druhej kapitole zisťujeme, ako sa darí túto misiu naplniť. Jednak rozoberáme diskusiu, ktorá sa rozbehla na sociálnej sieti 9gag.com, ktorá je venovaná zdieľaniu zábavného obsahu pod animovaným dôkazom Pytagorovej vety. Diskusné príspevky sme roztriedili do kategórií podľa typu reakcie:

- Príspevky, ktoré sa samotnému dôkazu nevenujú (137 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že dôkaz je dobre – často ako reakcia na opačné tvrdenie (69 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že matematický dôkaz nemá na zábavnej stránke čo hľadať (43 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že matematika je hnusná (39 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že dokazovať je zbytočné (30 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že dôkaz je zle (27 ks)
- Príspevky, v ktorých ich autori tvrdia, že tomu nerozumejú (27 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že tento konkrétny dôkaz je škaredý (22 ks)
- Príspevky, v ktorých sa autori tešia, že spoznali Pytagorovu vetu (19 ks)
- Matematicky fundované príspevky (17 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že samotná Pytagorova veta je zbytočná (12 ks)
- Príspevky, v ktorých sa ich autori na niečo pýtajú (10 ks)
- Príspevky, ktoré sa tvária fundovane, ale autori tvrdia nezmysly (8 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, že dôkaz nie je dostatočne rigorózny (7 ks)
- Príspevky, ktoré tvrdia, ilustrácia pomocou štvorcových nádrží s vodou je lepší dôkaz (5 ks)

Spomedzi všetkých účastníkov debaty sa teda o správnosti či nesprávnosti bavila približne tretina. Ďalšia tretina iba vyjadrila negatívnu emóciu (voči matematike, Pytagorovej vete, či tomuto konkrétnemu dôkazu). Z tej tretiny, ktorá sa o dôkaze bavila, približne 25% tvrdilo, že dôkaz je zle alebo iné nezmysly. To naznačuje, že k naplneniu snahy o to, aby sa zručnosti a postoje definované Európskym parlamentom naozaj stali základnými, povedie ešte dlhá cesta.

Ďalšia vec, ktorú sme skúmali, bola, či sú ľudia schopní rozoznať správny dôkaz od nesprávneho. Zostavili sme test obsahujúci 10 dôkazov pokrývajúcich učivo základnej a strednej školy, pričom štyri z týchto dôkazov boli správne a šesť nesprávnych. Medzi správne dôkazy sme zaradili jednoduchý logický dôkaz, konkrétny príklad false positive paradoxu, dôkaz Tálesovej vety a dôkaz, že $0,\overline{9}=1$. (Náročky sme zaradili dve tvrdenia, ktoré odporujú bežnej intuícii.) Medzi nesprávne sme zaradili parafrázu na jeden Descartov dôkaz Božej existencie (na rovnakom princípe sa tam dokazovala existencia mimozemšťanov), naprostú demagógiu ohľadom súčtu číselného radu, dôkaz založený na premise, že korelácia implikuje kauzalitu, inžiniersku indukciu tvrdiacu, že všetky nepárne čísla väčšie ako 1 sú prvočísla, nesprávny dôkaz Pytagorovej vety založený na známom nesprávnom dôkaze, že všetky čísla sa navzájom rovnajú a dôkaz, že klobása s cibuľou je lepšia ako večná blaženosť založený na slovnej hračke. Test nám vyplnilo 354 respondentov. Úspešnosť jednotlivých úloh možno vidieť v tabuľke 1.

Vyhodnotenie poskytlo viacero zaujímavých výsledkov, najprekvapivejšie ale bolo, že

Dôkaz	Správne	Dôkaz je úplne správny	Dôkaz sa mi zdá byť správny	To je ťažká matematika	Dôkaz je asi zle	Dôkaz je zle (bez udania dôvodu)	Dôkaz je zle (nesprávny dôvod)	Dôkaz je zle (správny dôvod)	Správne odhadlo
5. Korelácia	Nie	4,73%	2,21%	3,15%	11,99%	10,09%	17,67%	50,16%	89,91%
6. Inžinierska indukcia	Nie	5,97%	2,20%	3,14%	3,77%	8,49%	0,31%	76,10%	88,68%
7. Tálesova veta	Áno	82,08%	5,66%	5,97%	3,77%	2,52%			87,74%
1. Mimozemšťania	Nie	9,91%	5,11%		8,41%	9,01%	36,34%	31,23%	84,98%
9. Večná blaženosť	Nie	13,78%	3,21%		9,62%	8,65%	16,67%	48,08%	83,01%
3. Súčet radu	Nie	6,67%	2,86%	8,89%	9,84%	6,03%	0,00%	65,71%	81,59%
8. Pytagorova veta	Nie	11,29%	7,42%	12,58%	10,65%	5,48%	11,29%	41,29%	68,71%
10. 0,9999... = 1	Áno	54,29%	13,65%	9,52%	10,79%	11,75%			67,94%
4. AIDS	Áno	51,10%	15,36%	3,45%	9,72%	20,38%			66,46%
2. Dlhý a spol.	Áno	46,18%	7,03%		12,54%	34,25%			53,21%

Tabuľka 1: Výsledky

najhoršie sa umiestnil nie veľmi komplikovaný logický dôkaz. Respondenti vykazovali mnoho chýb, ktoré boli založené na formálnej znalosti problematiky a dokonca sa nepodarilo vylúčiť nulovú hypotézu, že ľudia, ktorí absolvovali matematické vzdelanie dosahujú rovnako zlé výsledky ako ľudia, ktorí ho neabsolvovali. Preto sme rovnakú úlohu zadali aj ako súťažnú úlohu do korešpondenčného seminára SEZAM určeného žiakom základných škôl. Zaujímalo jednak, ako si s úlohou poradia v porovnaní s dospelými, jednak nás zaujímalo, či sú žiaci 5. a 6. ročníkov ZŠ vôbec schopní nejaký dôkaz vytvoriť, pretože Piaget v knihe Judgment and Reasoning in the Child tvrdil, že deti do 11 rokov veku dokazovať nevedia. Ukázalo sa, že žiaci síce dopadli štatisticky horšie, ako respondenti dotazníka, ale vôbec sa im nedarilo zle. Prekvapivo sme nepozorovali takmer žiadnu koreláciu úspešnosti a veku. To, že žiaci nemali žiadne formálne vzdelanie v oblasti logiky im vôbec nebránilo vymyslieť viacero zaujímavých postupov na riešenie úlohy.

Tieto pozorovania nám potvrdili teoretické východiská, že ak sa v postupnosti „Motivácia – Hladina izolovaných modelov – Zovšeobecnenie – Hladina univerzálnych modelov – Abstrakcia – Kryštalizácia“ zanedbá niektorý krok, môže to viesť k strate záujmu a k formálnym poznatkom, ktoré si žiaci pamätajú, ale nerozumejú im a ktoré v niektorých prípadoch môžu byť viac na prekážku, ako na osoh. To bráni jednak v rozvíjaniu pozitívneho vzťahu k matematike, jednak v jej efektívnom použití pri rozhodovaní ohľadom zisťovania pravdivosti či overovania správnosti dôkazu. Pritom v niektorých prípadoch nie je nutné zásobiť žiaka košatou teóriou, ale dá sa spoľahnúť na jeho vlastné sily.

Vyučovanie matematickej analýzy

To, že snaha sprostredkovať študentom formálny aparát bez toho, aby sa podnecovala ich tvorivosť a samostatnosť môže byť niekedy kontraproduktívne, konštatovali Vít a Milan Hejní v spoločnom článku „Prečo je matematika taká ťažká?“. Špeciálne o pojme limity píšu:

> Prvé stretnutie študenta s limitou je rozpačité. Nevie prečo, nevie načo. Učiteľ mu demonštruje to, čo dejiny overili a osnovy predpisujú. On, študent berie na vedomie. Potom príde teória – definícia, veta, dôkaz; jedna, druhá, tretia, … Študent stále nevie načo a prečo. Snaží sa pochopiť, ale márne. Chýba stimulácia, niet modelov ani univerzálnych modelov, niet ani toho prvotného poznania Newtonowho a Leibnitzovho. Začína sa hneď poznaním na druhom poschodí. Študent sa snaží preniknúť do tajov limity, zväčša však bezúspešne. A tak ako jeho mladší priateľ v 1. triede ZDŠ aj on sa obráti na osvedčenú pamäť podopretú o dokonalú sústavu ťahákov. Áno, je pravda, že príde doba, kedy študent pochopí podstatu. Bude to však zásluha príkladov a aplikácii, ktoré aspoň dodatočne vyplnia vákuum modelov a univerzálnych modelov. Málokedy sa však študentovi podarí preniknúť do záhad tak, aby sa sám mohol pustiť do neprebádaných končín. Vie iba imitovať, nevie tvoriť. Je schopný registrovať myšlienky cudzie, ale neverí, že by mohol prispieť myšlienkou vlastnou.

Ako súčasť našej práce sme chceli vytvoriť kurz, ktorý by sa tejto kritike vyhol. Niektoré spôsoby sme už naznačili. Okrem toho sme ale chceli spraviť ďalšie dve veci: Jednak sledovať vznik niektorých pojmov v histórii, aby sme vedeli študentov priviesť k odpovedi na otázku, prečo tie pojmy vlastne vznikli (okrem zmieneného pojmu limity ide najmä o pojem derivácie a integrálu). Okrem toho sme prirodzene chceli zistiť, ako sa s podobnými problémami vyrovnávajú iní autori kurzov matematickej analýzy. Tretia kapitola predstavuje súhrn našich zistení v tejto veci.

V historickom exkurze prejdeme základy diferenciálneho a integrálneho počtu, pričom podrobnejšie spomenieme pojmotvorný proces v prácach Newtona, Leibnitza a Eulera, námietky voči ich prístupu formulované Berkeleym, spor Hobbesa s Wallisom, a ďalšie špecifikovanie pojmov u Lagrangea, Gaussa a nakoniec Cauchyho. Ukážeme, že pojem limity v dnešnej podobe vznikol ako matematicky korektná odpoveď na Berkeleyho kritiku 150 rokov po tom, ako vyšla Newtonova Metóda fluxií, čo ale nijak nebránilo tomu, aby sa počas tých 150 rokov matematická analýza rozvíjala a dosiahla nebývalé úspechy ako matematická disciplína aj ako popisný a vysvetľujúci nástroj pre fyziku a ďalšie prírodné vedy. Týmto samozrejme nechceme tvrdiť, že pojem limity je zbytočný, ale v našom kurze ho zavedieme až potom, ako budú patričné otázky, na ktoré sa snaží odpovedať, nastolené.

Čo sa týka kurzov, ktoré sa používajú v súčasnosti, sledujeme prístupy, ktoré sa používajú na vysokých školách u nás aj v zahraničí. Spomenieme kurz pána Demidoviča, knihy Eliáša, Horvátha a Kajana stále populárne na našich technických vysokých školách, klasický kurz pána Spiwaka, kurz Marsdena a Weinsteina používaný na univerzite v Berkeley a na Caltechu, kurz Zeldoviča a Yagloma určený pre fyzikov a inžinierov, Thompsonov kurz zo začiatku dvadsiateho storočia (ale stále vydávaný) určený pre absolventov stredných škôl, kurz pána Qun Lin, ktorý je vystavaný najmä na geometrickej motivácii, spomenieme prístup neštandardnej analýzy a hyperreálnych čísel reprezentovaný knihou pána Goldblatta určenou matematickej verejnosti a Keislerov kurz pre vysokoškolských študentov, ktorý je na neštandardnej analýze založený. Na záver spomenieme vyložene konštuktivisticky zameraný kurz pánov Dubinského, Schwingendorfa a Mathewsa a nádherný kurz pána Couranta.

Pri každom z týchto kurzov sme sa sústredili najmä na to, ako riešia problém zavedenia limity, či majú klasický rigorózny prístup (a vtedy nás zaujíma, či najprv zaviedli limitu postupnosti alebo limitu funkcie) alebo ak štandardný rigorózny prístup nezvolili, ako sa s problematikou vyrovnali. Teda či zaviedli derivácie bez limít iba pomocou Newton-Leibnitzovskej intuície, či naznačili cestu k limite na niekoľkých modeloch ale otázku nechali otvorenú, alebo či sa s problémom vyrovnali iným spôsobom. Odhliadnuc od týchto detailov nám ale mnohé z týchto kurzov slúžili aj ako vítaná inšpirácia.

Konštuktivistický kurz matematickej analýzy

V štvrtej kapitole popisujeme štruktúru nášho kurzu, motiváciu, ktorá nás viedla k jeho vytvoreniu a niektoré zaujímavé reakcie zo strany študentov. Kurz by mal mať tieto vlastnosti:

- Mal by byť vhodný pre žiakov vyšších ročníkov gymnázia (pre našich žiakov na gymnáziu sme ho písali)

- Mal by byť založený na konštruktivizme. Maximum práce ohľadom objavovania analýzy sme chceli nechať na študentoch.
- Mal by odpovedať na bežné otázky začiatočníkov v oblasti matematickej analýzy
- Mal by obsahovať praktické aplikácie
- Mal by byť použiteľný ako učebnica pre samoukov

V samotnom kurze najprv budujeme intuíciu ohľadom derivácii a integrálov na filmovom zázname hodu tenisovej loptičky pozdĺž meradla a na grafe prevádzky sieťovej karty. V prvom prípade kladieme otázky ohľadom rýchlosti loptičky na určitom snímku či ohľadom toho, na ktorom snímku došlo k najväčšej zmene rýchlosti. V druhom prípade z grafu zisťujeme, aký veľký súbor sa cez sieťovú kartu stiahol. Následne získanú intuíciu upevníme na úlohách, v ktorých je zadaný (ako návod pre sofistikovaný termostat) graf rýchlosti zmeny teploty a študenti majú nakresliť graf toho, ako sa teplota menila, alebo naopak je zadaný graf požadovanej teploty a treba vyrobiť graf inštrukcií pre termostat.

Keď je intuícia aj motivácia dostatočne rozvinutá, vezmeme kvadratickú funkciu, ktorá dostatočne presne popisuje let loptičky zo začiatku kurzu a určujeme jej rýchlosť rastu spôsobom, akým to robili Fermat a Leibnitz. Na základe skúseností s touto funkciou začíname rozvíjať aparát ohľadom derivácií, študenti derivovali x, x^2, x^3, uhádli a dokázali vzťah pre x^n, bola odhalená derivácia súčtu a násobku skalárom, študenti pomaly upúšťajú od počítania z definície a začínajú využívať novonájdené vzťahy, hľadajú sa funkcie, ktoré majú zadanú deriváciu. Po fyzikálnej sa ukáže aj geometrická motivácia derivácie – dotyčnice, rýchlosť rastu štvorca so zväčšujúcou sa stranou. Vypočíta sa obsah pod krivkou $y=x^2$ najprv ako limita integrálneho súčtu (zatiaľ bez zavedenia limity, jednoducho sa uvažuje dostatočne malé dx) potom sa pripomenie vzťah medzi grafom hodnoty a grafom rýchlosti založený na skúsenosti s loptičkou, sieťovou kartou a termostatom, z ktorého vyplynie fundamentálna veta matematickej analýzy. Následne ukážeme študentom ďalšie oblasti, v ktorých získané vedomosti môžu využiť – vypočítajú jednoduché optimalizačné úlohy, príde sa s novým pohľadom na rovnomerne zrýchlený pohyb a jeho dráhu ako integrál rýchlosti, vypočíta sa objem rotačného kužeľa ako integrál a uvidí sa, kde sa v tom vzorci vzala 1/3.

Po ukončení tejto lekcie väčšina študentov vedela derivovať a integrovať polynómy a získala predstavu o tom, že derivácie a integrály sú užitočný nástroj na riešenie novej triedy problémov. Študenti objavili niektoré zaujímavé fyzikálne a geometrické vzťahy a vložili do osvojenia si novej metódy dostatok úsilia na to, aby im bolo ľúto ju len tak opustiť. Tým pádom sa nachádzali v podobnej situácii, v akej boli matematici, keď boli vystavení Berkeleyho kritike. A presne v tomto momente sme ich Berkeleyho kritike vystavili.

Doslovne sme citovali pána Berkeleyho a dali sme mu za pravdu. Ak chceme dx pri výpočte zanedbať, musíme ho položiť nule. Ale ak ho položíme nule, nemôžeme ním krátiť. Úvaha je teda evidentne zle. Napriek tomu sme pomocou tejto nesprávnej úvahy vypočítali mnoho správnych vecí. Nedá sa teda diferenciálny počet ešte nejako zachrániť?

Nasledovala rozprava, v ktorej sa ako univerzálny model použila funkcia $y=x^3$ a na nej sa rozoberalo, čo to presne znamená nájsť deriváciu. Študenti nakoniec ukázali, že sú pre každú chybu $\varepsilon>0$ schopní zvoliť také dx, že sa korektne vypočítaný výraz $\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}$ líši od derivácie o menej ako ε. Neobjavili teda úplne presne definíciu limity, ale v prípade uvedenej funkcie je ich prístup ekvivalentný štandardnému. V každom prípade dozrel čas na to, aby sa s korektnou definíciou limity (a následne korektnou definíciou derivácie zoznámili. Vedia už totiž, načo je limita dobrá a na aké otázky sa snaží odpovedať.

V nasledujúcej časti kurzu rozširujeme okruh funkcií, ktorý sú študenti schopní integrovať a derivovať. Derivovali sme funkcie tvaru x^a pre záporné a (a rovno objavili vzťah pre deriváciu $y=\frac{1}{f(x)}$, našli sme patričný integrálny vzťah $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ a vzápätí sme si uvedomili, že ten vzťah pre $a=-1$ nefunguje. Študenti preto najprv dostali za úlohu vypočítať horný integrálny súčet funkcie $y=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1;2\rangle$ rozdelenom na päť rovnakých úsekov a vypočítať horný integrálny súčet na intervale $\langle 3;6\rangle$ rozdelenom na päť rovnakých úsekov. Prekvapivo zistili, že nie len výsledok, ale aj obsahy jednotlivých obdĺžnikov sú rovnaké (pretože druhé obdĺžniky sú trikrát nižšie, ale trikrát širšie). To viedlo k objavu vlastnosti, $F(a)-F(1)=F(ab)-F(b)$ a pri voľbe $F(1)=0$ ku vzťahu $F(ab)=F(a)+F(b)$ čo stačilo na to, aby sa podarilo ukázať, že sa jedná o logaritmickú funkciu. Bolo zavedené číslo e, ktoré je základom tohto logaritmu a teda číslo s vlastnosťou $F(e)=1$. Študenti zistili jeho približnú hodnotu pomocou integrálnych súčtov funkcie $y=\frac{1}{x}$.

Našli sme derivácie (a integrály) goniometrických funkcií tak, že sme najprv študentov priviedli k tomu, aby odvodili patričné súčtové a súčinové vzorce pre goniometrické funkcie a potom sme ukázali sme, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (použili sme elegantný geometrický Courantov dôkaz).

Zistili sme deriváciu súčinu (a vďaka tomu, že už vieme derivovať $y=\frac{1}{f(x)}$ aj deriváciu podielu). Nájdený vzťah sme využili na odvodenie pravidla integrovania per-partes. Našli sme deriváciu tangensu a kotangensu a integrál z logaritmu.

Na príklade zrýchlenia rakety s motorom, ktorý spaľuje palivo, sme uviedli problematiku zložených funkcií a naučili sme sa ich derivovať (predviedli sme aj názorný Leibnitzov prístup, aj korektný prístup cez limity a mohli zvážiť výhody oboch). Vďaka tomu, že derivácia funkcie zloženej z dvoch navzájom inverzných (teda derivácia x) musí byť 1, sme odvodili deriváciu e^x , $x^{\frac{1}{p}}$ (a následne aj x^a pre všetky racionálne a) a derivácie arkustangensu, arkussínusu a arkuskosínusu. Zintegrovaním vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie sme dostali pravidlo integrácie substitúciou. Pomocou neho sme vypočítali vzťah pre rýchlosť a polohu tej rakety, ktorej zrýchlenie sme zistili, keď sme sa zloženými funkciami začali zaoberať.

Na záver tejto časti kurzu sme zhrnuli všetky doterajšie objavy (aj s číslami úloh, v ktorých sme k nim prišli) do tabuľky vzorcov a vzťahov.

Kurz ďalej pokračoval aplikačnými úlohami na pokročilú optimalizáciu v geometrii (optimalizovať konzervu s daným povrchom), ekonómii (optimalizovať cenu pri danej dopytovej funkcii) či fyzike (Snellov zákon lomu ako dôsledok Fermatovho princípu najmenšieho času) a v na zostavovanie integrálov (práca ako integrál sily po dráhe, ekvivalencia s kinetickou energiou (následný výpočet rýchlosti matice letiacej z praku a druhej kozmickej rýchlosti), rotačné teleso, ťažisko, tlaková sila vody na múr Oravskej priehrady).

Pri výpočte ťažiska sme riešili úlohu, či sa môže ťažisko útvaru pod funkciou $y=x^n$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ nachádzať mimo tohto útvaru. Útvar je totiž nekonvexný a v prípade niektorých nekonvexných útvarov leží ich ťažisko mimo nich. Ťažisko uvedeného útvaru má súradnice $\left[\frac{n+1}{n+2},\frac{n+1}{4n+2}\right]$ a otázka teda znie, či existuje také prirodzené číslo n , že $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n<\frac{n+1}{4n+2}$. Táto úloha sa stala motiváciou ohľadom skúmania limít postupností a radov. Zvlášť nás potešilo, že limita postupnosti na ľavej strane nerovnosti je $\frac{1}{e}$. Ukázali sme, že limita postupnosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ktorú sme podali na základe bankovej motivácie, je to isté e , ako základ prirodzeného logaritmu. Ďalej sme sa zaoberali nekonečnými radmi, odvodili sme Maclaurinov rad a s jeho pomocou našli rady na rýchly výpočet logaritmov, goniometrických funkcií, e a π . Konvergenciu týchto radov sme nerozoberali, ukázali sme ale paradox, ku ktorému môže viesť, ak sa konvergencia nerieši a nechali ho ako motivačný otvorený problém.

Numerickými metódami sme sa zaoberali aj ďalej. Na základe rozprávania Richarda Feynmana o tom, ako súťažil s predavačom abakusov v rýchlom počítaní sme ukázali, na čo je dobrá lineárna aproximácia. Tému sme rozvinuli jednak smerom k Newtonovej dotyčnicovej metóde, jednak k odhadu chyby a aproximáciam vyšších stupňov a Taylorovmu rozvoju.

Záver kurzu je venovaný diferenciálnym rovniciam. Úvodnú motiváciu predstavuje rozpad rádioaktívneho uhlíka, pre ktorý zostavíme diferenciálnu rovnicu a necháme študentom uhádnuť jej riešenie. Riešili sme diferenciálne rovnice najprv hádaním pomocou smerového poľa a Eulerovou metódou (tu sme riešili aj jednu rovnicu druhého rádu popisujúcu kmitanie kocky na vodnej hladine), potom separáciou premenných. Predviedli sme ďalších päť situácií, ktoré popisuje tá istá diferenciálna rovnica, ako rádioaktívny rozpad. Riešili sme neseparovateľné diferenciálne rovnice (motivácia: cenová rovnica) metódou variácie konštanty aj Eulerovou metódou. Riešili sme rovnice druhého rádu pomocou nekonečných radov. Možnosť voľby prvých dvoch členov radu vybudovala intuíciu ohľadom pojmu bázového riešenia. Našli sme bázové riešenia pomocou charakteristickej rovnice. Opäť sme sa vrátili k rovnici reprezentujúcej kmitanie a ukázali význam komplexných koreňov. Rozličné typy diferenciálnych rovníc druhého rádu sme predviedli na RLC obvodoch.

Vyhodnotenie

Na vyhodnotenie nášho kurzu sme použili tri metódy – Calculus Concept Inventory test, ktorý je určený na skúmanie miery porozumenia základným konceptom v oblasti funkcii, limít a derivácií, test postojov k matematike a dotazník, ktorý študenti vyplnili po absolvovaní prvého semestra vysokej školy.

V prvom prípade sne našich žiakov porovnali s absolventmi prvého semestra štúdia fyziky a s druhákmi medziodborového štúdia matematika-fyzika na UPJŠ. Úspešnosť našich študentov bola 56 %, úspešnosť prvákov fyzikov 63 % a úspešnosť druhákov 60 %. Autori testu tvrdia, že priemerné dosiahnuté skóre na 12 vysokých školách zo Spojených štátov a jednej z Fínska bolo 36%. V troch úlohách naši študenti získali štatisticky významne slabšie výsledky, než študenti UPJŠ. Jedna z nich testovala, čo sa dá povedať o zrýchlení, ak je rýchlosť klesajúca lineárna funkcia. Úspešnosť našich študentov bola 67 %, ale v tejto otázke majú väčšinou fyzici jasno. Úspešnosť však bola nižšia aj oproti žiakom sexty, ktorých sme použili ako kontrolnú skupinu a ktorí kurz matematickej analýzy neabsolvovali, aj keď už majú s funkciami isté skúsenosti. Ďalšia úloha sa týkala hodnôt zloženej funkcie. Prečo v nej naši študenti dopadli tak zle (úspešnosť iba 40%) je nám záhadou. Keď sme pracovali so zloženými funkciami, nevšimli sme si v tejto oblasti žiadne závažné nepochopenia. V tretej úlohe sa porovnávalo tempo rastu duba a borovice. Úspešnosť našich študentov bola 60 %. Študenti, ktorí spravili chybu, si väčšinou mýlili tempo rastu a relatívne tempo rastu. Tiež nerozumieme, prečo táto úloha dopadla tak zle, úspešnosť bola opäť nižšia než u sextánov a v inej úlohe, ktorá používala termín „tempo rastu“, boli naši študenti úspešnejší, než obe vzorky študentov z UPJŠ. Podobne boli naši študenti úspešnejší než všetci ostatní vo všetkých úlohách týkajúcich sa limít, nebolo to však o toľko, aby to bolo štatisticky významné.

Čo sa týka vzťahu k matematike, použili sme dotazník, ktorý bol vypracovaný vrámci spolupráce našej fakulty s University of Cambridge a University of Leuven. Študentov sme čo sa postojov k matematike a jej učeniu týka porovnávali s bežnými piatakmi a deviatakmi základnej školy, pričom sme počítali s tým, že vzťah k matematike sa časom zhoršuje. Preto nás potešilo, že prístup našich študentov sa viac podobá piatackému, než deviatackému a v niektorých prípadoch sa štatisticky významne odlišuje dokonca od oboch. Napríklad výroku „Je stratou času, keď nás učiteľ matematiky nechá premýšľať samostatne.“ sa dostalo výraznejšieho odmietnutia, než medzi piatakmi aj medzi deviatakmi a naopak výroky „Matematika nám lepšie umožňuje pochopiť svet, v ktorom žijeme.“, „Čo sa naučím na matematike, môžem použiť aj v ostatných školských predmetoch.“ alebo „Môj učiteľ nám vždy dá čas na preskúmanie nového problému a vyskúšanie rôznych postupov riešenia“ boli prijaté štatisticky významne pozitívnejšie.

V ankete po absolvovaní prvého semestra na vysokej škole sa študenti, ktorí študujú odbory vyžadujúce matematické vzdelanie väčšinou vyjadrili, že absolvovanie kurzu im bolo výrazne nápomocné v ich aktuálnom štúdiu (na škále 1 až 10 udelili hodnotenie aspoň 8 trinásti študenti z pätnástich). Ako kvality kurzu ocenili najmä aplikovateľnosť, priestor na samostatnú prácu a objavovanie, zrozumiteľnosť, pútavosť, dostatok času, logickú stavbu a následné porozumenie a možnosť skupinovej práce a diskusie. Prekvapilo nás najmä, že študenti spomínajú na čas, keď absolvovali kurz, ako na dobu, keď „je oveľa viac času na prebranie učiva“. Pričom hodinová dotácia nášho kurzu bežné hodinové dotácie vysokoškolských kurzov zas tak významne neprekračovala.

Záver

Počas prvého semestra štúdia na vysokej škole nám poslal študent, ktorý absolvoval náš kurz správu, z ktorej si dovolíme zacitovať:

> … pointa ale je ze vsetci prváci si musia prist predmetom matematika I co je najväčšie sito, je to za 9 kreditov, a teda mnoho ľudí na tom skončí vysokoskolsku kariéru. No ale minuly týždeň sme začali derivácie a celkom dost som bol nespokojný s ich prezentáciou, pretože profesor za 100 minút zhrnul derivácie, ich násobenie delenie a skladanie v podstate do jednej prednášky, ku všetkému samozrejme napísal teoretické vysvetlenie ukázal na jednom príklade a isiel dalej, a mega ma to nahnevalo lebo sa pamätám ako sme sa to učili my, postupne a pomaly, ale zas sme tomu aspoň rozumeli co robíme pretože ako som pozeral tak ludia ktorí derivácie nikdy v živote nevideli tak boli asi najviac strateni ako sa da a nemali ani sajnu co sa deje, a celkovo to vysvetlenie profesora vyznelo veľmi teoreticky a neprakticky narozdiel od toho tvojho. Na cvikach sme tiez robili derivácie ale ako pointa bola viac menej v tom ze sa ludia majú naučiť vzorce na derivácie a tabuľky a z toho to ratat, co dost akoze stráca podstatu podla mna a hlavne krásu a zmysel toho. Tak ti chcem este raz veľkolepo poďakovať za to ze si sa s nami piplal a naučil nas to dobre, tvoje skriptá su úžasne asi si ich vytlačim úplne na novo a budem sa z nich ucit, škoda ze ich naplno oceňujem az teraz. Ďakujem teda

pekne anino, vďaka tebe ma myslím vela ľudí veľký náskok a prehľad v matike, tak dúfam ze ta to aspoň trošičku poteší, ze to co robis robis správne.

Aj na základe tejto reakcie si myslíme, že vytvorenie nášho kurzu malo zmysel a že kurz má šancu nájsť si svoje miesto a byť zaujímavým zdrojom informácií či už pre šikovných stredoškolákov, alebo pre tých, ktorí začínajú vnikať do tajomstiev matematickej analýzy na vysokej škole.

Zoznam použitej literatúry

AL CHWARIZMI, Mohammed ben Musa, *Algebra*, Oriental translation fund, London, 1831

ANDREWS, Paul, DIEGO-MANTECON, Jose, VANKÚŠ, Peter, OP'T EYNDE, Peter, *Construct Consistency in the Assessment of Students' Mathematics-related Beliefs: A Three-Way Cross-Sectional Pilot Comparative Study*, Acta Didactica Universitatis Comenianae, 2011, s. 1-24

ARCHIMEDES, *The Method of Archimedes (T. L. Heath's translation)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1912

BALACHEFF, Nicolas, *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*, Mathematics, teachers and children, 1988, s. 235

BELAN Anton, *Veria ľudia dôkazom?*, 2014, Dva dny s didaktikou matematiky 2014, Sborník příspěků, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, s. 18-24, ISBN 978-80-7290-801-1

BELAN, Anton, *Matematický dôkaz ako kritérium pravdivosti*, 2014, Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let, JČMF, s. 74-96, ISBN 978-80-7015-019-1

BERKELEY, George, 2002. *The Analyst*, Dostupné na internete: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf

CARROL, Lewis, 1865. *Alenka v říši divů*, Dostupné na internete: http://www.bibliohelp.cz/sites/default/files/fulltext/Alenka_v_risi_divu.pdf

CAUCHY, Augustin-Louis, *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal (in Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, 1899)*, Gauthier-Villars, Paris, 1823

CAUCHY, Augustin-Louis, *Cours d'analyse (in Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, 1899)*, Gauthier-Villars, Paris, 1821

COURANT, Richard, *Differential & Integral Calculus*, Blackie & Son Limited, London, 1961

DESCARTES, René, *Geometrie*, OIKOYMENH, Praha, 2011, ISBN 978-80-7298-313-1

DUBINSKY, Ed, SCHWINGENDORF, Keith E.,MATHEWS, David M., *Calculus, Concepts and Computers*, Mcgraw-Hill College, Columbus, 1994, ISBN 978-0070410336

ELIÁŠ, Jozef, HORVÁTH, Ján, KAJAN, Juraj, *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť*, ALFA, Bratislava, 1979

EPSTEIN, Jerome, *The Calculus Concept Inventory*, 2006, Proceedings of the National STEM Assessment Conference, Washington DC, , s. 60-67

EULER, Leonard, *Introductio in analysin infinitorum*, Teubner, Lipsko a Berlín, 1922

Európsky parlament, 2007. *Key Competences for Lifelong Learning*, Dostupné na internete: http://www.alfa-trall.eu/wp-content/uploads/2012/01/EU2007-keyCompetencesL3-brochure.pdf

GOLDBLATT, Robert, *Lectures on the Hyperreals (An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1998, ISBN 0-387-98464-X

GRABINER, Judith V., *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*, The American Mathematical Monthly, 1983, s. 185-194

HEATH, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1921

HEJNÝ, Milan a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1988, ISBN 80-08-00014-7

HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila, STEHLÍKOVÁ, Naďa, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, 2004, ISBN 80-7290-189-3 (1. sv.)

HEJNÝ, Vít, *Názorná metoda ve vyučování počtům a matematice*, 2016, Archív Víta Hejného II, EDIS, s. 333-334, ISBN 978-50-554-1282-5

HEJNÝ, Vít, HEJNÝ, Milan, *Prečo je matematika taká ťažká?*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 1978, s. 85-93

HELMINGOVÁ Helene, *Pedagogika M. Montessoriovej*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1996, ISBN 80-08-00281-6

HOFSTADTER, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach - existenciální gordická balada*, Argo / Dokořán, Praha, 2012, ISBN 978-80-7363-265-6

JESSEPH, Douglas M., *Squaring the Circle: The War Between Hobbes and Wallis*, University of Cicago Press, Chicago, 2000, ISBN 978-0226399003

KANT, Immanuel, *Kritika čistého rozumu*, OIKOYMENH, Praha, 2001, ISBN 80-7298-035-1

KEISLER, H. Jerome, *Elementary calculus: An infinitesimal approach*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 2012, ISBN 978-0-486-48452-5

KHAN, Sal, 2017. *Taylor polynomial remainder*, Dostupné na internete: https://www.khanacademy.org/math/calculus-home/series-calc/taylor-series-calc/v/error-or-remainder-of-a-taylor-polynomial-approximation

KVASZ, Ladislav, *Dejiny mocninných radov*, Matematické obzory, 1994, s. 1-26

LIETZMANN, W., *Kde je chyba?*, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry n.p., Bratislava, 1963

LIN, Qun, *Free Calculus (A Liberation from Concepts and Proofs)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008, ISBN 978-9812704580

MA, Xin, KISHOR, Nand, *Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis*, Journal for Research in Mathematics Education, 1997, s. 26-47

MARSDEN, Jerrold E. and WEINSTEIN, Alan J., *Calculus I.*, Springer-Verlag, New York, 1985, ISBN 0387909745

MOJŽIŠ, Martin, *Tri hlavy draka*, W PRESS, Bratislava, 2014, ISBN 9788097119645

Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2014. *Maturitná skúška 2014 - Správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky*, Dostupné na internete: http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2014/vysledky_vyhodnotenia/MAT-Spr%C3%A1va_o_v%C3%BDsledkoch_E%C4%8C_RT_MS_2014_final.pdf

NEWTON, Isaac, *The Method of Fluxions and Infinite Series*, Henry Woodfall, London, 1736

PIAGET, Jean, *Judgment and Reasoning in the Child*, Harcourt, Brace and company., New York, 1928

PIAGET, Jean, *The Origins of Intelligence in Children*, International universities press, Inc., New York, 1952

PIAGET, Jean, *The stages of the intellectual development of the child*, Educational psychology in context: Readings for future teachers, 1965, s. 98-106

SMULLYAN Raymond M, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Portál, Praha, 2015, ISBN 978-80-262-0822-8

SOCHOR Antonín, *Logika pro všechny ochotné myslet*, Mladá fronta, Praha, 2011, ISBN 978-80-246-1969-0

SPIVAK, Michael, *Calculus*, Publish or Perish, inc., Houston, Texas, 1994, ISBN 0-914098-89-6

STILLWELL, John, *Mathematics and Its History*, Springer, New York, 2010, ISBN 978-1-4419-6052-8

SULLIVAN, Kathleen, *The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach*, The American Mathematical Monthly, 1976, s. 370-375

Štátny pedagogický ústav, 2009. *Štátny vzdelávací program, matematika, príloha ISCED 3a*, Dostupné na internete: http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/statny-vzdelavaci-program/matematika_isced3a.pdf

ŠTRAUCH, Peter, *Meranie kvality výučby vo fyzikálnom vzdelávaní* [písomná práca k dizertačnej skúške], 2016, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Ústav fyzikálnych vied

THOMPSON, Silvanus P., *Calculus made easy*, Macmillan and co., limited, London, 1914

VANKÚŠ, Peter, KUBICOVÁ, Emília, *Attitudes of pupils and teachers as important factor for mathematics education*, 2012, Teaching Mathematics III, , s. 125-135

ZELDOVICH, Ya. B., YAGLOM, I. M., *Higher Math for Beginners (Mostly Physicists and Engineers)*, Наука, Moskva, 1987

ZLATOŠ, Pavol, *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*, IRIS, Bratislava, 1995

ZNÁM, Štefan a kol., *Pohľad do dejín matematiky*, ALFA, Bratislava, 1986

HANNA, Gila; DE VILLIERS, Michael (ed.), 2012. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. Springer Science & Business Media, s. 443. ISBN 978-94-007-2128-9

ДЕМНДОВИЧ, Борис Павлович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Наука, Moskva, 1976

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Zoznam publikačnej činnosti

Mgr. Anton Belan

AFC Publikované príspevky na zahraničných vedeckých konferenciách

AFC01 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Matematický dôkaz ako kritérium pravdivosti
Lit. 5 zázn.
In: Jak učit matematice žáky ve věku 10 - 16 let. - Praha : JČMF, 2014. - S. 74-96. - ISBN 978-80-7015-019-1
[Jak učit matematice žáky ve věku 10 - 16 let : celostátní konference. Litomyšl, 24.-26.10.2013]

AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

AFD01 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Ako som si myslel, že rozumiem komplexným číslam
Lit. 5 zázn.
In: Letná škola z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2009. - Bratislava : P-MAT, 2010. - S. 25-31. - ISBN 978-80-89370-01-6
[PYTAGORAS 2009 : Letná škola z teórie vyučovania matematiky. Hronec, 4.-11.7.2009]

AFD02 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Creating the constructivist calculus course
Lit. 5 zázn.
In: MiST 2016 : Mathematics in Science and Technologies. - [North Charleston] : CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. - nestr. [8 s.]. - ISBN 978-1533605665
[MiST 2016 : Mathematics in Science and Technologies : Conference. Fačkovské sedlo, Kľak, 2.-7.1.2016]

BEE Odborné práce v zahraničných zborníkoch (konferenčných aj nekonferenčných)

BEE01 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Veria ľudia dôkazom?
Lit. 4 zázn., 2 obr., 1 tab.
In: Dva dny s didaktikou matematiky 2014. - Praha : Pedagogická fakulta UK, 2014. - S. 18-24. - ISBN 978-80-7290-801-1

[Dva dny s didaktikou matematiky 2014 : konference. 18., Praha, 13.-14.2.2014]

BEE02 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Matematická analýza konštruktivisticky?

Popis urobený 24.4.2017

Lit. 5 zázn.

In: Dva dny s didaktikou matematiky 2016 [elektronický zdroj]. - Praha : Univerzita Karlova PdF, 2016. - S. 97-105 [online]. - ISBN 978-80-7290-894-3

[Dva dny s didaktikou matematiky 2016 : konference. 20., Praha, 11.-12.2.2016]

URL: https://ulozto.cz/!XjUHxBmCEd0P/sbornik-2dny-s-did-matematiky-2016-pdf

BEF Odborné práce v domácich zborníkoch (konferenčných aj nekonferenčných)

BEF01 Belan, Anton [UKOMFKAGDMd] (100%) : Vektory nie su raketová veda, ale skoro

Popis urobený 24.4.2017

Lit. 3 zázn., 10 obr.

In: Dva dni s didaktikou matematiky 2016 [elektronický zdroj]. - Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2016. - S. 7-13 [online]. - ISBN 978-80-8147-075-2

[Dva dni s didaktikou matematiky 2016 : konferencia. 1., Bratislava, 8.-9.9.2016]

URL: http://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/DvaDni/Zbornik2016_final.pdf

Štatistika kategórií (Záznamov spolu: 6):

AFC Publikované príspevky na zahraničných vedeckých konferenciách (1)

AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách (2)

BEE Odborné práce v zahraničných zborníkoch (konferenčných aj nekonferenčných) (2)

BEF Odborné práce v domácich zborníkoch (konferenčných aj nekonferenčných) (1)

24.4.2017